on a finalement

$$\int_{U'_{a,b}} D_1 g(u, \xi^2, \dots, \xi^n) du \wedge d\xi^2 \wedge \dots \wedge d\xi^n = \int_{U_{a,b}} D_1 f(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n) d\xi^1 \wedge d\xi^2 \wedge \dots \wedge d\xi^n$$

ce qui prouve **(16.24.11.1)**.

Remarque **(16.24.12)**. — Dans le calcul précédent, remplaçons f par la fonction $x \to \int_a^x f(t, \xi^2, \dots, \xi^n)dt$, a et b par t et $t + h$, divisons par h et faisons tendre h vers 0; on obtient

(16.24.12.1) $$\frac{d}{dt}\left(\int_{U_{a,t}} f(\xi^1, \dots, \xi^n) d\xi^1 \dots d\xi^n\right) = \int_{E_t} f(z)\sigma_t(z)$$

et en prenant en particulier $f = 1$, on voit que cela donne une interprétation de $\int_{E_t} \sigma_t$ comme *dérivée du volume* de $U_{a,t}$.

(16.24.13) On étend facilement la notion d'intégrale d'une n-forme différentielle sur une variété orientée X au cas où il s'agit d'une n-forme différentielle à valeurs dans un espace vectoriel F **(16.20.15)**. Par exemple, soient I un intervalle ouvert dans $\mathbf{R}$, γ_0 une application de classe C^1 de I dans un ouvert A de $\mathbf{C}$, f une fonction continue complexe définie dans A; si γ est la restriction de γ_0 à un intervalle compact $J \subset I$, l'intégrale notée $\int_\gamma f(z)dz$ dans **(9.6)** n'est autre que $\int_J {}^t\gamma_0(f\cdot(d\xi^1 + id\xi^2))$, où l'on prend l'image réciproque par γ_0 de la 1-forme différentielle vectorielle $f\cdot(d\xi^1 + id\xi^2)$ à valeurs complexes définie dans $A \subset \mathbf{R}^2$.

PROBLÈMES

1) Soit H la partie de $\mathbf{R}^{n+1}$ définie par l'inégalité $\xi^0 > (\sum_{j=1}^n (\xi^j)^2)^{\frac{1}{2}}$ pour les points $\mathbf{x} = (\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^n)$ de $\mathbf{R}^{n+1}$. Si $\mathbf{a} = (\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^n)$ est un point de H, montrer qu'il existe une constante $c_n > 0$, indépendante de $\mathbf{a}$, telle que

$$\int_H \exp(-\alpha^0\xi^0 - \alpha^1\xi^1 - \dots - \alpha^n\xi^n) d\xi^0 d\xi^1 \dots d\xi^n = c_n\left((\alpha^0)^2 - \sum_{j=1}^n (\alpha^j)^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

(utiliser une transformation de Lorentz convenable).

2) Soit H un hyperplan dans $\mathbf{R}^n$; il y a un déplacement euclidien transformant $\mathbf{R}^{n-1}$ (identifié à l'espace engendré par les $n - 1$ premiers vecteurs de la base canonique) en H; l'image par cette application de la mesure de Lebesgue λ_{n-1} sur $\mathbf{R}^{n-1}$ est une mesure sur H indépendante du déplacement euclidien considéré; on la note encore λ_{n-1}. Montrer que si $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire orthogonal à H et A une partie intégrable de H, la projection orthogonale $p(A)$ de A sur $\mathbf{R}^{n-1}$ a pour mesure

$$\lambda_{n-1}(p(A)) = |(\mathbf{e}_n | \mathbf{u})| \lambda_{n-1}(A).$$

3) Soit P un polyèdre convexe compact dans $\mathbf{R}^n$ ayant un point intérieur; si F_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ sont les *faces* de P (section **16.5**, problème 6), on appelle *aire* (ou *aire* $(n-1)$*-dimensionnelle*) de P (ou de la frontière de P) le nombre $\mathscr{A}_{n-1}(P) = \sum_k \lambda_{n-1}(F_k)$. Pour tout vecteur $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_{n-1}$, on désigne par $\lambda_{n-1}(P, \mathbf{u})$ la mesure de la projection orthogonale de P sur l'hyperplan d'équation $(\mathbf{x} | \mathbf{u}) = 0$; montrer que l'on a

(1) $$V_{n-1}\mathscr{A}_{n-1}(P) = \int_{S_{n-1}} \lambda_{n-1}(P, \mathbf{u}) \cdot \sigma^{(n-1)}(\mathbf{u})$$

(« formule de Cauchy pour les polyèdres convexes ») (utiliser le problème 2).

