

12.8.6.5 On a toujours $\sigma' - \alpha' + \varphi' \geq 2$. Rétablissons en effet une à une les arêtes fantômes, ce qui fournit pour $t = 1, \dots, (\alpha - \alpha')$, des cardinaux $\sigma_t, \alpha_t, \varphi_t$ intermédiaires entre σ, α, φ et $\sigma', \alpha', \varphi'$; avec en outre la précaution d'accrocher, à chaque stade, l'arête fantôme nouvelle à un néosommet ou à un sommet déjà rétabli (noter que dans ce rétablissement on peut avoir des arêtes provisoirement à extrémité libre). A chaque stade t , on a toujours $\alpha_{t+1} = \alpha_t + 1$; et : soit $\sigma_{t+1} = \sigma_t$ et alors $\varphi_{t+1} = \varphi_t$ ou $\varphi_t + 1$, soit $\sigma_{t+1} = \sigma_t + 1$ et alors $\varphi_{t+1} = \varphi_t$. La fonction $\sigma_t - \alpha_t + \varphi_t$ est donc non croissante dans tous les cas, or elle vaut 2, d'après 12.7.3, pour $t = \alpha - \alpha'$ ce qui démontre bien 12.8.6.5. Pour une telle formule, on pourra consulter le chapitre 13 de [LU], le § 33 de [ST-RA] et la formule (3) de la page 78 de [AV].

12.8.6.6 On peut maintenant procéder comme dans le premier cas, avec les notions de néoarêtes adjacentes et de changement de signe, de nombre total noté toujours v . Il faut seulement faire attention à ce qu'une néoarête n'appartient plus nécessairement à deux néofaces, mais seulement une ou deux; on remédie à ceci en comptant le nombre de côtés d'une néoface comme celui des néocôtés, augmenté précisément du cardinal des néoarêtes qui bordent deux fois ladite face (voir Fig. 12.8.6.4). Avec cette convention, soit Φ_i l'ensemble des néofaces à i côtés et $\varphi_i = \# \Phi_i$. Alors, avec le lemme de Cauchy appliqué aux σ' néosommets, on a :

$$2\alpha' = \sum_i i\varphi_i, \quad \varphi' = \sum_i \varphi_i, \quad v \geq 4\sigma';$$

et en comptant les changements de signe pour chaque néoface :

$$v \leq 2\varphi_3 + 4\varphi_4 + 4\varphi_5 + 6\varphi_6 + 6\varphi_7 + \dots,$$

d'où, comme en 12.8.6.3 : $4\alpha' - 4\varphi' \geq v \geq 4\sigma'$, contredisant ainsi 12.8.6.5. Notre néoconstruction est donc impossible, i.e. toutes les arêtes sont fantômes, $\varepsilon(A) = 0$, $\delta_A(P) = \delta_{f(A)}(P') \forall A \in \mathcal{E}$ et on gagne avec 12.8.5.1.

Dans toute la fin de ce chapitre X est un espace affine euclidien.

12.9 Approximation des convexes compacts par des polytopes

Au sens de la distance de Hausdorff (cf. 9.11) nous allons approximer les convexes compacts par des polytopes; cela nous sera fondamental pour plusieurs raisons : définir de façon élémentaire le volume des convexes (12.9.3.2), montrer que le volume est une fonction continue sur les convexes et que leur frontière est de mesure 0 (12.9.2.4 et 12.9.3.4), définir l'aire d'un convexe (12.10.2).

12.9.1 CONVEXES ET DISTANCE DE HAUSDORFF. Les notations sont celles de 9.11; donc l'enveloppe convexe ε détermine une application $\varepsilon : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, cf. 11.1.8.7.

12.9.1.1 Proposition. L'application $\varepsilon : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ est lipschitzienne de rapport 1.

Il suffit, cf. définition 9.11.1, que si $F, G \in \mathcal{K}$ vérifient $F \subset B(G, \rho)$ ($\rho \geq 0$), alors $\varepsilon(F) \subset B(\varepsilon(G), \rho)$; or cela résulte de 11.8.7.6.

