VI/TRAVAIL ET ENERGIE
الـــعـــمـــل و الـــطـــاقـــة

1/ TRAVAIL ET PUISSANCE (العمل و الاستطاعة) :

❖ **La puissance :**

➢ **Définition : Soit M un point matériel de vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel R. La puissance de la force $\vec{F}$ à laquelle est soumise M est définie à chaque instant par la relation 6.1 :**

$$\left.\begin{array}{r} watt(W) \leftarrow P \\ N \leftarrow F \\ m.s^{-1} \leftarrow v \end{array}\right| \quad \boxed{P = \vec{F}.\vec{v}} \qquad \textbf{(6.1)}$$

❖ **Le travail :**

➢ **Définition : le travail de la force $\vec{F}$ entre l'instant t , quand le point matériel M est en M de position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, et l'instant $t + dt$ quand M est en M' de position $\overrightarrow{OM'} = \vec{r} + d\vec{r}$, est la grandeur exprimée en joule :**

$$\boxed{dW = P.dt} \qquad \textbf{(6.2)}$$

D'après la définition de la vitesse, on a : $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = d\vec{r} = \vec{v}.dt$

Ainsi on en déduit l'expression du travail de la force $\vec{F}$ pour un déplacement élémentaire $d\vec{r}$:

$$\boxed{dW = \vec{F}.d\vec{r}} \qquad \textbf{(6.3)}$$

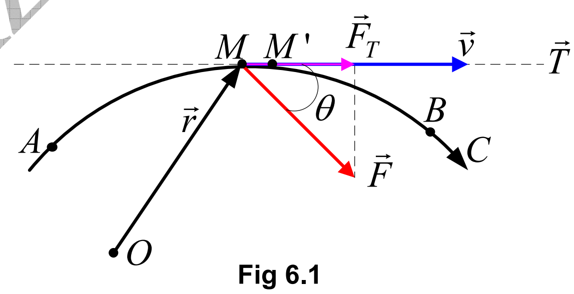

Fig 6.1

Remarquons que le travail est un produit scalaire du vecteur force et du vecteur déplacement.

$$\boxed{dW = \|\vec{F}\|.\|d\vec{r}\|.\cos\theta} \qquad \textbf{(6.4)}$$

Notons que $F.\cos\theta = F_T$. Si on pose $\|d\vec{r}\| = ds$, on obtient alors une nouvelle expression du travail qui est :

$$\boxed{dW = F_T.ds} \qquad \textbf{(6.5)}$$

Cela veut dire que le travail est égal au produit de déplacement élémentaire par la composante de la force suivant la direction du déplacement.

Pour un déplacement total de A (à l'instant t_A) à B (à l'instant t_B) tout au long de la courbe C, on obtient l'expression :

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B F_T.ds} \qquad \textbf{(6.6)}$$

- Dans le cas particulier où la force $\vec{F}$ est constante en module et en sens, et le corps se déplaçant suivant une trajectoire rectiligne, le travail de cette force est :

$$F = F_T \Rightarrow W = \int_A^B F.ds = F\int_A^B ds \Leftrightarrow \boxed{W = F.s} \qquad \textbf{(6.7)}$$

- La force qui ne travail pas est la force perpendiculaire au déplacement ($\theta = \pi/2$).

<u>Par exemple</u> : Le corps représenté sur la figure 6.2 est soumis à quatre forces constantes, et se déplace sur un plan horizontal.

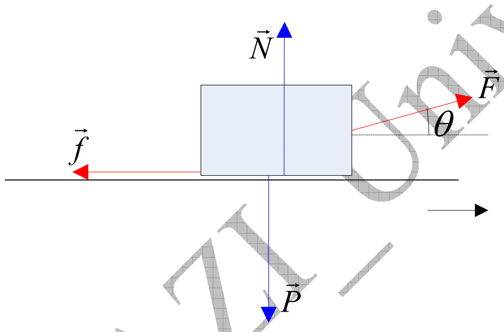

Fig 6.2

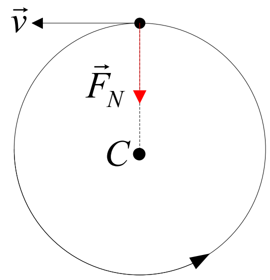

Fig 6.3

Soit s le déplacement du corps, et donc de chacune des forces :

Le travail de la force $\vec{F}$: $W_{\vec{F}} = F.s.\cos\theta$

Le travail de la force résistante $\vec{f}$: $W_{\vec{f}} = -f.s$

Le travail du poids $\vec{P}$: $W_{\vec{P}} = 0$

Le travail de la force normale $\vec{N}$: $W_{\vec{N}} = 0$

Dans le mouvement circulaire, le travail de la force normale est nul (figure 6.3).

- Si F_x, F_y, F_z sont les composantes rectangulaires de la force $\vec{F}$, et dx, dy, dz les composantes rectangulaires du vecteur de déplacement élémentaire $d\vec{r}$, alors :

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B (F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz)} \qquad \textbf{(6.8)}$$

- Cas de plusieurs forces : Si le corps est soumis à plusieurs forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3........\vec{F}_n$, dont la résultante est $\vec{F}_R$, le travail effectué par ces forces est égal au travail de la résultante :

$$dW = dW_1 + dW_2 + dW_3 + ... + dW_n$$

$$dW = \vec{F}_1.d\vec{r} + \vec{F}_2.d\vec{r} + \vec{F}_3.d\vec{r} + ... + \vec{F}_n.d\vec{r} \qquad \textbf{(6.9)}$$

$$\boxed{dW = \vec{F}_R.d\vec{r}}$$

Exemple 6.1 :

Calculer le travail nécessaire pour allonger un ressort suspendu verticalement, comme indiqué sur la figure (6.4), de $3cm$ sans aucune accélération, sachant que la constante de raideur est $k = 50N.m^{-1}$.

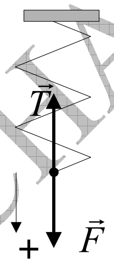

Fig 6.4

Réponse :

$$F = kx \rightarrow dW = \int_0^x kx.dx \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}k.x^2}$$

$$W = 2.25.10^{-2} J$$

Exemple 6.2 :

Une force $F = 2t(N)$ agit sur une particule de masse $m = 2kg$. Calculer le travail effectué par cette force durant la première seconde, sachant que la particule était initialement au repos.

