GEOMETRIE DANS L' ESPACE

Dans tout ce chapitre , les bases ou les repères sont orthonormés de sens direct.

I/ Produit scalaire et conséquences .

1- **Définition 1 :** * Soit A , B et C des points de l'espace . L e produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est défini par :

⊙ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

⊙ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls .

⊙ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2$.

2- **Propriétés** : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace et tous réels α et β .

*$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ * $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$ * $(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$

$(\alpha\vec{u})(\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u}.\vec{v})$

3- **Définition 2 :**

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace , de l'espace .

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Pour tout M (x , y , z) et M ' (x' , y' , z') , $MM' = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$.

4- **Définition 3 :**
Les points A , B , C et D sont coplanaires si et seulement s'ils appartiennent à un même plan .
Les points A , B , C et D sont coplanaires si et seulement
si l'un des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ s'ecrit en fonction des deux autres .
Les points A , B , C et D sont coplanaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = a(b'c''-c'b'') - b(a'c''-c'a'') + c(a'b''-a''b')$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}$

5- **Définition 4 :** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogoneaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

II / Produit vectoriel .

1 – **Définition 1** : Soit A , B et C des points de l'espace . Le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et défini comme suit

* si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires , alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires , alors

* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

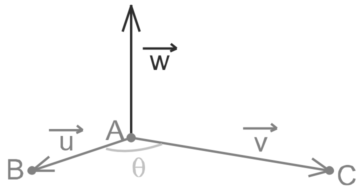
* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})$ est une base directe .

* $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\| = AB.AC\sin\widehat{BAC}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et α et β deux réels .

2-**Propriétés :**

$$\begin{cases} * \ \vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} . \\ * \ \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \text{ si et seulement si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires .} \\ * \ \vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}) \ , \ \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \ , \ \alpha\vec{u} \wedge \beta\vec{v} = \alpha\beta(\vec{u} \wedge \vec{v}) . \\ * \ \left\| \vec{u} \wedge \vec{v} \right\| = \left\| \vec{u} \right\| \left\| \vec{v} \right\| \left| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \right| \end{cases}$$



3- **Expression analytique du produit vectoriel**

L'espace est muni d'un repère orthonormé directe ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) .

Pour tout vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$ on a :

$\vec{u} \wedge \vec{v} = (bc' - cb')\,\vec{i} + (ca' - ac')\,\vec{j} + (ab' - ba')\,\vec{k}$.

Règle pratique pour calculer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

a	b	c	a	b
a'	b'	c'	a'	b'

bc' – cb' ca' – ac' ab' – ba'

> L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
> Soit le plan P d'équation cartésienne : a x + b y + c z + d = 0 avec (a,b,c) ≠ (0,0,0).
> Le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

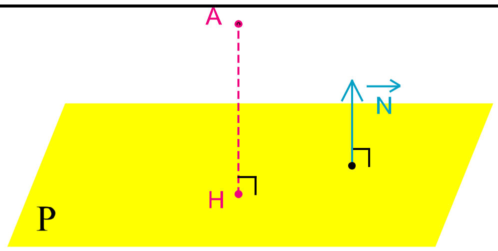
Soient, dans l'espace E, deux plans P : a x + b y + c z + d = 0 et P' : a' x + b' y + c' z + d' = 0 de vecteurs normaux respectifs $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{N'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$. On a :

P // P' $\Leftrightarrow$ $\vec{N}$ et $\vec{N'}$ sont colinéaires	**P $\perp$ P' $\Leftrightarrow$ $\vec{N} \perp \vec{N'}$**
D (A, $\vec{u}$) // P $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \perp \vec{N}$	**D (A, $\vec{u}$) $\perp$ P $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires**
D (A, $\vec{u}$) $\perp$ D (B, $\vec{v}$) $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \perp \vec{v}$	**D (A, $\vec{u}$) // D (B, $\vec{v}$) $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires**

Soient le plan P : a x + b y + c z + d = 0, $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ **un point de l'espace et H le projeté orthogonal de A sur P.**

La distance du point A au plan P est le réel positif AH noté d (A, P) et tel que :

$$d(A,P) = AH = \frac{|a x_A + b y_A + c z_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



Aire d'un triangle ABC Aire (ABC) = $\frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|$

Aire d'un parallélogramme ABCD Aire (ABCD) = $\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|$

Distance d'un point M à un plan (ABC)

$$\frac{\left| (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) . \overrightarrow{AM} \right|}{\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|}$$

Distance d'un point à un droite (AB)

$$\frac{\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} \right\|}{\left\| \overrightarrow{AB} \right\|}$$

Volume d'un parallélépipède ABCDEFGH

$$V = \left| (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) . \overrightarrow{AE} \right| = \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) \right|$$

Volume d'un tétraèdre ABCD

$$V = \frac{1}{6}\left| (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) . \overrightarrow{AD} \right|$$

M est un point du plan définie par A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires **si et seulement si :**

$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) . \overrightarrow{AM} = 0.$

Sphère S de centre A et de rayon R : $M \in S \Leftrightarrow AM = R$.