12.9.1.2 Corollaire. Notons $\mathcal{C} = \{F \in \mathcal{K} : F \text{ convexe}\}$; alors \mathcal{C} est un fermé de \mathcal{K} . En particulier \mathcal{C} est complet et, pour $a \in X$ et $r \geq 0$,

$$\mathcal{C}_{a,r} = \mathcal{K}_{a,r} \cap \mathcal{C}$$

est compact.

Le lemme suivant visualise bien géométriquement, pour les convexes, la notion de « tendre vers » :

12.9.1.3 Lemme. Soient A, C, D trois convexes compacts, tels que $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$; $D \subset C \subset A$ et $\text{Fr } A \cap C = \emptyset$, $\text{Fr } C \cap D = \emptyset$. Il existe $\eta > 0$ tel que tout convexe S tel que $\delta(C, S) \leq \eta$ vérifie alors $D \subset S \subset A$.

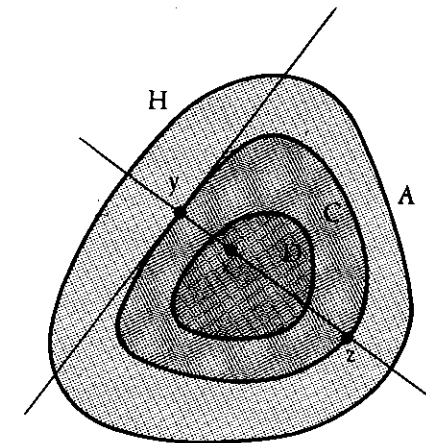


Figure 12.9.1

Pour $S \subset A$, c'est facile, il suffit de prendre $\eta = d(\text{Fr } A, C)$. Pour $S \supset D$, posons aussi $\eta = d(\text{Fr } C, D)$ et soit S avec $\delta(S, C) \leq \eta$; par l'absurde, soit $x \in D \setminus S$. Soit y tel que $d(x, y) = d(x, S)$; on sait (cf. 11.1.7.2) que $S \subset H$, où H est un demi-espace défini par l'hyperplan orthogonal à $\langle x, y \rangle$ en y . Soit, puisque $x \in C$, z le point de $\langle x, y \rangle \cap \text{Fr } C$ qui n'est pas dans H . Alors

$$d(z, S) = d(z, y) > d(z, x) \geq \eta$$

par définition de η ; mais, comme $z \in C$, ceci contredit $C \subset B(S, \eta)$.

12.9.2 LEMMES D'APPROXIMATION. Notons \mathcal{P} l'ensemble de tous les polyèdres convexes compacts, \mathcal{P}^* l'ensemble de tous les polytopes

et $\mathcal{C}^\circ = \{ C \in \mathcal{C} : \dim C = \dim X \}$ (ou encore $\mathring{C} \neq \emptyset$, cf. 11.2.7). Dans ces écritures, X est sous-entendu; si besoin est, on écrira $\mathfrak{F}(X)$, $\mathfrak{F}^\circ(X)$, $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}^\circ(X)$.

12.9.2.1 Lemme. Pour tous $\varepsilon > 0$ et $C \in \mathcal{C}^\circ$, il existe $P \in \mathfrak{F}^\circ$ tel que $P \subset C \subset B(P, \varepsilon)$ (en particulier $\delta(P, C) \leq \varepsilon$).

Comme C est compact, on peut le recouvrir par n boules $B(a_i, \varepsilon)$, $a_i \in C$: $C \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$; alors l'enveloppe convexe $P = \xi(a_1, \dots, a_n)$ répond à la question, cf. 12.1.15.

12.9.2.2 Corollaire. \mathfrak{F} est dense dans \mathcal{C} .

On vient de voir que \mathfrak{F}° était dense dans \mathcal{C}° ; si maintenant $C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^\circ$, soit $Y = \langle C \rangle$ le sous-espace qu'il engendre. Dans Y , le convexe C est d'intérieur non vide (cf. 11.2.7), on peut l'approximer par des $P \in \mathfrak{F}(Y)$. Alors $P \times I_\varepsilon$ approximera C , si I_ε désigne une boule de rayon ε dans un sous-espace Y^\perp orthogonal à Y .