Réponse :

Partant de l'expression du travail : $W = \int F.dx$

Dans ce cas la force est une fonction du temps et non du déplacement. Il est indispensable d'exprimer le déplacement en fonction du temps. Calculons d'abord la vitesse en fonction du temps :

$$\vec{F}=m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt} = 2t \Rightarrow v = \int_0^1 2.\frac{t}{m}.dt \Rightarrow v = \frac{1}{2}t^2 \ (m.s^{-1})$$

Exprimons le déplacement en fonction du temps :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}t^2 dt$$

Revenons à l'expression du travail et remplaçons dx par l'expression à laquelle nous sommes parvenue :

$$W = \int_0^x F.dx = \int_0^1 2t.\frac{1}{2}t^2 dt \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{4}t^4} \qquad \boxed{W=0.25J}$$

Exemple 6.3 :

Une particule est soumise à la force $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$. Calculer le travail effectué par la force $\vec{F}$ quand la particule se déplace du point $(0,0)$ au point $(2,0)$ suivant une droite.

Réponse :

D'après les données nous voyons que la particule se déplace parallèlement à l'axe OX, et par conséquent $y = 0 \Rightarrow dy = 0$.

De là on peut calculer facilement le travail effectué :

$$W = \int (F_x.dx + F_y.dy) = \int (2x.0dx + x^2.0) \Rightarrow \boxed{W = 0}$$

Ceci était prévisible puisque la force est perpendiculaire au vecteur déplacement :

$$\left.\begin{array}{l} F = x^2.\vec{j} \\ d\vec{r} = dx.\vec{i} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{F} \perp d\vec{r} \Rightarrow W = 0$$

2/ ENERGIE CINETIQUE(الطاقة الحركية)

Nous avons vu que $dW = F_T ds$. Partant de cette expression on peut déduire ce qui suit :

$$dW = F_T.ds = m\frac{dv}{dt}ds \Rightarrow dW = m\frac{ds}{dt}dv \Rightarrow \boxed{dW = mvdv} \qquad \textbf{(6.10)}$$

Intégrons l'expression 6.10 du travail élémentaire, et tirons la définition de l'énergie cinétique :

$$W = m\int_A^B vdv \Rightarrow \boxed{W = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2} \qquad \textbf{(6.11)}$$

Où v_a est la vitesse du mobile au point A et v_B sa vitesse au point B.

- **Définition : L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m, de vitesse instantanée $\vec{v}$ est l'expression :**

$$\boxed{E_c = \tfrac{1}{2}mv^2} \qquad \textbf{(6.12)}$$

Et puisque $p = mv$, on peut écrire aussi :

$$\boxed{E_c = \frac{p^2}{2m}} \qquad \textbf{(6.13)}$$

- **Théorème de l'énergie cinétique(نظرية الطاقة الحركية) :**

Enonce : « **La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail de la résultante de toutes les forces qui lui sont appliquées entre ces deux instants** »

$$\boxed{W = \Delta E_c \Leftrightarrow \sum_i W_i = \Delta E_c} \qquad \textbf{(6.14)}$$

Exemple 6.4 :

Quelle est la vitesse initiale v_0 orientée verticalement vers le haut, communiquée à un corps pour qu'il atteigne une hauteur h en dessus de la surface de la terre ? (On néglige tous les frottements).

Réponse :

La seule force qui agit sur le corps est son poids $\vec{P}$:

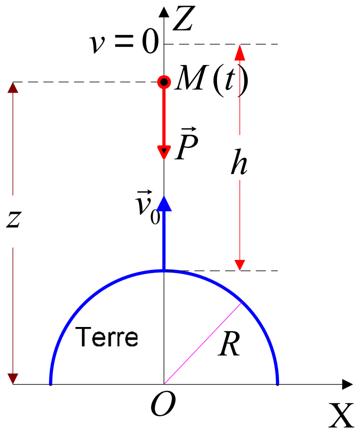

Fig 6.5

A la surface de la terre $P_0 = m.g_0 = G\dfrac{mM_T}{R^2}$

A la distance z du centre de la terre $P = mg = G\dfrac{mM_T}{z^2}$

En divisant les équations membre à membre on obtient

$$\frac{P}{P_0}=\frac{g}{g_0}=\frac{R^2}{z^2}\Rightarrow g=g_0\frac{R^2}{z^2}\quad ;\ \vec{g}=-g.\vec{k}$$

On applique le théorème de l'énergie cinétique : $W=\Delta E_c$

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}=\int_R^{R+h}\vec{P}.d\vec{z}=\int_R^{R+h}m\vec{g}.d\vec{z}$$

Le corps atteint sa hauteur maximale quand $v=0$, d'où :

$$0-\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}=m\int_R^{R+h}-g_0\frac{R^2}{z^2}.dz=-g_0.R^2\left[-\frac{1}{z}\right]_R^{R+h}$$

$$v_0=g_0.R^2\left[-\frac{1}{z}\right]_R^{R+h}\Rightarrow \boxed{v_0=\sqrt{\frac{2g_0R.h}{R+h}}}$$

3/ LES FORCES CONSERVATIVES OU DERIVANT D'UN POTENTIEL

(القوى المحافظة أو القوى المشتقة من كمون)

- **Définition** : On dit d'une force qu'elle est conservative (ou conservatrice), ou dérivant d'un potentiel, si son travail est indépendant du chemin suivi, quelque soit le déplacement probable entre le point de départ et le point d'arrivée.
  - Si la trajectoire C est fermée, alors :

$$\forall C\ ,\quad \boxed{W=\oint_C \vec{F}.d\vec{r}=0 \Leftrightarrow W=0} \qquad \textbf{(6.15)}$$

Exemple du poids : Dans un système de coordonnées cartésiennes, où OZ est la verticale orientée vers le haut, on a :

$$\vec{P}=\vec{F}=-mg\vec{k} \qquad \textbf{(6.16)}$$

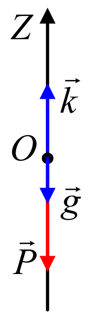

Fig 6.6

En utilisant l'expression du déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes,

on écrit : $d\vec{r}=dx.\vec{i}+dy.\vec{j}+dz.\vec{k}$

On peut en déduire : $dW=\vec{F}.d\vec{r}=-mgdz$. En intégrant cette dernière expression, on se rend compte que le travail pour un déplacement entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de leurs altitudes :

$$W = -\int_{z_1}^{z_2} mgdz \Rightarrow W = -mg(z_2 - z_1) \Rightarrow \boxed{W = mg(z_1 - z_2)}$$

Si les deux points sont situés dans le même plan, le travail effectué par le poids est nul, ce qui prouve que le poids est une force conservative. $z_1 = z_2 \Rightarrow W = 0$

Exemple 6.5 :

La force $\vec{F} = (x^2 - y^2).\vec{i} + 3xy.\vec{j}$ peut aller du point $A(0,0)$ au point $B(2,4)$ suivant chacun des deux chemins $y = 2x$ et $y = x^2$. Cette force est-elle conservatrice ?

