Université Saad Dahlab Blida
Première Année LMD TCST
2016/2017

Module: Maths II **Série d'Exercices n^o : 5**

Dérivabilité, Fonctions usuelles & Développements limités

Exercice 1:

I. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en $x_0 = 0$?

a. $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, b. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$,

c. $h(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \exp(x) - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

II. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en $x_0 = 1$?

a. $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$,

b. $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

III. Avec la notion de dérivée, calculer pour $a, b > 0$, la limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$, puis la limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$.

Exercice 2:

I. Déterminer le domaine de dérivabilité de f, puis calculer f' sur ce domaine

1. $f(x) = \cos(2x^2 + 1)$, 2. $f(x) = \cos^3(x)$,
3. $f(x) = \cos(x^3)$, 4. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

II. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Trouver en fonction de f' la dérivée de

$$\sin(f^2(x)) \text{ et } \sin(f(x^2)).$$

2. On suppose que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $x \mapsto \ln(|f(x)|)$.

Exercice 3:(**À résoudre en Cours**):
Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{10}x^5 + 2x^2 - 1$$

admet une application réciproque sur $[0, +\infty[$, puis détreminer $D_{f^{-1}}$.
Calculer $f(1)$, $f'(1)$ puis $(f^{-1})'(\frac{11}{12})$.

Exercice 4:

1. En utilisant le Théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x > 1$:

$$\frac{x-1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - 1 < \frac{x-1}{2}.$$

2. En déduire la limite suivante:

$$\lim_{x\mapsto 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1},$$

puis la limite:

$$\lim_{x\mapsto 1^+} (\sqrt{x})^{\frac{1}{x-1}}.$$

Exercice (05):
Déterminer les limites suivantes en utilisant la règle de L'Hospital :

1. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 4x + 3}\right)$, 2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$,
3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x(x^2-1)}{|x-1|}$, 4. $\lim_{x\to 0}\cos(2x)^{\frac{3}{x^2}}$
5. $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+3x+2}{(x+2)\ln(x+1)}$, 6. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$,
7. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$, 8. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos(x)}-1}{x}$.

Exercice (06):
Soit f l'application suivante:

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x}e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis vérifier que : $f'(x) = f(x)g(\sqrt{x})$,
où g est une fonction à déterminer.
3. Dresser le tableau de variation de f, puis en déduire:
a. $f(]0,\ 2])$ et $f^{-1}(]-1,\ 2[)$.
b. f n'est pas surjective.
4. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle I à déterminer.
5. Prouver que l'équation $f(x) - 3 = 0$, admet une unique solution sur l'intervalle $]\frac{1}{4}, 1[$.
6. Calculer $f(4)$ et $f'(4)$ puis en déduire $(f^{-1})'(2\sqrt{e})$.

Exercice (07):Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité, puis calculer la dérivée des fonctions :

1. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.
2. $f(x) = \arctan(x + \cos(x))$.
3. $f(x) = \sinh(\ln(x))$.
4. $f(x) = \text{argsh}(2 - x)$.

Exercice (08):(**Examen 2015/2016**)
Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \arcsin(3x - 4x^3).$$

1. Montrer que $3x - 4x^3 - 1 = -4(x - \frac{1}{2})^2(x+1)$ et $3x - 4x^3 + 1 = 4(x + \frac{1}{2})^2(1-x)$.
2. Trouver D_f, le domaine de définition de f.
3. En supposant f dérivable sur $D_f - \{\pm 1, \pm\frac{1}{2}\}$, calculer la fonction dérivée $f'(x)$.
4. Montrer que sur $]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$, la fonction $g(x) = f(x) - 3\arcsin(x)$ est une fonction constante, puis déterminer sa valeur.

Exercice (09): Trouver $DL_n(f)(0)$ dans les cas suivants:
1/ $f(x) = 1 + \exp x - \sin x + chx + \frac{1}{1-x}$ avec$(n = 3)$
2/ $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ avec$(n = 4)$
3/ $f(x) = \cos x \ln(1+x)$ avec $(n = 3)$
4/ $f(x) = (1+x^2)\exp x + x\sqrt{1+x^2}$ avec$(n = 4)$
5/ $f(x) = \frac{1+x+x^3}{2+\sin x}$ avec $(n = 4)$
6/ $f(x) = \exp(\sin x)$ avec $(n = 4)$
7/ $f(x) = \exp(\cos x)$ avec $(n = 4)$

8/ $f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $(n=5)$

Donner $DL_n(f)(x_0)$ pour les fonctions suivantes:

1/ $f(x)=\sqrt{x}$ avec $x_0=2, n=3$; 2/ $f(x)=\ln(\sin x)$ avec $x_0=\frac{\pi}{2}, n=3$

3/ $f(x)=(1+\cos x)^{\frac{1}{x}}$ avec $x_0=\frac{\pi}{2}, n=3$.