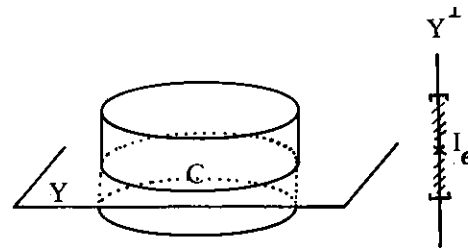


Figure 12.9.2.2

Pour la suite, il est utile d'encadrer un $C \in \mathcal{C}$ par des polytopes des deux côtés, et non seulement à l'intérieur comme dans le lemme précédent, où en outre $B(P, \varepsilon)$ a l'inconvénient de ne pas être un polytope.

12.9.2.3 Lemme. Pour tous $C \in \mathcal{C}^\circ$, $a \in \mathring{C}$ et $\eta > 1$, il existe $P \in \mathfrak{F}^\circ$ tel que $P \subset C \subset H_{a,\eta}(P)$, $\text{Fr}(C) \cap P = \emptyset$, $C \cap \text{Fr}(H_{a,\eta} P) = \emptyset$.

Fixons d'abord $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \mathring{C}$, puis ε tel que $0 < \varepsilon < r(\eta - 1)$; soit d'après 12.9.2.1 un $P \in \mathfrak{F}^\circ$ tel que $P \subset C \subset B(P, \varepsilon)$. D'après 12.9.1.3, on a $P \supset B(a, r)$ dès que ε est assez petit. Par construction la distance entre une face F de P et $H_{a,\eta}(F)$ est $\geq (\eta - 1)r > \varepsilon$; il en résulte que

$$H_{a,\eta}(P) \supset B(P, \varepsilon) \supset C.$$

Quant aux conditions de disjonction entre les frontières, elles s'obtiennent en modifiant P par une homothétie de rapport < 1 et suffisamment voisin de 1.

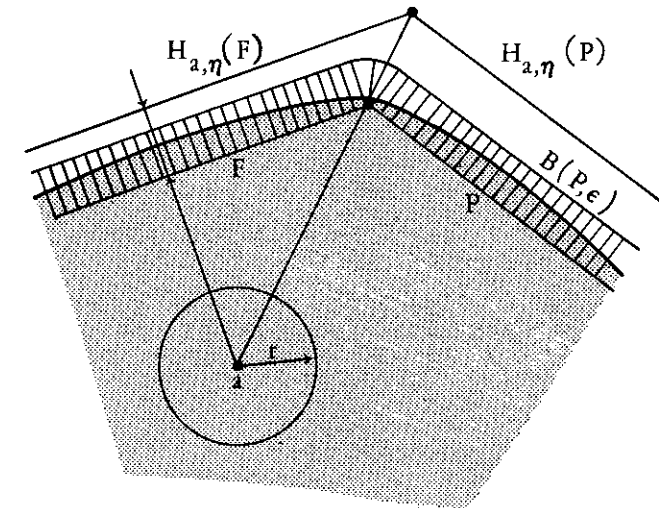


Figure 12.9.2.3

12.9.2.4 Corollaire. Tout convexe C a une frontière de mesure 0 (cf. 9.12.5).

Si $\mathring{C} = \emptyset$, $C \subset Y$ un sous-espace strict et donc C lui-même est de mesure 0.

Si $\mathring{C} \neq \emptyset$, on applique 12.9.2.3; la frontière de C est incluse dans $P' \setminus P$, où $P' = H_{a,\eta} P$; comme (cf. 9.12.3)

$$\mathfrak{L}(P' \setminus P) = \mathfrak{L}(P)(\eta^d - 1) \leq \mathfrak{L}(C)(\eta^d - 1),$$

cette quantité tend bien vers 0 avec η tendant vers 1.

12.9.3 VOLUME DES CONVEXES COMPACTS. Les notations sont celles de 9.12.

12.9.3.1 Proposition. Pour $C \in \mathcal{C}$, on a :

$$\mathfrak{L}(C) = \sup \{ \mathfrak{L}(P) : P \in \mathfrak{F} \text{ et } P \subset C \} = \inf \{ \mathfrak{L}(P) : P \in \mathfrak{F} \text{ et } P \supset C \}.$$

Si $\mathring{C} = \emptyset$, on se ramène, comme dans la démonstration de 12.9.2.2, au cas $\mathring{C} \neq \emptyset$. Dans ce dernier cas, on applique 12.9.2.3.

