Chapitre 1

Grandeurs et symbolisation.

Une grandeur est une entité mesurable. Par exemple la pression d'un gaz, le pH d'une solution aqueuse, les bénéfices d'une entreprise, etc....

Une grandeur peut prendre un certains nombre de valeurs pouvant être infini ou non. Par exemple la concentration d'une solution sera un nombre réel positif, la température de l'atmosphère pourra être un nombre réel de signe quelconque, les points d'un match de rugby seront des nombres entiers positifs, etc...

Dans la suite on verra comment représenter une grandeur indépendament de ses valeurs, et comment écrire des énoncés scientifiques. Ceci constitue la symbolisation d'un problème.

Le problème de la symbolisation est fondamental en mathématiques mais aussi en sciences de l'ingénieur. La capacité de compréhension d'une équation scientifique passe par la compréhension de la signification des symboles qu'elle contient.

1.1 Symbolisation en sciences de l'ingénieur.

1.1.1 Symbolisation d'une grandeur par une lettre.

Une grandeur physique, chimique, économique, etc...est le plus souvent représentée par une lettre. Cette lettre est souvent choisie de manière simple afin de pouvoir aisément l'associer au nom de la grandeur. On pourra choisir la lettre initiale du nom de la grandeur, ce qui favorisera une bonne mémorisation.

Par exemple une masse sera représentée par la lettre m, une force par la lettre f, une concentration par la lettre C, un produit intérieur brute par l'acronyme P.I.B., etc...

Cependant, supposons que dans un problème on s'intéresse à un échantillon de matière dont on connaît la masse et le volume, et dont on veut déterminer la masse volumique, c'est à dire la masse de ce corps pour un volume unité. Il est légitime de noter m la masse du corps et v son volume.

Par contre on ne notera pas la masse volumique par la lettre m, il faudra lui associer un autre symbole sous peine de confondre les deux grandeurs masse et masse volumique, on pourra par exemple utiliser la majuscule M.

Une fois le choix des symboles fait pour les différentes grandeurs, on ne les modifiera pas dans la suite. Un symbole unique désigne une grandeur unique depuis le début jusqu'à la fin de la résolution d'un problème.

On retiendra la règle suivante :

Règle 1.1
A chaque grandeur d'un problème on associe un symbole unique et invariant au sein de ce problème.

Malheureusement l'expérience montre que les 26 lettres de l'alphabet latin, plus leures majuscules (soit 52 symboles au total), ne suffisent pas à réaliser une symbolisation satisfaisante. Plusieurs raisons à cela :

— plusieurs grandeurs ont des lettres initiales identiques, en utiliser une autre très différente pourrait alors nuire à la mémorisation
— une même grandeur peut prendre plusieurs valeurs parfaitement identifiées, par exemple au cours d'une expérience de mesure de masses volumiques de différents corps, les échantillons présentent des valeurs de masse et de volume différentes
— les traditions des différentes disciplines imposent souvent certains symboles ce qui permet une communication plus simple et immédiate entre différents acteurs
— ...

On a alors recours à différentes astuces pour permettre une lisibilité plus aisée de l'exposé ou la résolution d'un problème.

1.1.2 Utilisation d'un alphabet non latin ou d'une caligraphie particulière.

Pour augmenter le vivier de symboles disponibles on peut utiliser un autre alphabet que l'alphabet latin. En particullier il est de tradition d'utiliser l'alphabet grec qui contient 24 lettres représentées par 30 caractères, voir TABLE 1.1.

On verra de nombreux exemples d'utilisation de l'alphabet grec. Notons cependant quelques exemples traditionnels :

— δ et Δ sont utilisées systématiquement pour représenter une variation d'une grandeur physico-chimique

TABLE 1.1 – L'alphabet grec.

