

Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
1^{ière} Année Master MCO
Matière : **Outils d'Analyse 2**
Responsable : Sidi Mohamed Bahri

Feuille d'exercices N°2
Projection Orthogonale
(30 Janvier 2017)

Exercice 1 Pour $n > 0$, soit

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & 0 \leq t \leq 1/n^2 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Montrer que $f_n \rightarrow 0$ dans $L^2[0, 1]$ mais que $f_n(0)$ ne converge pas vers zéro.

Exercice 2 Déterminer le complément orthogonal du sous espace de \mathbb{R}^3 engendré par le vecteur $(1, -2, 1)$.

Exercice 3 Soit $f(t) = 1$ sur $0 \leq t \leq 1$. Montrer que le complément orthogonal de f dans $L^2[0, 1]$ est l'ensemble des fonctions dont la valeur moyenne est égale à zéro.

Exercice 4 Soit $V = L^2[-\pi, \pi]$ et considérons le sous espace $V_0 \subset V$ donné par

$$V_0 = \text{span} \{1, \cos x, \sin x\}.$$

- (i) Trouver une BON pour V_0 (notons que V_0 est un sous espace de $L^2[-\pi, \pi]$ de sorte que les fonctions ne soient définies que sur $[-\pi, \pi]$).
- (ii) Montrer que l'espace $V_1 = \text{span} \{\cos 2x, \sin 2x\} \subset V$ est orthogonal à V_0 . V_1 est-il le complément orthogonal de V_0 ? Justifiez votre réponse.
- (iii) Calculer la projection orthogonale de $f(x) = \cos 3x$ sur V_0 .
- (iv) Calculer la projection orthogonale de $f(x) = x$, pour $x \in [-\pi, \pi]$, sur V_0 et dans V_1 .

Exercice 5 Considérons sur l'espace de Hilbert $L^2[0, 1]$ les fonctions suivantes

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}, \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}.$$

- (a) Calculer la projection orthogonale de la fonction $f(x) = e^{-x}$, pour $x \in [0, 1]$, sur le sous espace $V_0 = \text{span} \{\phi, \psi\}$.
- (b) Calculer la projection orthogonale de $g(x) = x$ sur l'espace engendré par les fonctions $\phi(x), \psi(x), \psi(2x), \psi(2x-1) \in L^2[0, 1]$.