

Bonjour,

Et voilà, c'est reparti pour un tour!

Le document de GF est toujours aussi foutraque. Pourtant c'est sympathique comme approche : Lebesgue écrase les maigres, non à la discrimination anti-maigre! Les petits ont le droit de vivre et d'être pris en compte!

Plus sérieusement, je voudrais développer une approche reprenant les grandes lignes de celle de GF, mais en prenant plus de précautions que lui. A savoir, essayer de développer une notion de "cardinal". Comme je n'aime pas trop cette appellation, je ne l'appellerai pas et je me contenterai de la noter par  $\mathfrak{C}$ . Je n'ai pas l'ambition de le faire pour une grosse classe de parties de  $\mathbb{R}^n$ , mais de voir jusqu'où on peut aller raisonnablement. Je reprends des pistes que j'avais déjà données, de manière plus explicite cette fois ci.

## 1er épisode : Règles et calculs

1. Comme le pose GF dans son 1.1,  $\mathfrak{C}(\emptyset) = 0$  (1e règle).
2. Pour être sûr de ne pas oublier les petits, on pose (2e règle)

$$\mathfrak{C}(\text{un point}) = 1 .$$

3. On veut aussi une propriété d'additivité (3e règle - c'est dans le 1.1 de GF, mais on se limite prudemment aux réunions finies)

$$\mathfrak{C}(A \cup B) = \mathfrak{C}(A) + \mathfrak{C}(B) - \mathfrak{C}(A \cap B) ,$$

Remarquons qu'on en déduit  $\mathfrak{C}(n \text{ points}) = n$ . Ca va doucement, mais ça avance.

4. Une chose naturelle, c'est de demander que deux figures "égales" (superposables) aient même  $\mathfrak{C}$  (4e règle).
5. On demande aussi que  $\mathfrak{C}$  soit croissant (5e règle) :

$$A \subset B \Rightarrow \mathfrak{C}(A) \leq \mathfrak{C}(B) .$$

C'est aussi dans le 1.1 de GF.

Commençons comme GF à nous intéresser aux intervalles. Posons, pour faire court  $\mathfrak{S} := \mathfrak{C}(\text{segment de longueur 1})$ . Par la propriété de croissance,  $\mathfrak{S}$  doit être plus grand que tous les entiers naturels. Pour avoir un segment de longueur 2, je peux mettre bout à bout deux segments de longueur 1, avec une extrémité en commun. Par les règles posées, ça me donne

$$\mathfrak{C}(\text{segment de longueur 2}) = 2\mathfrak{S} - 1 ,$$

et en recommençant, pour tout entier positif  $n$ ,

$$\mathfrak{C}(\text{segment de longueur } n) = n\mathfrak{S} - n + 1 ,$$

Ca s'écrit plus joliment en fonction de  $\mathfrak{J} := \mathfrak{S} - 1$  (ce  $-1$  pour les segments se trouve dans la proposition 1.4 de GF). On a alors

$$\mathfrak{C}(\text{segment de longueur } n) = n\mathfrak{J} + 1 .$$

Si maintenant on part d'un segment de longueur rationnelle, disons  $p/q$ , et qu'on en met  $q$  copies bout à bout, on trouve un segment de longueur  $p$ , et en utilisant de nouveau les règles on aboutit à

$$\mathfrak{C}(\text{segment de longueur rationnelle } r) = r\mathfrak{J} + 1 .$$

On a bien sûr envie de passer aux segments de longueur réelle. Pour ceci, on a besoin d'une

6. règle n° 6 qui stipule que  $\mathfrak{C}$  possède une propriété de continuité qui permette d'avoir  $\lim \mathfrak{C}([0, u_n]) = \mathfrak{C}([0, \lim u_n])$  et de conclure que

$$\mathfrak{C}(\text{segment de longueur réelle } r) = r\mathfrak{J} + 1 .$$

Cette règle n°6 de continuité demande bien sûr à être précisée. On y reviendra plus tard.