Nom	**Minuscule**	**Majuscule**	**Nom**	**Minuscule**	**Majuscule**
Alpha	α	A	Nu	ν	N
Bêta	β	B	Ksi ou Xi	ξ	Ξ
Gamma	γ	Γ	Omicron	o	O
Delta	δ	Δ	Pi	π ou ϖ	Π
Epsilon	ϵ ou ε	E	Rhô	ρ ou ϱ	P
Zêta	ζ	Z	Sigma	σ ou ς	Σ
Êta	η	H	Tau	τ	T
Thêta	θ ou ϑ	Θ	Upsilon	υ	Υ
Iota	ι	I	Phi	ϕ ou φ	Φ
Kappa	κ	K	Khi	χ	X
Lambda	λ	Λ	Psi	ψ	Ψ
Mu	μ	M	Oméga	ω	Ω

- ε est utilisée pour représenter une valeur très petite
- θ est utilisée pour représenter une température exprimée en degré Celsius
- λ est utilisée pour représenter une longueur d'onde ou une conductivité thermique
- μ est utilisée pour représenter une masse volumique
- ν est utilisée pour représenter une fréquence
- ρ est utilisée pour représenter une masse volumique ou une résistivité électrique
- Σ est utilisée comme symbole de sommation
- τ est utilisée pour représenter un temps caractéristique
- Φ est utilisée pour représenter un flux thermique
- ω est utilisée pour représenter une pulsation ou une vitesse de rotation

1.1.3 L'indexation et l'exponentiation.

On peut multiplier à l'infini l'utilisation d'une même lettre par l'utilisation de l'indexation et, plus rarement, d'exponentiation.

L'indexation consiste à associer à un symbole alphabétique un ou plusieurs nombres, parfois des lettres, placés en bas à droite du symbole principal.

Par exemple, supposons toujours que l'on souhaite faire des mesures de masses volumiques de différents corps solides. On pourra alors associer :

- les symboles m_1, v_1 et ρ_1 pour la masse, le volume et la masse volumique respectivement du premier corps
- les symboles m_2, v_2 et ρ_2 pour la masse, le volume et la masse volumique respectivement du deuxième corps
- les symboles m_3, v_3 et ρ_3 pour la masse, le volume et la masse volumique respectivement du troisième corps
- ...

On voit que ce procédé démultiplie bien à l'infini l'utilisation d'un même symbole alphabétique de base. C'est un procédé extrêmement courant et qu'il est indispensable de savoir manier à bon escient.

L'exponentiation consiste également à associer à un symbole alphabétique un ou plusieurs nombres, parfois des lettres, mais cette fois ci placés en haut à droite du symbole principal. Cependant ce procédé comporte un risque de confusion avec l'opération mathématique d'exponentiation.

En effet, si dans l'exemple précédent on avait choisit cette méthode, la masse du deuxième corps aurait été notée m^2. Il y a donc un fort rique de confusion avec le carré de la masse $m^2 = m.m$.

On y aura donc recourt le moins possible et seulement dans des contextes où toute ambiguïté est exclue.

1.1.4 Les symboles graphiques.

Une dernière façon de multiplier le cheptel symbolique est d'utiliser des symboles graphiques.

Par exemple on pourra utiliser une flèche placée au dessus du symbole principal et orientée dans le sens de lecture occidental pour représenter un vecteur : $\vec{u}$.

On pourra utiliser un chapeau pour représenter un angle formé par deux droites (AB) et (BC) : $\widehat{ABC}$

Le procédé d'exponentiation pourra être utilisé ici sans risque.

Par exemple on note très souvent le pression de vapeur saturante d'un liquide par l'exponentiation sur la lettre p du symbole $\ominus$: $p^{\ominus}$.

Plusieurs notations sont également possibles pour une même signification selon le contexte traditionnel de la disciplne exercée.

Par exemple le complexe conjugué d'un nombre complexe z sera noté $\bar{z}$ ou z^* selon que l'on traite un problème de mathématique ou de physique.

On ne donnera pas ici de liste exhaustive des différents symboles graphiques courament utilisés, on en verra des exemples au fil de cet ouvrage.