Déduire de cette formule que si P′ est un second polyèdre convexe compact contenant P, on a $\mathscr{A}_{n-1}(P) \subset \mathscr{A}_{n-1}(P')$.

4) Soit C un corps convexe compact dans $\mathbf{R}^n$ (section **16.5**, problème 6). Pour la distance de Hausdorff h définie dans la section **3.16**, problème 3, il existe une suite (P_m) de polyèdres convexes compacts tendant vers C (section **16.5**, problème 8 a)). Montrer que la suite $(\mathscr{A}_{n-1}(P_m))_{m \geqslant 1}$ tend vers une limite indépendante de la suite choisie tendant vers C; cette limite est appelée l'*aire* (ou *aire* $(n-1)$*-dimensionnelle*) de C (ou de sa frontière) et est notée $\mathscr{A}_{n-1}(C)$. Pour $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_{n-1}$, on note encore $\lambda_{n-1}(C, \mathbf{u})$ la mesure de la projection orthogonale de C sur l'hyperplan $(\mathbf{x} | \mathbf{u}) = 0$; montrer que $\mathbf{u} \to \lambda_{n-1}(C, \mathbf{u})$ est continue dans $\mathbf{S}_{n-1}$ (utiliser le problème 3) et que l'on a

(2) $$V_{n-1}\mathscr{A}_{n-1}(C) = \int_{S_{n-1}} \lambda_{n-1}(C, \mathbf{u}) \cdot \sigma^{(n-1)}(\mathbf{u})$$

(« formule de Cauchy pour les corps convexes »). Si C′ est un second corps convexe compact contenant C, on a $\mathscr{A}_{n-1}(C) \subset \mathscr{A}_{n-1}(C')$. Lorsque (C_m) est une suite de corps convexes compacts tendant vers C pour la distance de Hausdorff, on a $\lim_{m \to \infty} \mathscr{A}_{n-1}(C_m) = \mathscr{A}_{n-1}(C)$. Cas où $C = \mathbf{S}_{n-1}$.

5) Soit $\mathfrak{K}_n$ l'ensemble des corps convexes compacts de $\mathbf{R}^n$, muni de la distance de Hausdorff (section **3.16**, problème 3). On définit par récurrence sur n une suite de $n + 1$ fonctions numériques W_{in} $(0 \leqslant i \leqslant n)$ sur $\mathfrak{K}_n$ de la facon suivante: $W_{01}(C) = \lambda_1(C)$ et $W_{11}(C) = 2$. Pour $n > 1$, on pose

$$W_{0n}(C) = \lambda_n(C) \quad , \quad W_{in}(C) = \frac{1}{nV_{n-1}} \int_{S_{n-1}} W_{i-1,n-1}(p_{\mathbf{u}}(C)) \cdot \sigma^{(n-1)}(\mathbf{u}) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

où $p_{\mathbf{u}}$ désigne la projection orthogonale sur l'hyperplan d'équation $(\mathbf{x} | \mathbf{u}) = 0$. Montrer que chacune des fonctions W_{in} est croissante et continue dans $\mathfrak{K}_n$, et que pour tout $\alpha > 0$, $W_{in}(\alpha C) = \alpha^{n-i} W_{in}(C)$. En outre, si A et B sont deux corps convexes de $\mathfrak{K}_n$ *tels que* $A \cup B$ *soit convexe* et que $A \cap B$ ait un point intérieur, on a

$$W_{in}(A \cup B) + W_{in}(A \cap B) = W_{in}(A) + W_{in}(B)$$

(observer que dans ce cas, pour $a \in A$ et $b \in B$, il existe dans le segment d'extrémités a et b

un point de $A \cap B$; par suite, si H est un hyperplan d'appui de $A \cap B$, H est un hyperplan d'appui de l'un des corps convexes A, B ; en déduire que $p_{\mathbf{u}}(A \cap B) = p_{\mathbf{u}}(A) \cap p_{\mathbf{u}}(B)$). On a en particulier $nW_{1,n}(C) = \mathscr{A}_{n-1}(C)$ (problème 4).