Réponse :

Suivant le premier chemin $y = 2x$:

$$y = 2x \Rightarrow \vec{F} = -3x^2.\vec{i} + 6x^2.\vec{j}$$

$$dy = 2dx\ ;\ d\vec{r} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} \Rightarrow d\vec{r} = dx.\vec{i} + 2dx.\vec{j}$$

$$W = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int (F_x.dx + F_y.dy) = \int (-3x^2.dx + 12x^2)dx$$

$$W = \int_0^2 9x^2 dx = 3x^3\Big|_0^2\ ;\quad \boxed{W = 24J}$$

Suivant le deuxième chemin $y = x^2$:

$$y = x^2 \Rightarrow \vec{F} = (x^2 - x^4).\vec{i} + 3x^3.\vec{j}$$

$$dy = 2xdx\ ;\ d\vec{r} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} \Rightarrow d\vec{r} = dx.\vec{i} + 2xdx.\vec{j}$$

$$W = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int (F_x.dx + F_y).dy = \int \left[(x^2 - x^4)dx + 6x^4 dx\right]$$

$$W = \int_0^2 (x^2 + 5x^4)dx = x^5 + \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 \Rightarrow \boxed{W = 34.6J}$$

Les deux travaux ne sont pas égaux, donc la force dans ce cas n'est pas conservatrice.

4/ ENERGIE POTENTIELLE (الطاقة الكامنة)

- Définition : L'énergie potentielle est une fonction de coordonnées, telle que l'intégration entre ses deux valeurs prises au départ et à l'arrivée soit égale au travail fourni à la particule pour la déplacer de sa position initiale à sa position finale.
- Si la force $\vec{F}$ est une force dérivant d'un potentiel, alors :

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = E_{p_A} - E_{p_B}} \qquad \textbf{(6.17)}$$

L'énergie potentielle est toujours rapportée à un référentiel pris comme origine pour la calculer ($E_p = 0$). La fonction de l'énergie potentielle E_p est déterminée à une constante près.

❖ Relation entre les différentielles du travail et de l'énergie potentielle
(العلاقة بين تفاضلي العمل و الطاقة الكامنة)

En considérant la fonction $E_p(z) = mgz$, sa différentielle est :

$$dE_p(z) = E_p'(z).dz \Rightarrow dE_p(z) = mgdz$$

Dans l'exemple de calcul du travail, on a trouvé $dW = -mgdz$. Par identification des deux expressions $dE_p(z)$ et dW, on arrive au résultat : La différentielle de l'énergie potentielle est égale et de sens opposé à la différentielle du travail

$$\boxed{dW = -dE_p(z) \quad \Leftrightarrow \quad dE_p(z) = -dW} \qquad \textbf{(6.18)}$$

❖ Energie potentielle de quelques champs de force (الطاقة الكامنة لبعض حقول القوة)

▪ Particule dans le champ de pesanteur terrestre uniforme
(جسيمة في الحقل المنتظم للجاذبية الأرضية)

Si z est la hauteur, définie à partir de la surface de la terre, prise comme origine de l'énergie potentielle, alors l'énergie potentielle de la particule par rapport à la surface de la terre est :

$$dE_p = -dW \Rightarrow \boxed{E_p = mgz} \qquad \textbf{(6.19)}$$

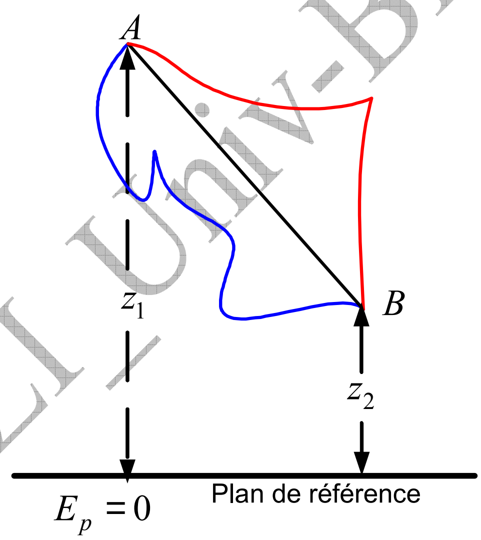

Fig 6.7

Dans le cas général, si la particule se déplace entre deux plans, l'énergie potentielle, et quelque soit la trajectoire suivi, est donnée par la formule :

$$E_p = mg(z_1 - z_2) \quad \left| \begin{array}{l} z_1 > z_2 \Rightarrow E_p > 0 \\ z_1 < z_2 \Rightarrow E_p < 0 \end{array} \right.$$

Plus précisément, l'énergie potentielle calculée représente toujours la variation de sa valeur entre deux positons données.

▪ Particule soumise à une force élastique (جسيمة خاضعة لقوة مرنة)

Nous allons calculer l'énergie potentielle d'un système composé d'une particule accrochée à un ressort, suspendu verticalement, de constante de raideur k , sa longueur à vide étant l_0 . Sa longueur lorsqu'il est chargé de la particule est l , d'où :

$$dE_p = -dW \quad ; \quad E_p = -\int_0^x -kxdx \Rightarrow \boxed{E_p = \tfrac{1}{2}k.x^2 = \tfrac{1}{2}k(l-l_0)^2} \qquad \textbf{(6.20)}$$

- **Particule dans un champ électrostatique** (جسيمة في حقل كهروساكن)

On étudie dans le cours de l'électromagnétisme que le champ électrostatique $\vec{E}$, produit par une charge Q au repos et se trouvant à l'origine O des coordonnées $(\overrightarrow{OM} = r.\vec{u}_r)$, est défini par la formule :

$$\boxed{\vec{E}_{(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q}{r^2}.\vec{u}_r} \qquad \textbf{(6.21)}$$

Une charge q située dans ce champ est soumise à une force électrostatique :