1.2 Symboles mathématiques normalisés.

Les symboles mathématiques normalisés sont des symboles permettant l'écriture synthétique de phrases courantes dans tous les domaines des mathématiques. Ces symboles sont normalisés, c'est à dire qu'ils ont une signification unique et que toute autre utilisation que celle pour laquelle ils ont été créés doit être exclue.

1.2.1 Les symboles relationnels.

Les mathématiques, et par extension toutes les sciences qui les utilisent, consistent a trouver des relations entre différents objets. Dans cet ouvrage il s'agira essentiellement de relations entre grandeurs physico-chimiques.

Il existe deux types de relations de base :

— les égalités
— les inégalités

1.2.1.1 Les symboles d'égalité et d'approximation.

L'égalité est représentée par le symbole =. Si deux objets A et B sont égaux on notera :

$$A = B \tag{1.2.1}$$

En mathématiques cette écriture signifie que A et B sont rigoureusement identiques. Une telle expression est appelée équation.

En sciences de l'ingénieur, la signification est plus souple : les deux grandeurs ont des valeurs égales dans la limite des capacités des instruments de mesure.

Dans de nombreux cas on peut se contenter d'une égalité approximative, en précisant le degré d'approximation. Dans ce cas le symbole = est remplacé par différents symboles tels que : $\simeq$, $\approx$ ou $\sim$. Ces trois symboles ont des "forces" décroissantes dans l'ordre de leur énoncé. Le plus faible étant $\sim$.

On verra au cours de l'ouvrage comment les utiliser selon le contexte.

1.2.1.2 Les symboles d'inégalité.

Il est souvent important de savoir laquelle de deux valeurs d'une même grandeur est la plus grande. Dans ce cas on écrit une relation analogue à (1.2.1) en remplaçant le symbole = par un des symboles suivants :

- $>$: supérieur
- $<$: inférieur
- $\geqslant$: supérieur ou égal
- $\leqslant$: inférieur ou égal

Par exemple si la valeur g_1 d'une grandeur G est supérieure à une valeur g_2 de cette même grandeur on écrira :

$$g_1 > g_2$$

Notons que l'on pourrait aussi écrire :

$$g_2 < g_1$$

Si une valeur g_1 d'une grandeur G est très grande devant une valeur g_2 on pourra écrire :

$$g_1 \gg g_2 \qquad \text{ou} \qquad g_2 \ll g_1$$

1.2.2 Les symboles ensemblistes.

On rappelle q'un ensemble est une collection d'objets appelés éléments de l'ensemble. Ces éléments peuvent présenter des points communs ou des relations, par exemple l'ensemble des nombres pairs a pour éléments tous les nombres multiples de 2.

Ils peuvent aussi être totalement indépendants les uns des autres, par exemple on peut considérer un ensemble qui contiendrait un chat, un sac de pommes de terre et un pneu usé.

Lorsqu'on connaît le détail des éléments d'un ensemble on peut les noter entre accolades séparés par des points-virgules.

Par exemple l'ensemble contenant un chat, un sac de pommes de terre et un pneu usé serait noté : {un chat ; un sac de pommes de terre ; un pneu usé}.

Il existe un ensemble très important : l'ensemble ne contenant aucun élément appelé ensemble vide et noté : $\varnothing$.

1.2.2.1 Les ensembles numériques.

Il existe 5 principaux ensembles numériques. Chacun possède un nom et un symbole précis qu'il faut impérativement connaître pour comprendre de nombreux problèmes.

— l'ensemble des nombres entiers naturels, c'est à dire les nombres 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; . . . , est noté $\mathbb{N}$
— l'ensemble des nombres entiers relatifs, c'est à dire les nombres 0 ; 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 3 ; -3 ; . . . , est noté $\mathbb{Z}$
— l'ensemble des nombres rationnels, c'est à dire les nombres pouvant se mettre sous la forme d'une fraction de deux entiers est noté $\mathbb{Q}$
— l'ensemble des nombres réels, c'est à dire les nombres rationnels et les nombres irationnels tel que π ou $\sqrt{2}$ est noté $\mathbb{R}$
— l'ensemble des nombres complexes, c'est à dire les nombres pouvant s'écrire sous la forme $a + ib$ où a et b sont réels, et où $i^2 = -1$ est noté $\mathbb{C}$

Ces différents ensembles sont résumés dans la TABLE 1.2.

