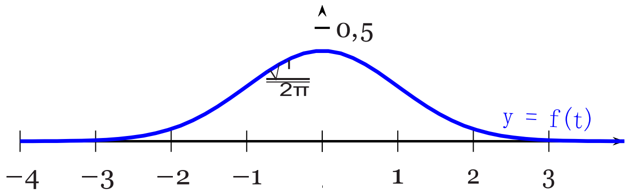
Loi normale

1) La loi normale centrée réduite.

- La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ est la loi de probabilité dont la densité est la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } t,\ f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

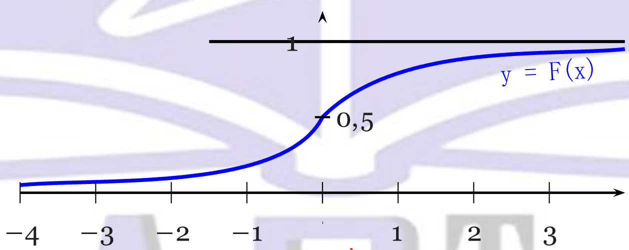


Remarque. Au cours des études post-bac, on sait démontrer que l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ est égale à $\sqrt{2\pi}$.

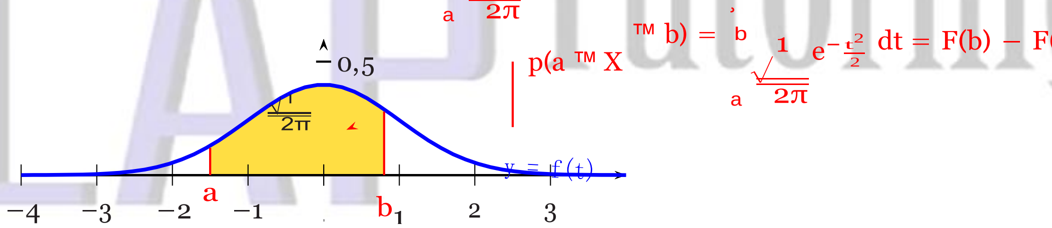
En divisant par $\sqrt{2\pi}$, on normalise : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1$.

- La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est la fonction F définie par :

$$\text{pour tout réel } x,\ F(x) = p(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$



Pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a $p(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = F(b) - F(a)$.



On ne sait pas exprimer les intégrales précédentes à l'aide des fonctions usuelles à disposition en terminale. Pour obtenir des valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on dispose soit de la calculatrice, soit de tables numériques fournies à la fin de certains livres.

- L'espérance de la loi normale centrée réduite est 0 (la loi est centrée) et l'écart-type de la loi normale centrée réduite est 1 (la loi est réduite).

2) Théorème de Moivre-Laplace.

La loi normale approche la loi binomiale. Plus précisément :

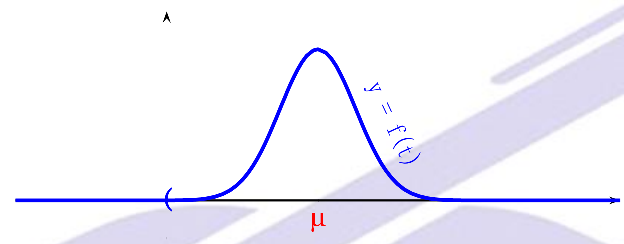
Théorème. Pour tout entier naturel non nul n, on considère une variable aléatoire X_n qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ puis on considère $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, la variable centrée réduite associée.
Alors, pour tous réels a et b tels que $a < b$

$$\lim_{n\to+\infty} p\left(np + a\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + b\sqrt{np(1-p)}\right) = \lim_{n\to+\infty} p(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

3) Loi normale : cas général.

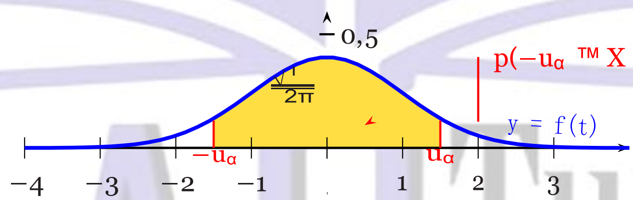
- Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si et seulement si la variable aléatoire $\dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

μ est l'espérance de $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 est sa variance et σ est son écart-type.



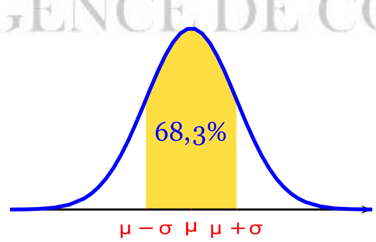
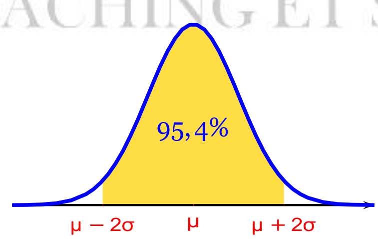
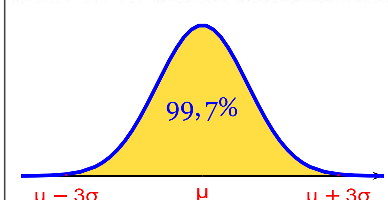
4) Intervalle associé à une probabilité

Théorème. Soit X une variable aléatoire régie par la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
Pour tout réel $\alpha \in]0, 1[$, il existe un réel strictement positif u_α et un seul tel que $p(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.



On doit connaître en particulier $u_{0,05} = 1,96$ et $u_{0,01} = 2,58$.
Inversement, pour une loi normale en général, on doit connaître les probabilités associées à des intervalles centrés autour de μ de rayon σ, 2σ ou 3σ :

Théorème. Soit X une variable aléatoire régie par une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

$p(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = 0,683$	$p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0,954$	$p(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) = 0,997$
		

Conséquence. Si X_n est une variable aléatoire régie par une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et si $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\right) = \lim_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha.$$