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q.q}{r^2}.\vec{u}$$

Il est facile de vérifier que la force électrostatique dérive de l'énergie potentielle d'expression :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q.q}{r}} \qquad \textbf{(6.22)}$$

Dans le cas général, si q est une charge située en un point (M) dans un champ électrostatique et où $V(M)$ est le potentiel électrostatique, l'énergie potentielle est la fonction $E_p(M) = E_p(x,y,z)$ donnée sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} E_p &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q.q}{r} \\ V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q}{r} \end{aligned} \right| \Rightarrow \boxed{E_p = q.V} \qquad \textbf{(6.23)}$$

- **Particule dans un champ d'un point de masse** M (جسيمة في حقل نقطة كتلتها M)

Si $\vec{g} = -g\vec{k}$, et par comparaison avec le champ électrostatique, on arrive à l'expression de l'énergie potentielle de la particule située dans le champ uniforme de pesanteur au voisinage de la terre :

$$\left. \begin{aligned} &Q \to M \\ &q \to m \\ &\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to -G \end{aligned} \right| \Rightarrow \boxed{E_p = -G\frac{mM}{r}} \qquad \textbf{(6.24)}$$

Toujours par comparaison avec le champ électrostatique, on peut écrire l'expression 6.24 sous la forme :

$$\boxed{E_p = mV} \qquad \textbf{(6.25)}$$

$$\boxed{V=-G\frac{M}{r}} \qquad \textbf{(6.26)}$$

V : désigne ici le **potentiel de l'attraction** au point où se trouve la particule m .

5/ EXPRESSION DU CHAMP DE FORCE CONSERVATIVE A PARTIR DE L'ENERGIE POTENTIELLE DONT IL DERIVE

(عبارة حقل القوة المحافظة انطلاقا من الطاقة الكامنة التي تشتق منها)

Nous avons explicité dans le paragraphe relatif au travail que l'expression $F.\cos\theta$ est la composante de la force suivant la direction du déplacement ds ; partant de là, si nous connaissons l'expression $E_p(x,y,z)$, nous pouvons obtenir alors une composante $\vec{F}$ suivant n'importe quelle direction et ce en calculant la dérivée $-dE_p/ds$ qui s'appelle la *dérivée directionnelle* de la fonction E_p .

Suite à cela, nous pouvons écrire :

$$\left.\begin{array}{l} dW=-dE_p \\ dW=\vec{F}.d\vec{r} \\ d\vec{r}=dx.\vec{i}+dy.\vec{j}+dz.\vec{k} \\ \vec{F}=\vec{F}_x+\vec{F}+\vec{F}_z \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{dE_p=-(F_x.dx+F_y.dy+F_z.dz)} \qquad \textbf{(6.27)}$$

Sachant que $E_p(x,y,z)$ est une fonction à trois variables, sa différentielle s'écrit :

$$\boxed{dE_p=\frac{\partial E_p}{\partial x}dx+\frac{\partial E_p}{\partial y}dy+\frac{\partial E_p}{\partial z}dz} \qquad \textbf{(6.28)}$$

Par identification des deux expressions 6.27 et 6.28 on obtient les coordonnées cartésiennes de la force qui est fonction de $E_p(x,y,z)$:

$$\boxed{F_x=-\frac{\partial E_p}{\partial x}\ ;\ F_y=-\frac{\partial E_p}{\partial y}\ ;\ F_z=-\frac{\partial E_p}{\partial z}} \qquad \textbf{(6.29)}$$

Comme on peut écrire l'expression simplifiée :

$$\boxed{\vec{F}=-\overrightarrow{grad}E_p=-\vec{\nabla}E_p} \qquad \textbf{(6.30)}$$

- **Comment démontrer mathématiquement qu'une force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel donné ?**

Puisque l'expression 6.30 est vérifiée dans le cas des forces conservatives, nous pouvons montrer que le rotationnel du gradient du potentiel E_p est nul , ce qui implique que le rotationnel de la force $\vec{F}$ est nul :

$$\boxed{\vec{F}=-\overrightarrow{grad}E_p \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F}=\overrightarrow{rot}(-\overrightarrow{grad}E_p)=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F}=\vec{0}} \qquad \textbf{(6.31)}$$

Le calcul conduit à :

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}=(\frac{\partial F_y}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial y})\vec{i}-(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial F_x}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial x})\vec{k}=\vec{0}$$

Afin de prouver que la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel il suffit de vérifier les équations suivantes :

$$\boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}\;;\;\frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x}\;;\;\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial z}} \qquad \textbf{(6.32)}$$

Exemple 6.6 : Soit le potentiel $E_p = 2x^2 - xy + yz$

Trouver l'expression de la force dans le système des coordonnées cartésiennes. La force dérive-t-elle d'un potentiel ?

Réponse :

Cherchons les composantes de la force en exploitant l'expression 6.29 :

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -4x + y \quad ; \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = x - z \quad ; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = -y$$

D'où l'expression vectorielle de la force : $\vec{F} = (-4x+y).\vec{i}+(x-z).\vec{j}-y.\vec{k}$

Vérifions maintenant que $\vec{F}$ dérive du potentiel $E_p(x,y,z)$ soit $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow +1 = +1; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \Rightarrow 0 = 0; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \Rightarrow -1 = -1$$

Donc la force dérive bien d'un potentiel.

Si le mouvement est plan, et en utilisant les coordonnées polaires et θ, le déplacement suivant le vecteur du rayon polaire $\vec{}$ est égal à d et le déplacement normale est égal à $rd\theta$. (Figure 6.8)

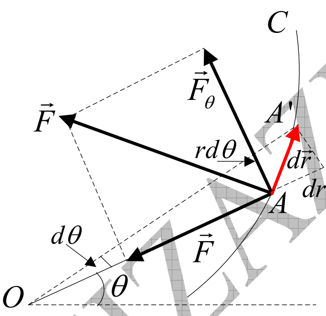

Fig 6.8

$$d\vec{r} = dr.\vec{u}_r + rd\theta.\vec{u}_\theta$$

Les composantes radiale et transversale de la force sont:

$$\boxed{F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}\;;\;F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}} \qquad (33.6)$$

Pour clore ce paragraphe il est intéressant de donner, sans démonstration, les composantes de la forces dans différents systèmes de coordonnées :