1.2.2.2 Les symboles d'appartenance.

Pour exprimer qu'un objet appartient à un ensemble particulier on utilise le symbole d'appartenance $\in$.

Par exemple le nombre 1 est un entier naturel, on écrira donc $1 \in \mathbb{N}$.

Pour exprimer qu'un objet n'appartient pas à un ensemble particulier on utilise le symbole de non-appartenance $\notin$.

Par exemple le nombre π n'est pas un rationnel, on écrira donc $\pi \notin \mathbb{Q}$.

1.2.2.3 Les symboles d'inclusion.

On dit qu'un ensemble A est inclu dans un ensemble B lorsque tous les éléments de A sont aussi éléments de B, voir FIGURE 1.1. On note alors :

— $A \subset B$ si certains élément de B ne sont pas dans A
— $A \subseteq B$ si A peut éventuellement être égal à B

Par exemple tous les nombres rationnels sont des nombres réels, mais π est un réel irationnel, donc $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
D'une manière plus générale les ensembles numériques sont hiérarchisés comme suit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Pour écrire q'un ensemble A n'est pas inclu dans un ensemble B on utilise le symbole $\not\subset$.
Par exemple $\mathbb{Z}$ n'est pas inclu dans $\mathbb{N}$ puisque $\mathbb{N}$ ne contient aucun nombre négatif, donc $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$.

1.2.2.4 Les symboles d'opérations sur les ensembles.

On peut construire de nouveaux ensembles à partir de deux ensembles A et B par les opérations d'intersection et de réunion. Ces opérations possède chacune leur symbole :

— l'intersection de A et de B est un ensemble C contenant les éléments communs à A et à B, voir FIGURE 1.2 ; l'opération est symbolisée par $\cap$:

$$C = A \cap B \tag{1.2.2}$$

— la réunion de A et de B est un ensemble D contenant les éléments de A et les éléments de B, voir FIGURE 1.3 ;l'opération est symbolisée par $\cup$:

$$D = A \cup B \tag{1.2.3}$$

Par exemple considérons les deux ensembles suivants :

— $A = \{$ un chat ; un sac de pommes de terre ; un pneu usé $\}$
— $B = \{1;$ un clou neuf ; un sac de pommes de terre $\}$

Alors :

— $C = A \cap B = \{$ un sac de pommes de terre $\}$
— $D = A \cup B = \{$ un chat ; un sac de pommes de terre ; un pneu usé ; $1;$ un clou neuf $\}$

TABLE 1.2 – Les ensembles numériques.

Nombres	**Ensemble**
Entiers naturels	$\mathbb{N}$
Entiers relatifs	$\mathbb{Z}$
Rationnels	$\mathbb{Q}$
Réels	$\mathbb{R}$
Complexes	$\mathbb{C}$

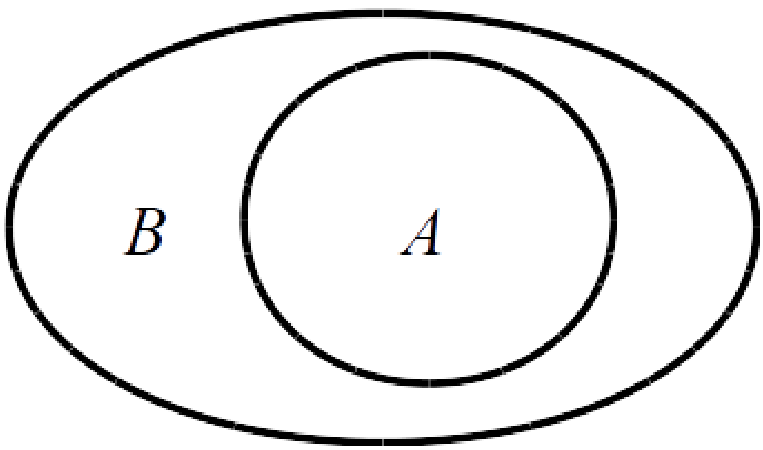

FIGURE 1.1 – $A \subset B$.