12.9.3.2 Le lemme 12.9.2.3 permet de prendre 12.9.3.1 comme définition de $\mathfrak{L}(\cdot)$ sur les convexes, à partir du volume élémentaire 12.2.5; on évite ainsi, si l'on désire, tout recours à la théorie de l'intégration.

12.9.3.3 Proposition. Le volume $\mathfrak{L} : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathbf{R}$ est strictement croissant, i.e. si $D, C \in \mathcal{C}$ et $D \subset C$, $D \neq C$, alors $\mathfrak{L}(D) < \mathfrak{L}(C)$.

Si en effet $C \supset D$, $C \neq D$, le lemme 11.2.4 montre que $\mathring{C} \setminus D \neq \emptyset$;

soit $\varepsilon > 0$ et $x \in \overset{\circ}{C} \setminus D$ tels que $B(x, \varepsilon) \subset C \setminus D$; on aura

$$\mathfrak{L}(C) \geq \mathfrak{L}(D) + \mathfrak{L}(B(x, \varepsilon)) > \mathfrak{L}(D).$$

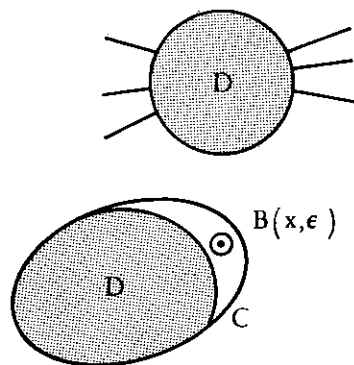


Figure 12.9.3

Ce résultat est évidemment faux dans \mathcal{K} . Rappelons (cf. 9.12.5) que le volume n'est pas continu sur \mathcal{K} mais sur \mathcal{C} on a la :

12.9.3.4 Proposition. *Le volume $\mathfrak{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue.*

On procède comme dans 9.12.6; on sait que sur $X \setminus \text{Fr } C : \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{C_n} = \chi_C$,

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C. \text{ Mais ici } \text{Fr } C \text{ est de mesure } 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \chi_{C_n} \mu = \int_X \chi_C \mu$$

sur tout X .

On peut en donner une démonstration élémentaire; si $C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ est

d'intérieur vide, on l'emboîte comme dans la démonstration de 12.9.2.2.

Si $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$, on construira avec 12.9.2.3, deux polytopes P, P' tels que $P \subset C \subset P'$ et $\mathfrak{L}(P') - \mathfrak{L}(P) \leq \varepsilon$, et $\text{Fr } C \cap P = \emptyset$, $\text{Fr } P' \cap C = \emptyset$; en appliquant 12.9.1.3, on voit que pour η assez petit $\delta(C, D) \leq \eta$ entraînera $P \subset D \subset P'$ et donc que $|\mathfrak{L}(D) - \mathfrak{L}(C)| \leq \mathfrak{L}(P') - \mathfrak{L}(P) \leq \varepsilon$.

12.10 Aire des convexes compacts

Nous avons vu en 9.12.7 que les notions de volumes k -dimensionnels sont délicates. Pour les convexes, il est naturel d'espérer trouver le volume $(d-1)$ -dimensionnel de leur frontière, volume appelé ici l'aire, en les approximant par des polytopes et en prenant la limite de l'aire des polytopes approximatifs, car pour les polytopes nous avons une aire agréablement définie : cf. 12.3. Cette voie est possible mais nous allons plutôt prendre pour définition de l'aire la formule de Cauchy 12.3.3. Il faut d'abord vérifier le :

12.10.1 LEMME. *Les notations étant celles de 12.3, la fonction*

$$\mathfrak{L}(p_{\xi}(\cdot)) : S \times \mathcal{C}^* \ni (\xi, C) \mapsto \mathfrak{L}(p_{\xi}(C)) \in \mathbf{R}$$

est continue.