- **En coordonnées cylindriques** (r,θ,z), tel que le déplacement élémentaire est :

$$d\vec{r} = dr.\vec{u}_r + rd\theta.\vec{u}_\theta + dz.\vec{k}$$

$$\boxed{F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}; F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}; F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}} \qquad \textbf{(6.34)}$$

- **En coordonnées sphériques** (r,θ,φ), tel que le déplacement élémentaire est :

$$d\vec{r} = dr.\vec{u}_r + r\sin\varphi d\theta.\vec{u}_\theta + rd\varphi.\vec{u}_\varphi$$

$$\boxed{F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}; F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}; F_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_p}{\partial \varphi};} \quad \textbf{(6.35)}$$

6/ L'énergie mécanique (الطاقة الميكانيكية)

❖ **Définition :** L'énergie mécanique d'un point matériel à un instant donné est égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$\boxed{E_M = E_c + E_p \Leftrightarrow E_M = E_c + E_p(x,y,z)} \quad \textbf{(6.36)}$$

❖ **Deux exemples :**

- L'énergie potentielle d'un système composé d'un ressort de constante de raideur k, dont l'allongement est $l - l_0 = x$ au temps t, sous l'action d'une particule de masse m et de vitesse instantanée v, est :

$$E_M = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

- Dans le cas de la chute libre : $E_M = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgz$

❖ **Principe de la conservation de l'énergie mécanique (مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية) :**

Dans le champ de force conservatrice (ou dérivant d'un potentiel) l'énergie mécanique se conserve au cours du temps.

$$\boxed{E_M = E_c + E_p = \mathrm{C}^{te}} \quad \textbf{(6.37)}$$

Cela veut dire que la variation de l'énergie mécanique est nulle $\Delta E_M = 0$, cela veut dire aussi que la variation de l'énergie cinétique est égale à la variation de l'énergie potentielle : $\Delta E_c = \Delta E_p$. En d'autres termes, Si le système est isolé mécaniquement l'énergie mécanique est conservée.

Dans le cas de la présence de frottements, la variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces de frottement $\sum W_{frott}$:

$$\boxed{\Delta E_M = \sum W_{frott}} \quad \textbf{(6.38)}$$

- **Cas d'une particule dans un champ de force élastique** (حالة جسيمة في حقل قوة مرنة) :

La figure 6.9 représente un système mécanique isolée composé d'un corps de masse m associé à un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0.

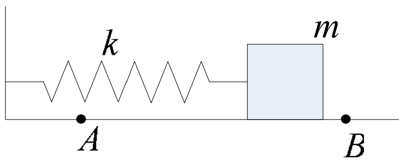

Fig 6.9

A chaque instant le corps est soumis à une force de rappel $\vec{F} = -kx.\vec{u}$ et $x = l - l_0$, où l est la longueur du ressort à un instant donné au cours du déplacement du corps.

Quand le corps se déplace du point A au point B, on peut écrire :

$$\Delta E_c = E_{c,B} - E_{c,A} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_A^B F_x.dx = -k\int_A^B x.dx$$

$$\boxed{\Delta E_c = \frac{1}{2}k.x_A^2 - \frac{1}{2}k.x_B^2 = -\Delta E_p}$$

(6.39)

D'après le principe de la conservation de l'énergie mécanique on écrit :

$$E_{M,A} = E_{M,B} \Leftrightarrow \frac{1}{2}k.x_A{}^2 + \frac{1}{2}m.v_A{}^2 = \frac{1}{2}k.x_B{}^2 + \frac{1}{2}m.v_B{}^2 = C^{te}$$

On comprime le ressort d'une longueur $(x = -a)$ à partir de sa position d'équilibre $(x = 0)$ par l'intermédiaire du corps, puis on abandonne le système à lui-même sans vitesse initiale. Le corps est animé alors d'un mouvement rectiligne sinusoïdal entre deux positions extrêmes $x = -a$ et $x = +a$.

La figure 6.10 représente les variations de l'énergie potentielle en fonction de l'**allongement** $(x = l - l_0)$ du ressort .Nous avons représenté sur la même figure en trait discontinu les variations de l'énergie cinétique.

Nous avons à chaque instant :

$$\mathrm{E_c} + E_p = \frac{1}{2}\mathrm{ka}^2 = C^{te} \qquad \textbf{(6.40)}$$

Ce que perd le système sous forme d'énergie potentielle il le gagne sous forme d'énergie cinétique et vice versa.

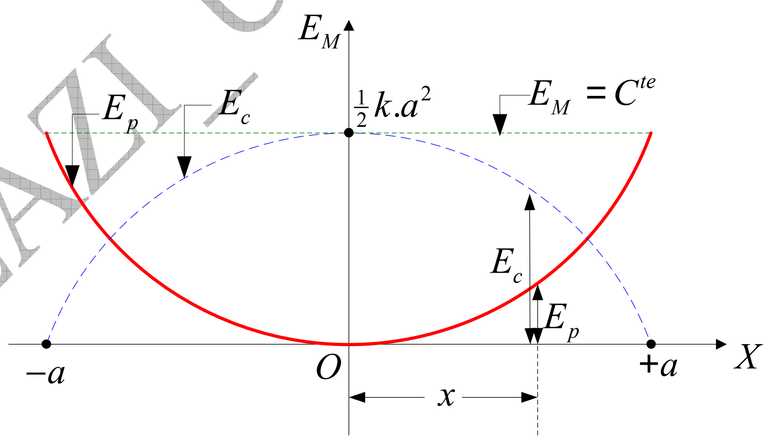

Fig 6.10

Exemple 6.7 : Une petite boule de masse $m = 1g$ est abandonnée avec une vitesse initiale $v_A = 0$ d'un point A situé à l'intérieur d'une sphère creuse de rayon $R = 1,25m$. Elle arrive au point B avec une vitesse $v'_B = 4ms^{-1}$. Figure 6.11

Prouver que cette boule est soumise à une force de frottement et estimer le travail de cette force. On prend $g = 10ms^{-2}$.

Réponse : On applique le principe de l'énergie mécanique :

- **En absence de frottement :** $\Delta E_M = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 - mgR = 0 \Rightarrow v_B = 5ms^{-1}$

Remarquons que le module théorique de la vitesse est plus grand que son module expérimental. Cela prouve l'existence de frottements.

