

12.3.4 NOTE. Un problème remarquable, dont la solution est due à Minkowski, est de déterminer un polytope connaissant les volumes des faces et leur direction; voir pour ceci les excellentes références [LU], [AV] et [PV 1].

12.3.5 LA FORMULE DE STEINER-MINKOWSKI POUR LES POLYTOPES. Soit P un polytope; rappelons que

$$B(P, \lambda) = \{ x \in X : d(x, P) \leq \lambda \} \quad (\lambda \in \mathbf{R}_+).$$

On désire étudier le volume $\mathcal{L}(B(P, \lambda))$ et son comportement en λ . Les deux dessins ci-dessous montrent ceci : lorsque $d = 2$, on voit que $B(P, \lambda)$ comprend trois parties, P lui-même, puis une réunion de rectangles de hauteur λ construits sur les côtés de P et enfin une réunion de secteurs circulaires de rayon λ . La deuxième partie a pour aire

$$\sum_i \lambda \mathcal{L}_{H_i}(\text{Face}_i P) = \lambda \mathfrak{A}(P)$$

par définition de $\mathfrak{A}(P)$; pour évaluer la troisième, on réunit les secteurs circulaires en un même centre par translation et l'on constate qu'ils forment un disque entier, donc l'aire est $\pi\lambda^2$ (cf. 9.12.4.4). Tout ceci à des ensembles de mesures près, et donc $\mathcal{L}(B(P, \lambda)) = \mathcal{L}(P) + \mathfrak{A}(P)\lambda + \pi\lambda^2$.

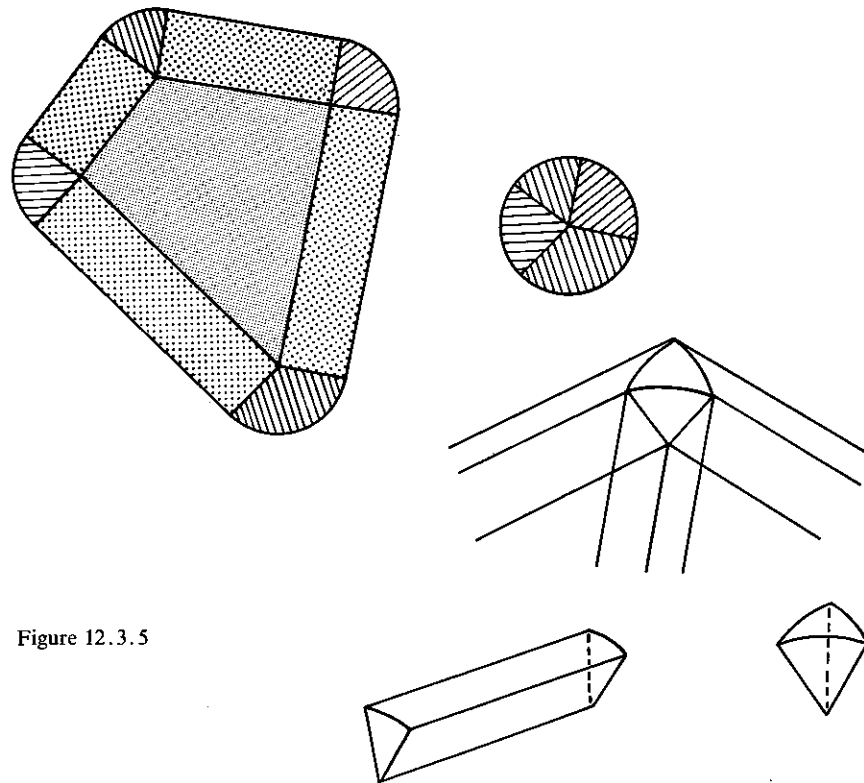


Figure 12.3.5

Si $d = 3$, on voit qu'il y aura quatre parties constituant naturellement $B(P, \lambda)$: toujours P , puis des parallélépipèdes rectangles de hauteur λ construits sur les faces, puis des produits orthogonaux de secteurs circulaires par les arêtes, enfin des morceaux de boules dont la réunion sera la boule tout entière. La troisième partie fournit des termes en λ^2 . La proposition ci-dessous et sa démonstration sont la mise en forme de l'heuristique précédente.

12.3.6 PROPOSITION. A tout polytope de dimension d sont attachés des scalaires $\mathcal{L}_i(P) \in \mathbf{R}_+^*$ ($i = 0, 1, \dots, d$) tels que

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}_+^* : \mathcal{L}(B(P, \lambda)) = \sum_{i=0}^d \mathcal{L}_i(P) \lambda^i.$$

En outre :

$$\mathcal{L}_0(P) = \mathcal{L}(P), \quad \mathcal{L}_1(P) = \mathfrak{A}(P), \quad \mathcal{L}_d(P) = \beta(d) \quad \forall P.$$