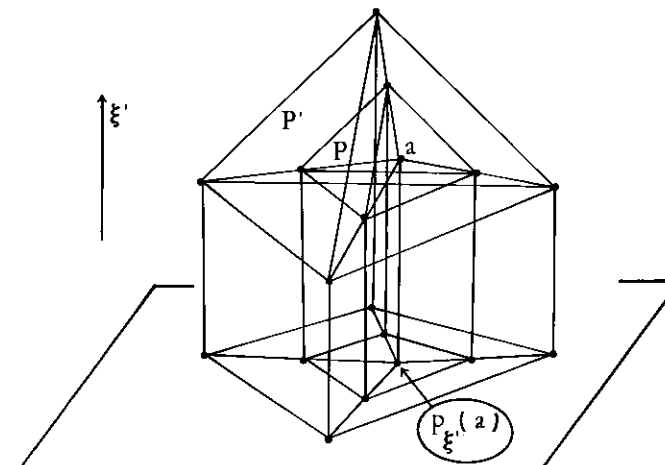


Figure 12.10.1

Fixons $\xi \in S, C \in \mathcal{C}^*, a \in \overset{\circ}{C}, \varepsilon > 0$; pour tout $\eta > 1$ il existe (cf. 12.9.2.3) un $P \in \mathcal{P}^*$ tel que $P \subset C \subset P' = H_{a,\eta} P, \mathfrak{L}(P') - \mathfrak{L}(P) \leq \varepsilon/3, \text{Fr } C \cap P = \emptyset, \text{Fr } P' \cap C = \emptyset$. Comme $H_{p_{\xi}(a), \eta} \circ p_{\xi'} = p_{\xi'} \circ H_{a,\eta}$ pour tout $\xi' \in S$, on aura

$$\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P')) = \eta^{d-1} \mathfrak{L}(p_{\xi'}(P));$$

comme il existe r avec $B(a, r) \supset C$, on aura (cf. 9.12.4.5)

$$|\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P')) - \mathfrak{L}(p_{\xi'}(P))| \leq (\eta^{d-1} - 1) r^{d-1} \beta(d-1)$$

pour tout $\xi' \in S$. On peut donc fixer η , donc P , telle que

$$|\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P')) - \mathfrak{L}(p_{\xi'}(P))| \leq \varepsilon/3 \quad \forall \xi' \in S.$$

Mais la formule de 12.3.3.2 montre que $S \ni \xi' \mapsto \mathfrak{L}(p_{\xi'}(P)) \in \mathbf{R}$ est continue en ξ' , donc il existe ζ tel que $\|\xi' - \xi\| \leq \zeta$ entraîne

$$|\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P)) - \mathfrak{L}(p_{\xi}(P))| \leq \varepsilon/3.$$

D'après 12.9.1.3 on peut choisir θ assez petit pour que $\delta(D, C) \leq \theta$ entraîne $P \subset D \subset P'$; alors on aura bien :

$$\begin{aligned} |\mathfrak{L}(p_{\xi}(D)) - \mathfrak{L}(p_{\xi}(C))| &\leq |\mathfrak{L}(p_{\xi}(D)) - \mathfrak{L}(p_{\xi}(P))| + \\ &+ |\mathfrak{L}(p_{\xi}(P)) - \mathfrak{L}(p_{\xi}(C))| \leq \\ &\leq |\mathfrak{L}(p_{\xi}(P')) - \mathfrak{L}(p_{\xi}(P))| + \varepsilon/3 + |\mathfrak{L}(p_{\xi}(P')) - \mathfrak{L}(p_{\xi}(P))| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

12.10.2 PROPOSITION. DÉFINITION. Pour tout $C \in \mathcal{C}^*$ l'intégrale

$$\mathfrak{A}(C) = (\beta(d-1))^{-1} \int_{\xi \in S} \mathfrak{L}(p_\xi(C)) \sigma$$

existe; elle est appelée l'aire de C (longueur si $d = 2$). Cette aire coïncide avec l'aire des polytopes. L'aire $\mathfrak{A} : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathbf{R}$ est continue et strictement croissante. Elle est invariante par $Is(X)$.