- **En présence de frottement :** $\Delta E_M = \sum W_{frott}$ donc :

$$\Delta E_M = \sum W_{frott} = \frac{1}{2}mv_B'^2 - mgR \Rightarrow \boxed{\sum W_{frott} = -4.5\times 10^{-3} J < 0}$$

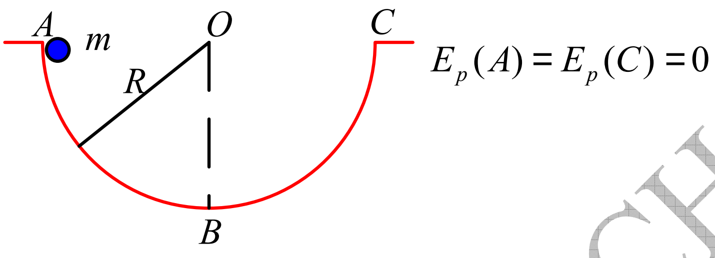

Fig 6.11

❖ **Oscillateur harmonique simple**(الهزاز التوافقي البسيط) :

- **Définition :** L'oscillateur harmonique simple est tout système qui effectue un mouvement périodique autour d'une position d'équilibre stable et n'étant soumis à aucun amortissement (comme par exemple les frottements) ni aucune excitation.

Le mouvement est régi par l'équation différentielle linéaire : $\ddot{x} + \omega_0^2 . x = 0$

Nous connaissons la solution générale d'une telle équation qui est de la forme :

$$x = a\cos(\omega t + \varphi)$$

- **Energie de l'oscillateur** (طاقة الهزاز) :

La figure 6.12(a) représente un pendule simple (le fil est inextensible de longueur l et de masse m négligeable). La masse est soumise aux deux forces, son poids $\vec{P}$ et la tension $\vec{T}$ du fil.

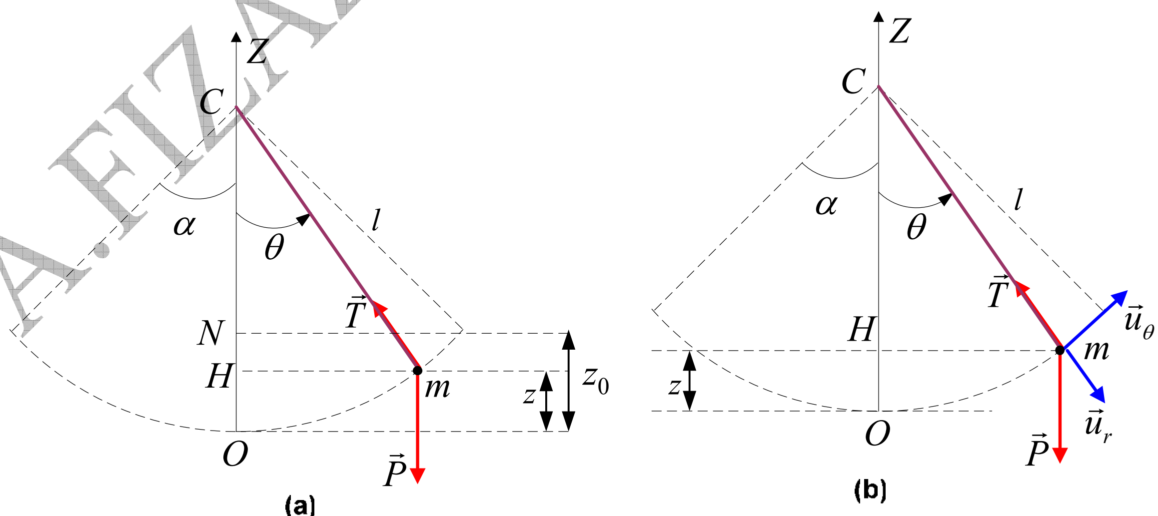

Fig 6.12

Le poids dérive d'un potentiel, et le travail de la tension $\vec{T}$ est nul puisque sa direction est perpendiculaire à la trajectoire à tout instant. On prend comme origine pour l'énergie potentielle le plan horizontal contenant le point O. D'après la figure 6.12 (b), pour une position correspondant à l'angle θ on a :

$$E_p = mgz = mg(OH) = mg(CO - CH) = mgl(1-\cos\theta)$$

L'expression de la vitesse circulaire tangente à la trajectoire est : $\vec{v} = l\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$

On peut calculer maintenant l'énergie mécanique du pendule (appelée aussi la première intégration de l'énergie) :

$$\boxed{E_M = E_p + E_c = mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = C^{te}} \qquad \textbf{(6.41)}$$

Divisons l'équation (6.41) par ml^2 et posant $\omega_0^{\ 2} = \frac{g}{l}$, l'expression de l'énergie mécanique s'écrit alors sous la forme :

$$\boxed{\dot{\theta}^2 + 2\omega_0^{\ 2}(1-\cos\theta) = K} \qquad \textbf{(6.42)}$$

Où $K = \dfrac{2.C^{te}}{ml^2}$ est une constante déterminée par les conditions initiales. Si on prend par exemple $\dot{\theta}_0 = 0$ pour $\theta_0 = \alpha$, dans ce cas et d'après la figure 6.12 (a), on a :

$$\Delta E_M = 0 \Rightarrow -\Delta E_p = \Delta E_c \Rightarrow -mg(z - z_0) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$-mgl(\cos\theta - \cos\alpha) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Pour de pareilles conditions l'équation 6.42 devient :

$$\boxed{\dot{\theta}^2 + 2\omega_0^{\ 2}(\cos\alpha - \cos\theta) = 0} \qquad \textbf{(6.43)}$$

▪ **Equation du mouvement** (معادلة الحركة) :

L'équation du mouvement est une équation différentielle de deuxième ordre. On l'obtient en dérivant, par rapport au temps, l'équation précédente 6.43 :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^{\ 2}\sin\theta = 0} \qquad \textbf{(6.44)}$$

Pour des oscillations de faible amplitude ($\sin\theta \simeq \theta_{(rad)} \Leftarrow 10° \geq \theta$), l'équation s'écrit :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^{\ 2}\theta = 0} \qquad \textbf{(6.45)}$$

La solution générale de cette équation est :

$$\boxed{\theta = \alpha\cos(\omega t + \varphi)} \qquad \textbf{(6.46)}$$

Cela nous indique que le mouvement est un mouvement de rotation sinusoïdal de pulsation ω_0, et de période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \qquad \textbf{(6.47)}$$

On peut arriver à l'équation 6.44 en partant de la loi de mouvement $\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$, et en projetant cette dernière expression sur la direction radiale :

$$-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta = 0$$

De cet exemple nous tirons la remarque générale suivante :
Lorsque l'on déduit une équation différentielle de premier ordre (D), et que cette dernière n'est pas indépendante de l'équation différentielle de second ordre laquelle exprime la loi de mouvement : nous dirons dans ce cas que (E) est la première intégrale des équations (D) (ça veut dire que (D) est la première dérivée de l'équation (E)).