Trouver le développement limité au voisinage de l'infini des fonctions suivantes:

1/ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln x$ au $v(+\infty)$ et $n=4$.

2/ $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ au $v(+\infty)$ et $n=3$.

3/ $f(x)=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-x}$ au $v(\pm\infty)$ et $n=3$.

4/ $f(x)=(x^3-x^2+\frac{x}{2})\exp(\frac{1}{x})-\sqrt{x^6+1}$ au $v(+\infty)$ et $n=3$.

Exercice (10):

Soit la fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par:

$$f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$$

1/ Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.

2/ En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x=0$ ainsi que sa position par rapport à la courbe de f.

3/ Déterminer une équation de l'asymptote au $v(+\infty)$,ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe de f.

Exercice (11):

Soient $a\in\mathbb{R}$ et f la fonction indéfiniment dérivable au point 0 définie par:

$$f(x)=\ln\left[1+a\sin x+(\frac{a^2}{2}+1)x^2\right]$$

1/ Montrer que f admet un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 qui s'écrit:

$$ax+x^2-(a^3+7a)\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)$$

2/ En déduire les valeurs de $f(0), f^{'}(0), f^{''}(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

3/ Quelle est l'équation de la tangente à la courbe Γ de f ?

Exercice(12) Soient $a\in\mathbb{R}$ et f la fonction indéfiniment dérivable au point 0 et admettant le développement limité:

$$f(x)=(3-4a)+(a^2-2a)x+(a^3-7a)\frac{x^2}{2}-ax^3+o(x^3).$$

1. Trouver la valeur de a, vérifiant les deux conditions: $f(0)=f^{(1)}(0)$ et $f^{(2)}(0)=f^{(3)}(0)$.

2. Pour $a=1$, déterminer le développement limité de la fonction $g(x)=fo(\sin(x))$ à l'ordre 3, dans un voisinage de 0.

3. En déduire les valeurs suivantes:

$$g^{(3)}(0) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0}\frac{g(x)+1}{x}.$$

Exercice(13) Soient les fonctions f et g définies par:

$$f(x)=\frac{1}{1+\ln(x+\cos(x))} \quad ; \quad g(x)=\frac{1+x^2+x^3}{1+x}.$$

1. Donner les développements limités à l'ordre 3 de f et g, dans un voisinage de 0.

2. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0, puis préciser la position du graphe par rapport à cette droite.

3. Trouver selon les valeurs de $n\in\mathbb{N}$, la limite suivante: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^n}$.

Exercice(14).Soit pour $\alpha\in\mathbb{R}$, la fonction $f(x)$ définie par:

$$f(x)=(x^2+\alpha)\ln\bigl(2+\sin(x)\bigr).$$

1. Montrer que f admet un développement limité dans un voisinage de 0.

2. Donner en fonction de α, le développement limité de f, à l'ordre 3, dans un voisinage de 0.

3. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0, puis préciser la position du graphe par rapport à cette droite.

4. Pour quelle valeur de α on a: $f^{(2)}(0)=\ln(4)$?

Exercice (15):

En utilisant les développements limités, calculer les limites:

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{tg^2 x}$ 2/ $\lim\limits_{x\to\to 0}\frac{(1-\exp(x))\sin x}{x^2+x^3}$ 3/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x-\sin x}$

4/ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right]$ 5/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\operatorname{tg} x)+\sin x-2x}{(\sin x)^5}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 16:

1. A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que:

$$\forall x>0,\ \frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{1}{x}$$

2. Trouver les limites de

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,(\ln(x+1)-\ln(x))$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\,(\ln(x+1)-\ln(x))$$

3. En déduire que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, puis calculer

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x.$$

Exercice (17):

Montrer les inégalités suivantes:

a). $\forall x>0,\ x+1<\exp(x)<x\exp(x)+1$.

b). $\forall x>y>0,\ \frac{x-y}{x}<\ln(\frac{x}{y})<\frac{x-y}{y}$.

Exercice (18):

Calculer les limites suivantes:

$$1).\ \lim_{x\mapsto 0}\frac{\sin^2(x)}{1-\exp(x)},; \qquad 2).\ \lim_{x\mapsto 1+}\ln(x)\ln(x-1).$$

$$3).\ \lim_{x\mapsto 0}(\frac{1}{x})^{\tan(x)},; \qquad 4).\ \lim_{x\mapsto 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}).$$