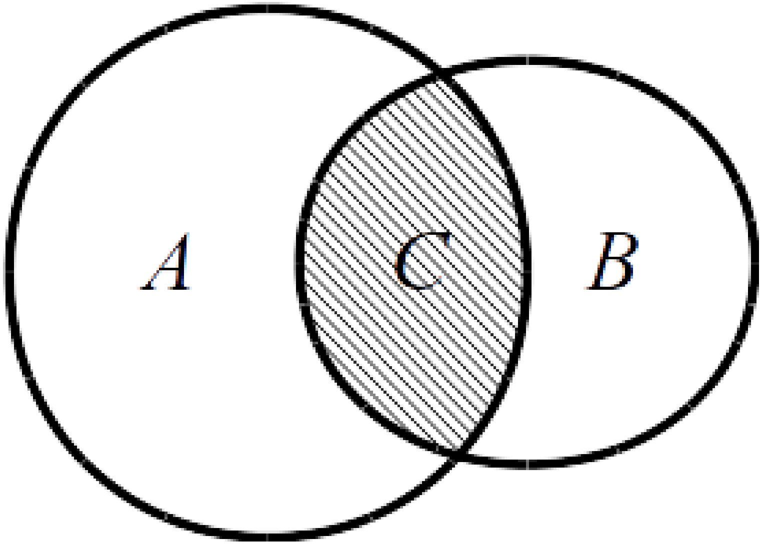

FIGURE 1.2 – $C = A \cap B$.

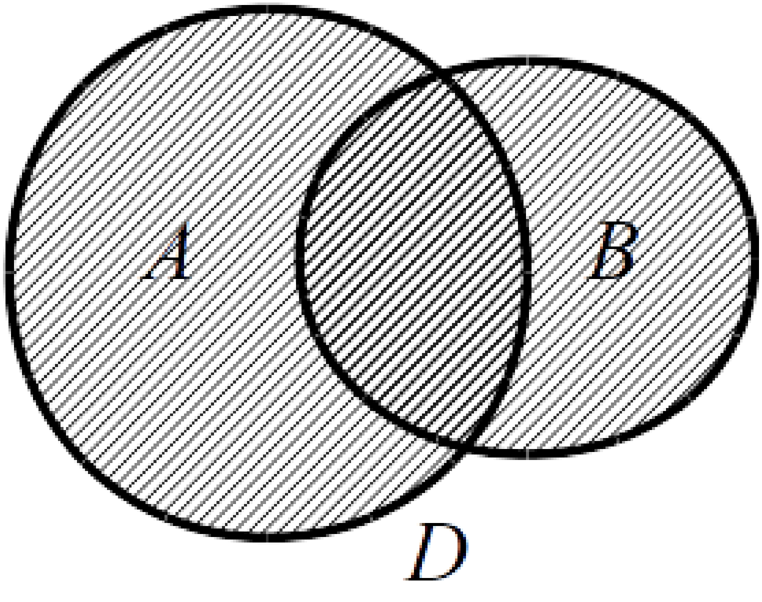

FIGURE 1.3 – $D = A \cup B$.

1.2.3 Les symboles logiques.

Un raisonnement mathématique conduisant à un résultat suit une démarche logique, même si l'intuition est un élément capital. Cette démarche doit être la même en sciences de l'ingénieur.

Sans entrer dans les détails de la théorie logique, on considèrera qu'une affirmationn qu'une phrase, qu'un énoncé ne peut être que VRAI ou FAUX.
Par exemple, l'énoncé suivant « $1 = 0$ » est FAUX.

Les deux symboles logiques que nous allons voir permettent de relier deux énoncés VRAIS.