Dans le cas que nous avons étudié, l'équation 6.43 est la première intégrale de l'équation 6.44.

7/ COLLISION DE PARTICULES (تصادم الجسيمات)

❖ Conservation de la quantité de mouvement :

Nous dirons qu'un système a subit un choc si les vitesses de ses éléments ont eu des variations considérables entre deux instants, avant et après le choc, de telle façon qu'il ait un échange de quantité de mouvement et d'énergie entre les différents éléments.

Soient $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ les quantités de mouvement de deux corps avant la collision, et $\vec{p}_1^{'}$ et $\vec{p}_2^{'}$ les quantités de mouvement après le choc. Le système est supposé isolé. Les effets mutuels échangés entre les deux particules de masses m_1 et m_2 se produisent dans une région très limitée de l'espace et très petite, C'est pour cela que nous disons qu'il s'agit d'un choc ponctuel.

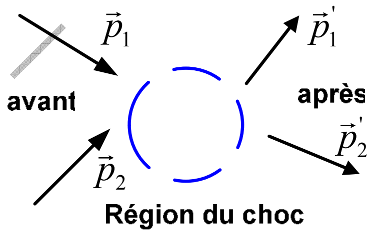

Fig 6.13

Puisque le système est isolé, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont conservées. Donc, on peut écrire :

$$\boxed{\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1^{'}+\vec{p}_2^{'}=Cte \Rightarrow \Delta\vec{p}=\vec{0}} \qquad \textbf{(6.48)}$$

$$\boxed{m_1.\vec{v}_1+m_2.\vec{v}_2=m_1.\vec{v}_1^{'}+m_2.\vec{v}_2^{'}} \qquad \textbf{(6.49)}$$

Notez bien le caractère vectoriel des deux équations.

- **Le choc élastique :**

Le choc entre deux particules est élastique si l'énergie cinétique totale E_c du système est conservée au cours du choc. Les particules ne s'unissent pas après le choc.

Si on note l'énergie cinétique avant le choc par E_c et par $E_c^{'}$ après le choc , et en se rappelant de l'expression $E_c = \dfrac{p^2}{2m}$ on peut écrire :

$$\boxed{E_c = E_c^{'} \Leftrightarrow \Delta E_c = 0} \qquad (6.50)$$

$$\boxed{\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1^{'2}}{2m_1} + \frac{p_2^{'2}}{2m_2}} \qquad (6.51)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}m_1.v_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2.v_2^{'2}} \qquad (6.52)$$

Notez bien le caractère scalaire des trois dernières équations. Les équations 6.51 et 6.52 suffisent pour résoudre n'importe quel problème relatif aux chocs entre particules.

Exemple 6.8 :

Un projectile de masse $800g$ se déplace sur une droite horizontal à la vitesse de $1ms^{-1}$ pour atteindre une cible au repos de masse $800g$. La cible touchée se met en mouvement suivant une direction faisant un angle de $-30°$ avec l'horizontale.

a/ Déterminer la direction et le module de la vitesse du projectile après le choc.

b/ Déterminer l'intensité de la vitesse de la cible après le choc.

Réponse :

a/ Détermination de la direction du projectile et calcul de son module : Voir figure 6.14.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{p_1^2}{2m_1} = \dfrac{p_1^{'2}}{2m_1} + \dfrac{p^2}{2m_2} \\ m_1 = m_2 = m \end{array}\right| \Rightarrow p_1^2 = p_2^{'2} + p^2$$

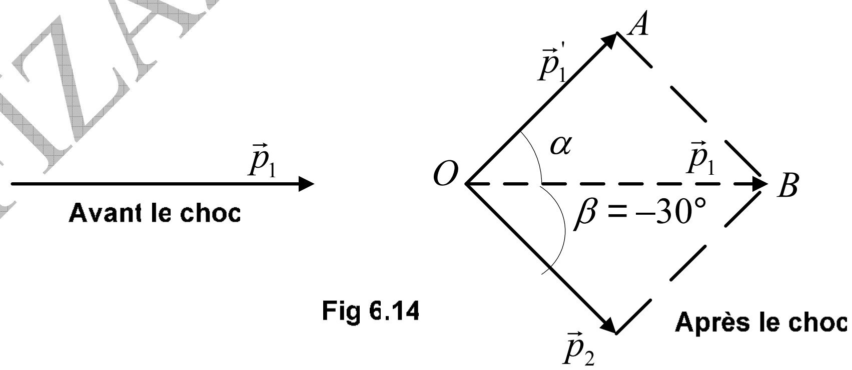

Fig 6.14

Le triangle OAB est rectangle, ce qui implique que le quadrilatère est un rectangle, donc : $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \boxed{\alpha = 60°}$

$$\cos\alpha = \frac{p_1^{'}}{p_1} = \frac{v_1^{'}}{v_1} \Rightarrow \boxed{v_1^{'} = 0.50ms^{-1}}$$

b/ Calcul du module de la vitesse:

$$\cos(-30°) = \frac{mv}{mv_1} = \frac{v}{v_1} \Rightarrow \boxed{v = 0.87ms^{-1}}$$

▪ **Le choc mou** (الصدام اللين)

Le choc entre deux particules séparées et dit mou , si elles s'unissent après le choc pour former un seul corps. Les deux particules auront la même vitesse après le choc.

Dans ce cas : Si $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ sont les quantités de mouvement des deux particules séparées avant le choc, et $\vec{p}^{'}$ la quantité de mouvement des deux particules unies après le choc, nous pouvons écrire alors :

$$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}^{'} = Cte \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{0}} \quad \textbf{(6.53)}$$

$$\boxed{\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p^{'2}}{2(m_1 + m_2)}} \quad \textbf{(6.54)}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^{'2}} \quad \textbf{(6.55)}$$

Exemple 6.8 :

Une particule de masse $5kg$ se déplaçant à la vitesse de $20ms^{-1}$ entre en collision perpendiculairement avec une autre particule de masse $6kg$ qui se déplaçait à la vitesse de $15ms^{-1}$. En considérant le choc mou:

a/ Quelle est la quantité de mouvement du système ?

b/ Calculer la vitesse des particules après le choc.