6) Étant donné un corps convexe compact $C \subset \mathbf{R}^n$ contenant 0, rappelons qu'on appelle *fonction d'appui* de C la fonction (définie dans $\mathbf{R}^n$) $H(\mathbf{z}) = \sup_{\mathbf{x} \in C} (\mathbf{x} \mid \mathbf{z})$ (section **16.5**, problème 7). Pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_{n-1}$, on pose $b(C, \mathbf{u}) = H(\mathbf{u}) + H(-\mathbf{u})$ (« largeur » de C dans la direction $\mathbf{u}$, cf. section **14.3**, problème 9 a). Montrer que l'on a (avec les notations du problème 5)

$$W_{n-1,n}(C) = \frac{1}{2n} \int_{\mathbf{S}_{n-1}} b(C, \mathbf{u}) \cdot \sigma^{(n-1)}(\mathbf{u}) .$$

(Raisonner par récurrence sur n. Pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_{n-1}$, soit $E(\mathbf{u})$ l'hyperplan d'équation $(\mathbf{x} \mid \mathbf{u}) = 0$ dans $\mathbf{R}^n$; soit $\sigma_{\mathbf{u}}^{(n-2)}$ la $(n-2)$-forme différentielle sur $\mathbf{S}_{n-1} \cap E(\mathbf{u})$ image de $\sigma^{(n-2)}$ par une rotation de $\mathbf{R}^n$ transformant $\mathbf{S}_{n-2}$ en $\mathbf{S}_{n-1} \cap E(\mathbf{u})$. On montrera que l'intégrale

$$\int_{\mathbf{S}_{n-1}} \sigma^{(n-1)}(\mathbf{u}) \int_{\mathbf{S}_{n-1} \cap E(\mathbf{u})} b(p_{\mathbf{u}}(C), \mathbf{v}) \cdot \sigma_{\mathbf{u}}^{(n-2)}(\mathbf{v})$$

peut s'écrire

$$\int_{P} b(C, \mathbf{v}) \cdot \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

où P est la sous-variété de $\mathbf{S}_{n-1} \times \mathbf{S}_{n-1}$ formée des couples $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ tels que $(\mathbf{u} \mid \mathbf{v}) = 0$, et ω une $(2n-1)$-forme sur P obtenue par le procédé de **(16.21.7)** ; on utilisera **(16.24.8)**).

7) a) Montrer que pour un polyèdre convexe compact P dans $\mathbf{R}^n$, de dimension n l'aire $\mathscr{A}_{n-1}(P)$ est égale à l'aire minkowskienne de P (section **14.3**, problème 10 c)). En déduire que pour tout nombre $\rho > 0$, on a (notation de **3.6**)

$$\lambda_n(V_\rho(P)) = \lambda_n(P) + \int_0^\rho \mathscr{A}_{n-1}(V_r(P))\,dr . \tag{1}$$

b) Montrer que pour tout corps convexe compact C dans $\mathbf{R}^n$, on a (formule de Steiner-Minkowski)

$$\lambda_n(V_r(C)) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} W_{j,n}(C) r^j \quad \text{pour} \quad r \geqslant 0 .$$

(Démontrer d'abord la formule lorsque $C = P$ est un polyèdre compact de dimension n, en utilisant a) et raisonnant par récurrence sur n. Puis passer à la limite dans $\mathfrak{K}_n$).

c) En déduire la formule

$$W_{i,n}(V_r(C)) = \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} W_{j+i,n}(C) r^j \qquad (0 \leqslant i \leqslant n,\ r \geqslant 0)$$

(observer que $V_{r+s}(C) = V_r(V_s(C))$ et utiliser la formule de Steiner-Minkoxski).

d) Déduire de b) et c) que la formule (1) est valable en remplaçant P par tout corps convexe compact $C \in \mathfrak{K}_n$; en particulier, $\mathscr{A}_{n-1}(C)$ est égal à l'aire minkowskienne de C (section **14.3**, problème 10 c)).