12.3.6.1 Soient $y \in P$ et (cf. 11.1.7.1) l'unique $x \in P$ tels que

$$d(x, y) = d(y, P).$$

Il résulte de 9.2.2 et de la démonstration de 11.6.2 que, pour tout $k \geq 0$, on a $d(x + k\vec{xy}, P) = kd(x, y)$. Si CN_x est le cône normal en $x \in \text{Fr } P$, posons $S_x = CN_x \cap S(0, 1)$, partie de la sphère unité de \vec{X} (cf. 11.6.2); ce qui précède montre précisément que

$$B(P, \lambda) \setminus \overset{\circ}{P} = \bigcup_{x \in \text{Fr } P} \bigcup_{\xi \in S_x} [x, x + \lambda\xi].$$

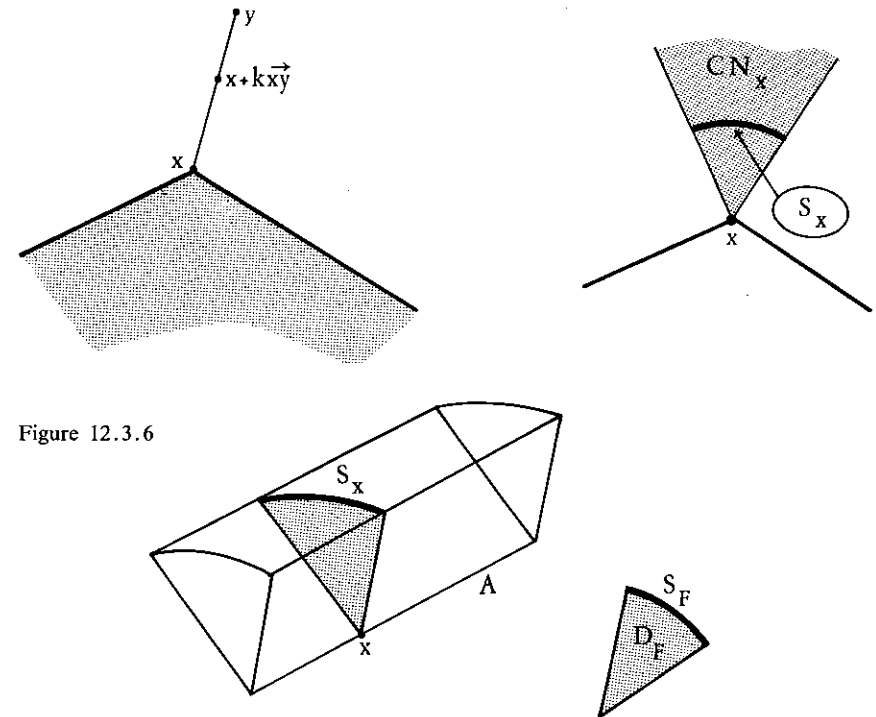


Figure 12.3.6

12.3.6.2 Pour $x \in \text{Fr } P$, notons ω_x son ordre et posons

$$\Omega_i = \{x \in \text{Fr } P : \omega(x) = i\} \quad (i = 0, 1, \dots, d-1);$$

c'est-à-dire que Ω_i est la réunion des intérieurs relatifs des i -faces de P : cf. 12.1.9. On pose, pour $i = 0, 1, \dots, d-1$:

$$B_i(\lambda) = \bigcup_{x \in \Omega_i} \bigcup_{\xi \in S_x} [x, x + \lambda\xi], \quad \text{d'où } B(P, \lambda) \setminus \overset{\circ}{P} = \bigcup_{i=0}^{d-1} B_i(\lambda),$$

obtenant ainsi une partition de $B(P, \lambda) \setminus \overset{\circ}{P}$, donc

$$\mathfrak{L}(B(P, \lambda)) = \mathfrak{L}(P) + \sum_{i=0}^{d-1} \mathfrak{L}(B_i(\lambda)).$$

12.3.6.3 La remarque essentielle est maintenant que, lorsque x parcourt l'intérieur relatif F^\bullet d'une face donnée F , le cône CN_x reste fixe, donc aussi S_x ; on pourra donc le noter S_F et poser $D_F = \bigcup_{\xi \in S_x} [0, \xi]$. Ce qui

précède provient de ce que CN_x est déterminé par les hyperplans des faces contenant x , or ses faces ne changent pas lorsque x parcourt F^\bullet .

Si F est une i -face donnée, on aura l'égalité ci-dessous, où il s'agit en fait d'une isométrie avec le produit direct orthogonal de droite :

$$\bigcup_{x \in F^\bullet} \bigcup_{\xi \in S_x} [x, x + \lambda\xi] = F^\bullet \times ([0, \lambda] S_F).$$

En appliquant les deux exemples de 9.12.3 on a donc

$$\mathfrak{L}(F^\bullet \times ([0, \lambda] S_F)) = \mathfrak{L}(F^\bullet) \mathfrak{L}([0, \lambda] S_F) = \mathfrak{L}(F) \mathfrak{L}(D_F) \lambda^{d-i},$$

où les volumes $\mathfrak{L}(F)$, $\mathfrak{L}(D_F)$ s'entendent dans les espaces de dimensions $i, d-i$ où ils vivent.