Réponse :

a/ $134.5kg.m.s^{-1}$ b/ $12.23m.s^{-1}$

8/ DISCUSSION DES COURBES D'ENERGIE POTENTIELLE

(مناقشة منحنيات الطاقة الكامنة)

Nous avons représenté sur la figure 6.15 une courbe qualitative dans le cas d'un mouvement unidimensionnel (elle s'effectue suivant une droite).

Ecrivons l'expression de la force sous la forme :

$$F = -\frac{dE_p}{dx}$$

Or $\frac{dE_p}{dx}$ représente la pente de la courbe $E_p(x)$. La pente est positive lorsque la courbe est croissante, dirigée vers le haut ; elle est négative si la courbe est décroissante et dirigée vers le bas. Donc, la force $\vec{F}$ (dont le signe est opposé à celui de la pente) est négative, ou orientée vers la gauche, lorsque l'énergie potentielle est croissante ; elle est positive et dirigée vers la droite lorsque l'énergie potentielle est décroissante.

Nous avons schématisé et précisé tout ceci sur la figure 6.15 par des flèches horizontales et par des espaces en dessous du graphe.

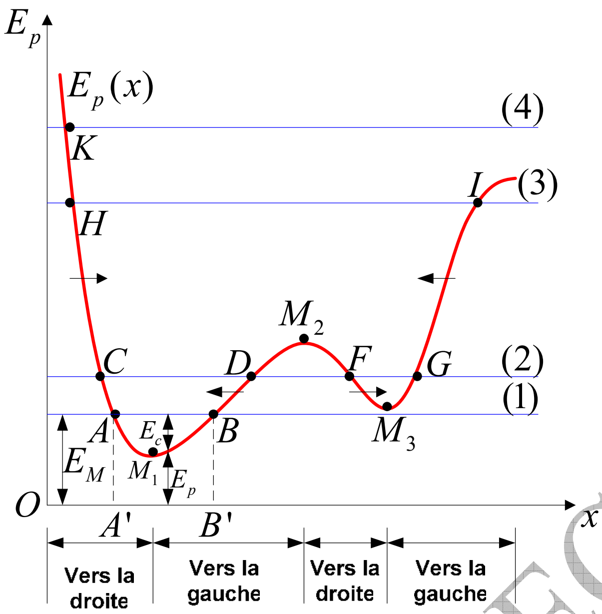

Fig 6.15: Relation entre le mouvement suivant une ligne droite et l'énergie potentielle

Le mouvement est possible si la condition $E_c = E_M - E_p > 0$ est satisfaite. Sur le graphe les droites horizontales représentent l'énergie potentielle pour différents cas.

Premier cas : L'énergie mécanique correspondant à la droite (1) qui coupe la courbe $E_p(x)$ en deux points A et B. La particule vibre entre les deux abscisses x_A et x_B ; mais son mouvement n'est pas permis à droite de B et à gauche de A, sinon $E_c = E_M - E_p < 0$, ce qui est impossible.

Deuxième cas : L'énergie mécanique correspondant à la droite (2) qui coupe la courbe $E_p(x)$ en quatre points C, D, F, G. Le mouvement de la particule est permis dans deux régions : entre les abscisses x_C et x_D, et entre les abscisses x_F et x_G ; or la particule ne peut vibrer que dans l'une des deux régions, mais ne peut pas sauter d'une région à une autre, sinon elle doit transiter par la région DF, ce qui est impossible (parce que dans cette région l'énergie cinétique est négative $E_c = E_M - E_p < 0$). Les deux régions où le mouvement est permis sont séparées par ce que l'on appelle « **barrière de potentiel** ».

Troisième cas : L'énergie mécanique correspondant à la droite (3). Le mouvement est permis entre les points H, I .

Quatrième cas : L'énergie mécanique correspondant à la droite (4). Le mouvement n'est plus vibratoire et la particule se déplace de K vers l'infini.

- **Positions d'équilibre** (مواضع التوازن) :

Pour que $\frac{dE_p}{dx}=0$ et obligatoirement $F=0$, il faut que l'énergie potentielle soit maximale ou minimale, comme aux points M_1 , M_2 , M_3. Ces positions sont les **positions d'équilibre**.

- **Lieu où $E_p(x)$ est minimale :**

L'équilibre est stable si la particule bouge à peine, comme en M_1 , M_3, à gauche ou à droite, une force agit sur elle pour la rappeler à revenir à la position d'équilibre.

- **Lieu où $E_p(x)$ est maximale :**

L'équilibre est instable : si la particule bouge à peine, comme en M_2 une force agit sur elle pour l'éloigner de la position d'équilibre.
- Les points A,B,C,D,F,G,H,I s'appellent points d'arrêt. En ces points la particule s'arrête ou change le sens de son mouvement.
-

9/ FORCES NON CONSERVATIVES (ou forces ne dérivant pas d'un potentiel)

(القوى الغير محافظة (أو الغير مشتقة من كمون)) :

Dans la nature il existe des forces non conservatrices. Les forces de frottement sont un exemple de celles la. Le frottement de glissement s'oppose toujours au déplacement, et son travail dépend du chemin suivi. Même si la trajectoire est fermée, le travail n'est pas nul, et l'équation 6.30 n'est plus valable.

Il en de même pour le frottement dans les fluides qui s'oppose à la vitesse dont il dépend, mais indépendant de la position.

Une particule peut être soumise en même temps à des forces conservatrices et à des forces non conservatrices.

Exemples :

- **Une particule en chute dans un fluide :** Elle est soumise à son poids $\vec{P}$, qui dérive d'un potentiel, et à la force de frottement non conservatrice.
- **Pour un pendule élastique :** La particule est soumise à la force de rappel $\vec{F}=-kx.\vec{i}$ qui est conservatrice. Elle est soumise aussi à une force de frottement de glissement $\vec{F}'=-C\vec{v}$ non conservatrice, sachant que le travail de celle- ci est :

$$W'=\vec{F}'d\vec{r}=-C.\dot{x}.dx \Rightarrow W'=-C.\dot{x}^2.dt<0$$

Le signe négatif s'explique par le fait que les frottements absorbent l'énergie du système, c'est ce qui explique l'amortissement du mouvement.