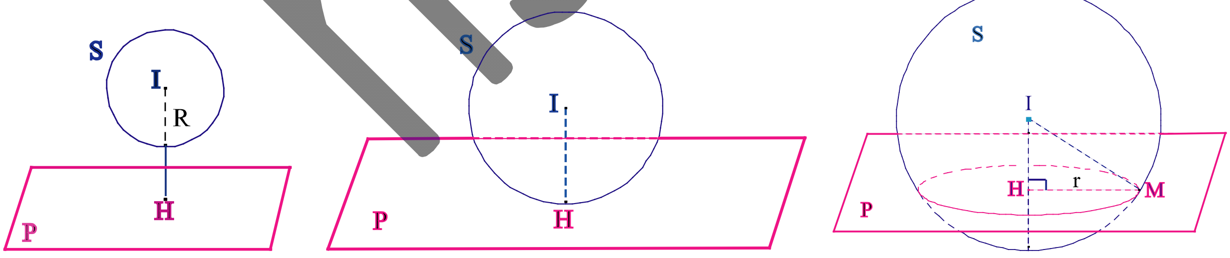
l'équation $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ et on pose $h = (a^2 + b^2 + c^2 - 4d) / 4$.

si $h < 0$ l'ensemble est le vide , si $h = 0$ l'ensemble est un point $A\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ et si $h > 0$ l'ensemble est la sphère de centre A et rayon $\sqrt{h}$.

Equation cartésienne d'une sphère de centre A (x_0 , y_0 , z_0) et de rayon R .

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

Théorème Soit S une sphère de rayon R et de centre A . Soit un plan P , d la distance de A à P et H le projeté orthogonal de A sur P . si $d > R$ l'intersection est le vide , si $d = R$ l'intersection est le singleton $\{H\}$ et si $d < R$ l'intersection est un cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.



Théorème : l'image d'une sphère S de centre A et de rayon R par une translation t est une sphère de centre A' = t (A) et de rayon R .

l'image de S par une homothétie de centre Ω et de rapport k est un sphère de centre A' = h (A) et de rayon $|k|$ R .

Translation de l'espace:

Définition: *(Translation de l'espace)*

$\vec{u}$ est un vecteur de l'espace $\mathbb{E}$. La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application notée $t_{\vec{u}}$ de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ qui à tout point M de $\mathbb{E}$ associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Ainsi : $\boxed{M' = t_{\vec{u}}(M) \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}}$

Théorème:

$\vec{u}$ est un vecteur de l'espace $\mathbb{E}$.

$t_{\vec{u}}$ est une application bijective de $\mathbb{E}$ et sa réciproque est $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$.

Pour tous points M et M' de $\mathbb{E}$ on a : $\boxed{M' = t_{\vec{u}}(M) \iff M = t_{-\vec{u}}(M')}$

Théorème: *(Propriété caractéristique)*

Soit f une application de l'espace $\mathbb{E}$ dans lui même.

f est une translation de $\mathbb{E}$ $\iff \forall (M,\ N) \in \mathbb{E}^2;\ \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ avec

$M' = f(M)$ et $N' = f(N)$.

Théorème: *(Autres propriétés)*

Toute translation conserve la distance, le milieu, le produit scalaire et l'alignement.

Théorème: *(Images des configurations)*

1/ L'image d'une droite par une translation de l'espace est une droite qui lui est parallèle.

2/ L'image d'un plan par une translation de l'espace est un plan qui lui est parallèle.

3/ L'mage d'une sphère par une translation est une sphère de même rayon et de centre l'image du centre de la première.

Théorème: *(Autres propriétés)*

Toute translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité

Théorème: *(Expression analytique)*

L'espace $\mathbb{E}$ est muni d'un repère $R=\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Soit $\vec{u}=a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Soit l'application $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}\ ;\ M(x,y,z) \mapsto M'(x',y',z')$

• f est la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$

Homothétie de l'espace *(Homothétie de l'espace)*

Définition: Soit k un réel non nul et I est un point de l'espace $\mathbb{E}$. L'homothétie de centre I et de rapport k est l'application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$, notée $h_{(I,k)}$, qui à tout point M de $\mathbb{E}$ associe le point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$.

Ainsi : $\boxed{M' = h_{(I,k)}(M) \iff \overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}}$

Théorème Soit k un réel non nul et I est un point de l'espace $\mathbb{E}$.
$h_{(I,k)}$ est une application bijective de $\mathbb{E}$ et sa réciproque est $(h_{(I,k)})^{-1} = h_{\left(I,\frac{1}{k}\right)}$. Pour tous points M et M' de $\mathbb{E}$ on a :

$$\boxed{M' = h_{(I,k)}(M) \iff M = h_{\left(I,\frac{1}{k}\right)}(M')}$$

Théorème *(Propriété caractéristique)*

Soit f une application de l'espace $\mathbb{E}$ dans lui même.

f est une homothétie de rapport $k(\in IR^*)$ de $\mathbb{E}$

$\Updownarrow$

$\forall (M, N) \in \mathbb{E}^2;\ \overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ avec $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$.

(Autres propriétés) $\boxed{\text{Toute homothétie conserve le milieu, la barycentre et l'alignement.}}$

Toute homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité

(Images des configurations)

1/ L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

2/ L'image d'un plan par une homothétie est un plan qui lui est parallèle.

3/ L'mage d'une sphère de centre Ω et de rayon r $(\in IR_+^*)$ par une homothétie h de rapport $k(\in IR^*)$ est la sphère de rayon $|k|r$ et de centre $h(\Omega)$.

(Expression analytique)

L'espace $\mathbb{E}$ est muni d'un repère $R=\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Soit un point $I(a, b, c)$ et un réel k un réel non nul.

Soit l'application $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}\ ;\ M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z')$

1/ *Si* $f = h_{(I,k)}$ *alors* $\begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \\ z' = kz + (1-k)c \end{cases}$

2/ *Si* $\begin{cases} x' = kx + \alpha \\ y' = ky + \beta \\ z' = kz + \gamma \end{cases}$ avec $k \in IR^* \setminus \{1\}$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in IR^3$ *alors*

f est l'homothétie de rapport k et de centre le point de coordonnées $\left(\frac{\alpha}{1-k}, \frac{\beta}{1-k}, \frac{\gamma}{1-k}\right)$.