12.3.6.4 Notons Φ l'ensemble des i -faces de P ; ce qui précède montre que

$$\mathfrak{L}(B_i(\lambda)) = \mathfrak{L}_{d-i}(P) \lambda^{d-i} \quad \text{avec} \quad \mathfrak{L}_{d-i}(P) = \sum_{F \in \Phi_i} \mathfrak{L}(F) \mathfrak{L}(D_F).$$

Pour $i = d-1$ en particulier

$$\mathfrak{L}_1(P) = \sum_{F \in \Phi} \mathfrak{L}(F) = \mathfrak{A}(P) \quad \text{car} \quad D_F = [0, 1];$$

pour $i = 0$, ce qui précède et 11.6.2 montrent que $\bigcup_{x \in \Phi_0} S_x = S$, ou

$$\bigcup_{F \in \Phi_0} D_F = B(0, 1), \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{L}_d(P) = \mathfrak{L}(B(0, 1)) = \beta(d) \quad \text{car } F \text{ est un point et } \mathfrak{L}(F) = 1.$$

Nous aurons besoin en 12.10.6 de la :

12.3.7 PROPOSITION. Si $a \in X$ et $r > 0$ sont donnés, les fonctions $\mathfrak{L}_i(\cdot)$ sont bornées sur l'ensemble des polytopes contenus dans $B(a, r)$.

Fixons un $\lambda > 0$; on aura $B(P, \lambda) \subset B(a, \lambda+r)$ et $\mathfrak{L}(B(P, \lambda)) \leq \beta(d) (r+\lambda)^d$; comme tous les termes de $\mathfrak{L}(B(P, \lambda)) = \sum_i \mathfrak{L}_i(P) \lambda^i \leq \beta(d) (r+\lambda)^d$ sont

positifs, on aura pour tout i : $\mathfrak{L}_i(P) \leq \beta(d) \frac{(r+\lambda)^d}{\lambda^i}$.

12.3.8 REMARQUE. On peut maintenant justifier l'idée de « peinture » introduite en 9.12.7; pour peindre P , on le fera avec une couche uniforme de peinture d'épaisseur très petite λ , il en faudra donc, en négligeant les termes en $\lambda^2, \lambda^3, \dots$, le volume $\mathfrak{L}(B(P, \lambda)) - \mathfrak{L}(P) = \mathfrak{A}(P) \lambda$; donc la quantité de peinture nécessaire sera proportionnelle à l'aire $\mathfrak{A}(P)$. Nous continuerons ceci en 12.10.7.

12.4 Polygones réguliers

Dans cette section et les deux suivantes les X sont des espaces affines euclidiens, d désigne leur dimension. Dans cette section, $d = 2$.

Cette section simple est faite pour préparer la définition des polytopes réguliers de dimension quelconque.

12.4.1 DÉFINITION. Un polygone est dit régulier si tous ses côtés ont même longueur et si tous ses angles sont égaux.

Les deux conditions sont bien nécessaires. D'après 10.5.2, la valeur commune des angles est $\frac{n-2}{n} \pi$, si n est le nombre de côtés.

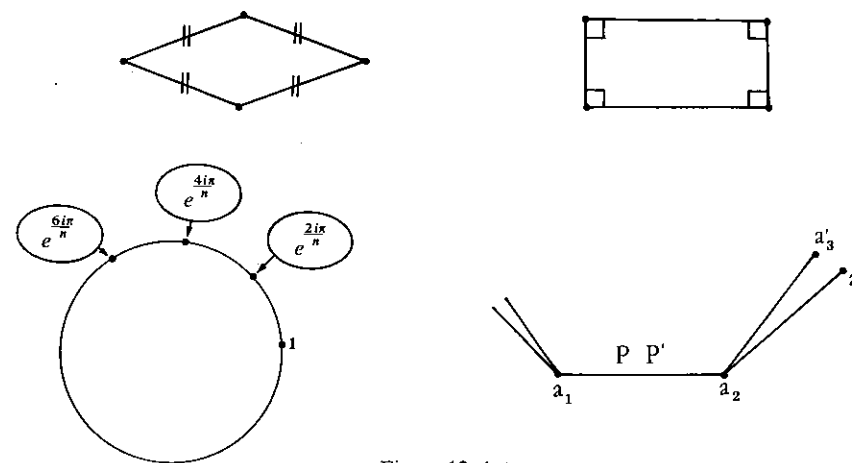


Figure 12.4.1

12.4.2 PROPOSITION. Pour tout entier $n \geq 3$ il existe un polygone régulier à n côtés; deux polygones réguliers ayant le même nombre de côtés sont semblables.

Pour l'existence, prendre $\{e^{2ik\pi/n} : k = 0, 1, \dots, n-1\} \subset \mathbf{C} = \mathbf{R}^2$. Pour l'unité à une similitude près : d'après 9.6.2 on peut supposer que

$$P = \mathfrak{E}(a_i), \quad P' = \mathfrak{E}(a'_i)$$