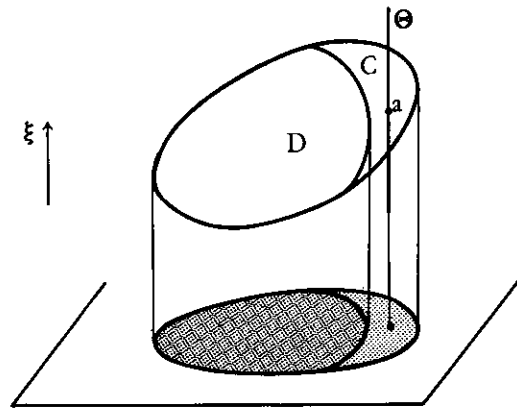


Figure 12.10.2

L'existence et la continuité proviennent de 12.10.1 et de la théorie de l'intégration. Elle coïncide avec l'aire des polytopes d'après 12.3.3. Soient maintenant $D \subset C$, $D \neq C$ et, comme en 12.9.3.3, une boule $B(a, \varepsilon) \subset C \setminus D$, $\varepsilon > 0$. D'après 11.4.1 il existe une droite θ , contenant a et ne rencontrant pas D ; soit $\xi \in \theta \cap S$. Par continuité les droites passant par a , et parallèles à des η suffisamment voisins de ξ , ne rencontreront toujours pas D . Donc 12.9.3.3 montre que $\mathfrak{L}(p_\eta(D)) < \mathfrak{L}(p_\eta(C))$ pour ces η et donc $\mathfrak{A}(D) < \mathfrak{A}(C)$.

12.10.3 COROLLAIRE. Pour tout $C \in \mathcal{C}^*$:

$$\mathfrak{A}(C) = \sup \{ \mathfrak{A}(P) : P \in \mathcal{P}^* \text{ et } P \subset C \} = \inf \{ \mathfrak{A}(P) : P \in \mathcal{C}^* \text{ et } P \supset C \}.$$

12.10.4 NOTES

12.10.4.1 On vérifie que si $C = S(a, r)$, on trouve $\mathfrak{A}(C) = r^{d-1} \alpha(d)$; en effet $p_\xi(S(a, r))$ est une boule de rayon r pour tout ξ , donc

$$\mathfrak{L}(p_\xi(S(a, r))) = r^{d-1} \beta(d-1) \text{ d'où } \mathfrak{A}(S(a, r)) = r^{d-1} \int_S \sigma = r^{d-1} \alpha(d).$$

12.10.4.2 Il est naturel de comparer notre longueur pour un convexe C d'un plan avec la longueur de la courbe $Fr C$; à vrai dire $Fr C$ n'apparaît pas directement comme une courbe. Mais 11.3.4 fournit de $Fr C$ des repré-

sentations paramétriques continues; alors un polygone inscrit dans $Fr C$ a un périmètre qui est précisément une somme de la définition 9.9.1, ce qui prouve bien que les deux notions de longueur coïncident : cf. 12.11.5.

12.10.5 APPLICATION : COURBES DE LARGEUR CONSTANTE.

On appelle courbe, ou convexe, de *largeur constante*, tout convexe C d'un plan euclidien tel que, $\forall \xi \in S$, le segment $p_\xi(C)$ ait une longueur constante; ce qui est équivalent à dire que les deux droites d'appui de C de direction ξ (cf. 11.5.6) soient à distance constante. Il n'y a pas que les disques dans ce cas, par exemple le triangle de Reuleaux (Fig. 12.10.5.1); plus généralement une trajectoire orthogonale convenable des tangentes à une courbe convenable à un nombre *impair* de rebroussements (et il y en a beaucoup).