8) Soit $\mathfrak{K}_n'$ l'ensemble de tous les ensembles convexes compacts non vides dans $\mathbf{R}^n$, muni de la distance de Hausdorff (section **3.16**, problème 3) ; c'est un espace compact, dans lequel $\mathfrak{K}_n$ est partout dense. Montrer que les fonctions W_{in} définies dans $\mathfrak{K}_n$ se prolongent par continuité dans $\mathfrak{K}_n'$ (raisonner par récurrence sur n) ; si A est un ensemble convexe compact de dimension $< n$ dans $\mathbf{R}^n$, on a

$$W_{in}(A) = \frac{iV_i}{nV_{i-1}} W_{i-1,n-1}(A) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) .$$

9) Soient $A \subset \mathbf{R}^p$, $B \subset \mathbf{R}^q$ deux ensembles convexes compacts. Montrer que l'on a

$$W_{i,p+q}(A \times B) = \frac{V_i}{\binom{n}{i}} \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{V_j V_{i-j}} \binom{p}{j} \binom{q}{i-j} W_{j,p}(A) W_{i-j,q}(B)$$

(appliquer la formule de Steiner-Minkowski à $A \times B$, en utilisant aussi le théorème de Lebesgue-Fubini). En déduire les valeurs des $W_{in}(C)$ lorsque C est un cube de $\mathbf{R}^n$.

10) Soit $C \subset \mathbf{R}^n$ un corps convexe compact de dimension n. Montrer que l'ensemble $\complement V_r(\complement C)$ est convexe (l'écrire comme intersection de translatés de C). Pour tout $r > 0$, on a $V_r(\complement V_r(\complement C)) \subset C$; en utilisant la continuité des fonctions $W_{in}(C)$ par rapport à C, en déduire que la fonction $r \to \lambda_n(\complement V_r(\complement C))$ a au point 0 une dérivée à droite égale à $-\mathscr{A}_{n-1}(C)$.

11) Soient X, Y deux variétés différentielles pures orientées, $n = \dim(X)$, $m = \dim(Y)$, $f : X \to Y$ une submersion, x un point de X, $y = f(x)$; on garde les notations de **(16.21.7)**. Soit ζ une m-forme différentielle de classe C^∞ sur Y appartenant à l'orientation de Y ; pour tout $k \leqslant m$, ζ définit un isomorphisme canonique $\mathbf{z}_y \to \Phi_{\zeta(y)}(\mathbf{z}_y)$ de $\bigwedge^k T(Y)$ sur $\bigwedge^{m-k} T(Y)^*$, tel que $\Phi_{\zeta(y)}(\mathbf{z}_y) = \mathbf{z}_y \mathbin{\lrcorner} \zeta(y)$. Soit α une $(n-m+k)$-forme différentielle sur X, de classe C^∞ et de support compact ; à tout k-vecteur $\mathbf{z}_y \in \bigwedge^k T_y(Y)$, il correspond une $(n-m)$-forme différentielle $\beta_{\mathbf{z}_y}$ sur $f^{-1}(y)$ telle que, pour $f(x) = y$,

$$\beta_{\mathbf{z}_y}(x) = (\alpha(x) \wedge ((\textstyle\bigwedge^{m-k} ({}^t u))(\Phi_{\zeta(y)}(\mathbf{z}_y))))/\zeta(y)$$

avec les notations de **(16.21.7)** ; cette forme est *indépendante* du choix de ζ dans l'orientation de Y. On munit chaque variété $f^{-1}(y)$ de l'orientation déduite par f de celles de X et Y **(16.21.9.1)**. Montrer qu'il existe sur Y une k-forme différentielle γ de classe C^∞ et une seule telle que, pour tout $y \in Y$ et tout $\mathbf{z}_y \in \bigwedge^k T_y(Y)$, on ait

$$\langle \gamma(y), \mathbf{z}_y \rangle = \int_{f^{-1}(y)} \beta_{\mathbf{z}_y}(x) .$$

On note cette forme α^b et on dit que c'est l'*intégrale de α le long des fibres de f*. (Se ramener au cas **(16.7.4)**). Si β' est une k'-forme de classe C^∞ sur Y, on a $\alpha^b \wedge \beta' = (\alpha \wedge {}^t f(\beta'))^b$.

25. Théorèmes de plongement et d'approximation. Voisinages tubulaires

(16.25.1) *Soient* X *une variété,* U *un ouvert relativement compact dans* X. *Il existe alors un entier* N *et un plongement* **(16.8.4)** *de* U *dans* $\mathbf{R}^N$.

Il existe un nombre fini de cartes (U_k, φ_k, n_k) de X $(1 \leqslant k \leqslant m)$ telles que les U_k forment un recouvrement de l'ensemble compact $\overline{U}$. Il existe d'autre part une famille $(V_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ d'ouverts de X formant un recouvrement de $\overline{U}$ et telle que $\overline{V}_k \subset U_k$ pour tout k **(12.6.2)** ; enfin, il existe une