1.2.3.1 Le symbole d'implication.

Le symbole d'implication $\Longrightarrow$ est utilisé pour signifier que si un énoncé est VRAI, l'énoncé suivant est VRAI également. Il s'écrit :

$$\text{Enoncé 1 VRAI} \Longrightarrow \text{Enoncé 2 VRAI} \tag{1.2.4}$$

Cette phrase se lit : « Si l'énoncé 1 est VRAI alors l'énoncé 2 est VRAI. ». On dit aussi que l'énoncé 2 est une condition nécéssaire de l'énoncé 1.
Par exemple : « Une solution aqueuse est obtenue par dissolution de dichromate de potassium $\Longrightarrow$ la solution est orange ».

Mais si l'énoncé 2 est VRAI, l'énoncé 1 peut être FAUX !
Par exemple une solution aqueuse orange peut être obtenue en diluant du sirop d'orange, elle ne contient donc pas nécéssairement de dichromate de potassium.

C'est un symbole délicat à utiliser mais il est indispensable de le comprendre. Dans l'exemple de la solution de dichromate de potassium, cela signifie que si la couleur de la solution n'est pas orange, elle ne peut pas contenir de dichromate de potassium, mais si elle est orange, cela ne suffit pas à affirmer qu'elle en contient.

1.2.3.2 Le symbole d'équivalence.

Le symbole d'équivalence $\Longleftrightarrow$ est utilisé pour signifier que :

— si l'énoncé 1 est VRAI alors l'énoncé 2 est VRAI
— si l'énoncé 2 est VRAI alors l'énoncé 1 est VRAI

Cette phrase se lit : « Si l'énoncé 1 est VRAI alors l'énoncé 2 est VRAI et réciproquement. ». Ou encore : « L'énoncé 1 est VRAI si et seulement si l'énoncé 2 est VRAI. ». On dit aussi que l'énoncé 1 est une condition nécéssaire et suffisante à l'énoncé 2. On dit enfin que les énoncé 1 et 2 sont équivalents.
Par exemple : « 4 est un nombre pair $\Longleftrightarrow$ 4 est divisible par 2. ».

1.2.4 Les symboles de quantification.

Pour finir nous allons voir deux symboles permettant de quantifier les éléments d'un ensemble permettant de circonscrire la véracité d'un énoncé, c'est à dire de « dénombrer » les éléments pour lesquels un énoncé est VRAI.

1.2.4.1 Le symbole d'existance.

Le symbole d'existance $\exists$ signifie qu'il existe au moins un élément d'un ensemble donné pour lequel l'énoncé qui suit est VRAI.

Par exemple « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2.$ » signifie qu'il existe au moins un nombre réel dont le carré vaut 2 (on sait qu'il en existe deux : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$).

Si on ajoute un point d'exclamation dérière ce symbole : $\exists!$, alors l'existance est unique.

Par exemple « $\exists! n \in \mathbb{N}, n - 1 = 0.$ » signifie qu'il n'existe qu'un entier naturel vérifiant la relation : $n - 1 = 0$, (on sait que cet entier est 1 et qu'il n'y en a pas d'autre).

Si aucun élément d'un ensemble ne vérifie un énoncé donné on utilisera le symbole : $\nexists$.

Par exemple « $\nexists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1.$ » signifie qu'il n'existe aucun nombre réel dont le carré vaut -1.

1.2.4.2 Le symbole d'universalité.

Le symbole d'universalité $\forall$ signifie que n'importe quel élément d'un ensemble donné vérifie l'énoncé qui suit. On le lit : « pour tous » ou « quel que soit ».

Par exemple « $\forall n \in \mathbb{Z}$ pair $\exists p \in \mathbb{Z}, n = 2p.$ » signifie que quel que soit l'entier relatif n pair que l'on choisisse, il existe un entier relatif p tel que n est le double de p. Ce qui peut se dire également que tout entier relatif pair est divisible par 2.

1.3 Exercices.