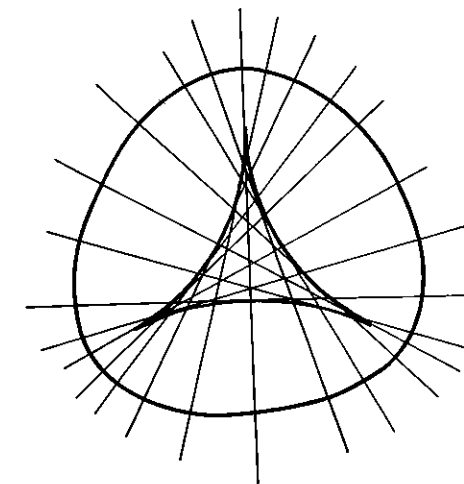
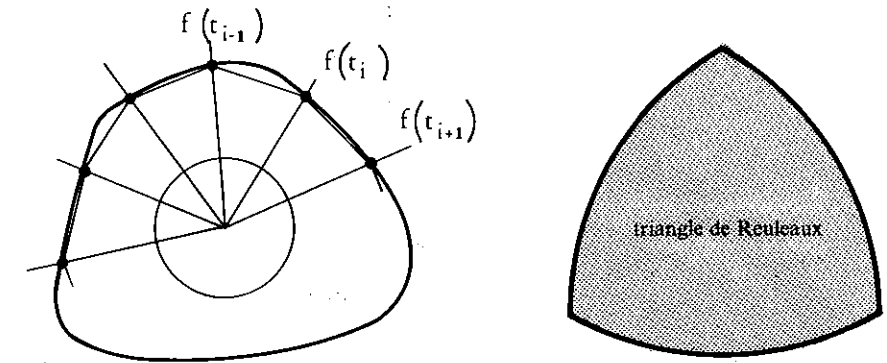
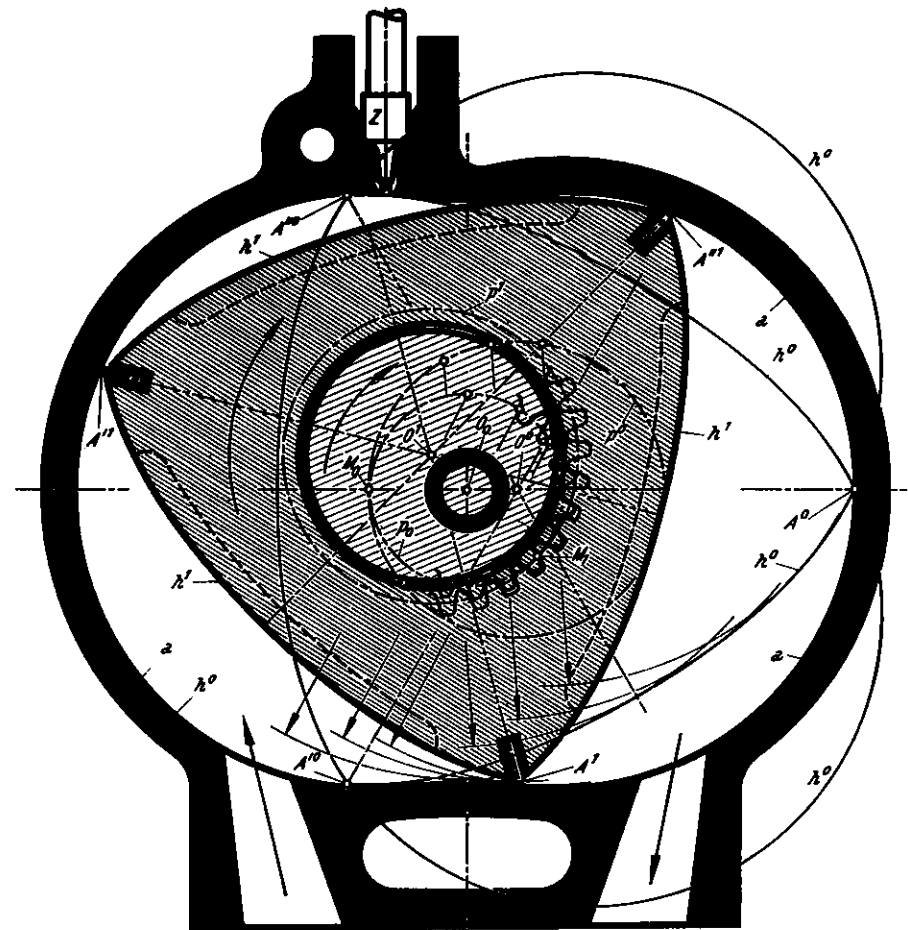


Figure 12.10.5.1

Mais ce que montrent 12.10.2 et 12.10.4 c'est que si l est cette largeur constante, alors le convexe a pour longueur πl . Les « corps » de largeur constante ont fait l'objet de nombreux travaux, mais il subsiste de nombreux problèmes ouverts dans ce domaine. Par exemple, un résultat de Blaschke-Lebesgue est que, parmi les convexes plans de largeur constante, un seul est d'aire minimum, c'est le triangle de Reuleaux; mais on ne connaît pas actuellement d'analogue de ce résultat en dimension ≥ 3 . Pour les corps de largeur constante, des références sont [EN], chapitre 7, [VE], p. 156, [BLA 1], p. 150, [B-F], paragraphe 15, l'ouvrage délicieux [Y-B], chapitre 7.

Le triangle de Reuleaux se rencontre dans plusieurs dispositifs cinématiques de mécanique; dans les appareils de projection cinématographique, voir [Y-B], p. 72, dans le récent moteur rotatif Wankel. A ce sujet voir 9.14.34.6 et [LF-AR], p. 433-435.



Grundzüge der Mathematik
Vandenhoeck & Ruprecht.

Figure 12.10.5.2

Nous allons maintenant étendre aux convexes quelconques, par approximation par des polytopes, la formule 12.3.6 :

12.10.6 THÉOREME (Steiner, Minkowski). *A tout convexe $C \in \mathcal{C}^*$ de dimension d sont attachés des scalaires $\mathfrak{L}_i(C)$ ($i = 0, 1, \dots, d$) tels que*

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}_+^* : \mathfrak{L}(B(C, \lambda)) = \sum_{i=0}^d \mathfrak{L}_i(C) \lambda^i.$$

Les fonctions $\mathfrak{L}_i : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathbf{R}$ sont continues; $\mathfrak{L}_0(C) = \mathfrak{L}(C)$, $\mathfrak{L}_1(C) = \mathfrak{A}(C)$, $\mathfrak{L}_d(C) = \beta(d)$ pour tous C .

Soit $C = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, $P_n \in \mathcal{P}^* \forall n$; puisque les P_n sont bornés, 12.3.7 montre que les $\mathfrak{L}_i(P_n)$ sont bornées; quitte à extraire une sous-suite de (P_n) , on peut donc supposer qu'il existe des k_i ($i = 0, 1, \dots, d$) tels que $k_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{L}_i(P_n)$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{L}(B(P_n, \lambda)) = \sum_{i=0}^d k_i \lambda^i.$$

Mais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{L}(B(P_n, \lambda)) = \mathfrak{L}(\lim_{n \rightarrow \infty} B(P_n, \lambda))$$

d'après 12.9.3.4; mais (cf. 9.11.7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(P_n, \lambda) = B(\lim_{n \rightarrow \infty} P_n, \lambda) = B(C, \lambda) \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{L}(B(C, \lambda)) = \sum_{i=0}^d k_i \lambda^i.$$

Mais maintenant que l'on sait que $\mathfrak{L}(B(C, \lambda))$ est un polynôme en λ , comme la fonction $\mathfrak{L}(B(C, \lambda))$ ne dépend que de C et λ (et non des P_n tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = C$!), on voit que les k_i ne dépendent que de C car on sait qu'une fonction polynôme détermine le polynôme. En plus cette détermination est continue (voir par exemple la formule dite « des différences successives » dans [CH 1], 6.3.6), et comme $\mathcal{C}^* \times \mathbf{R}_+ \ni (C, \lambda) \mapsto \mathfrak{L}(B(C, \lambda)) \in \mathbf{R}$ est continue, on voit que les \mathfrak{L}_i sont continues (cf. 11.1.3.3 et 12.9.3.4). Enfin les valeurs de \mathfrak{L}_0 , \mathfrak{L}_1 et \mathfrak{L}_d découlent de 12.3.6 et de la continuité de ces fonctions.

On peut maintenant voir (cf. 12.3.8) que peindre un convexe est une façon de mesurer son aire :

12.10.7 COROLLAIRE. *Pour tout convexe $C \in \mathcal{C}^*$:*

$$\mathfrak{A}(C) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{L}(B(C, \lambda)) - \mathfrak{L}(C)}{\lambda}.$$

12.10.8 EXEMPLE. Prenons $C = B(0, 1) \in \mathbf{R}^d$;

$$B(C, \lambda) = B(0, \lambda + 1), \quad \mathfrak{L}(B(C, \lambda)) = (\lambda + 1)^d \beta(d),$$

$$\mathfrak{A}(C) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\beta(d) (\lambda + 1)^d - \beta(d)}{\lambda} = d\beta(d).$$

Comme $\mathfrak{A}(C) = \alpha(d)$ (voir 12.10.4), on trouve de cette façon la relation $\alpha(d) = d\beta(d)$.