Quand on retire les deux points extrémités d'un segment, on a un intervalle ouvert. Suivant les règles :

$$\mathfrak{C}(\text{intervalle ouvert de longueur réelle } r) = r\mathfrak{J} - 1 .$$

Bon passons à des objets de dimension supérieure. On va demander une propriété de multiplicativité de  $\mathfrak{C}$ , qu'on trouve dans le 1.3 de GF. Ca sera la

7. règle n° 7 :  $\mathfrak{C}(A \times B) = \mathfrak{C}(A) \times \mathfrak{C}(B)$ , où  $A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  est le produit cartésien de  $A \subset \mathbb{R}^n$  et  $B \subset \mathbb{R}^p$ .

En appliquant ce qu'on a vu sur les segments et cette règle, on obtient

$$\mathfrak{C}(\text{rectangle fermé de côtés } a, b) = ab\mathfrak{J}^2 + (a + b)\mathfrak{J} + 1 .$$

Cette formule est du type

$$\mathfrak{C}(F) = \mathcal{A}(F)\mathfrak{J}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{P}(F)\mathfrak{J} + 1 ,$$

où  $F$  est une "figure" plane,  $\mathcal{A}(F)$  son aire et  $\mathcal{P}(F)$  son périmètre. Cette formule est valide pour les rectangles. En utilisant des découpages, la règle d'additivité, et ce qu'on sait sur les segments, on la démontre

- pour les triangles rectangles (deux triangles rectangles égaux recollés le long de leurs hypothénuses font un rectangle)
- pour les parallélogrammes (qu'on peut découper dans un rectangle en enlevant deux triangles rectangles égaux)
- pour les triangles quelconques (on en recolle deux égaux pour faire un parallélogramme)
- pour un polygone compact convexe (en le découplant en triangles à partir d'un point intérieur).

Montons en dimension (ça tourne autour du 1.4 de GF). Toujours avec la multiplicativité, on a

$$\mathfrak{C}(\text{cube de côté } 1) = \mathfrak{J} + 3\mathfrak{J}^2 + 3\mathfrak{J} + 1 .$$

Si on écrase ce cube de côté 1 (patate) en un parallélépipède rectangle  $P$  de cotés  $\frac{1}{4}, 2, 2$  de même volume, on obtient

$$\mathfrak{C}(P) = \mathfrak{J}^3 + 5\mathfrak{J}^2 + \frac{17}{4}\mathfrak{J} + 1 .$$

Le "cardinal" de la patate écrasée est plus grand. Ca contredit le 1.17 de GF. De manière générale, pour un parallépipède rectangle  $a \times b \times c$ , on obtient

$$(a\mathfrak{J} + 1)(b\mathfrak{J} + 1)(c\mathfrak{J} + 1) = abc\mathfrak{J}^3 + (ab + bc + ca)\mathfrak{J}^2 + (a + b + c)\mathfrak{J} + 1$$

comme valeur de  $\mathfrak{C}$ . on remarque que le coefficient de  $\mathfrak{J}^3$  est le volume, et celui de  $\mathfrak{J}^2$  la moitié de la surface du parallépipède.

Pour l'intérieur de la patate, on a avec ce qu'on a vu pour les intervalles ouverts et la multiplicativité

$$\mathfrak{C}(\text{cube ouvert de côté } 1) = \mathfrak{J} - 3\mathfrak{J}^2 + 3\mathfrak{J} - 1 ,$$

$$\mathfrak{C}(\overset{\circ}{P}) = \mathfrak{J}^3 - 5\mathfrak{J}^2 + \frac{17}{4}\mathfrak{J} - 1 .$$

La patate ouverte écrasée est plus petite.

L'impression que ça donne c'est que le  $\mathfrak{C}$  fait comme si le cube compact était couvert d'une couche de peinture. Quand on l'écrase, la peinture ne suffit plus pour recouvrir toute la surface...

## 2e épisode : Couche de peinture et formule de Steiner-Minkowski

Reparlons de cette couche de peinture sur les polytopes (= polyèdre convexe compact). Je m'appuie ici sur le passage 12.3.5-6 du livre "Géométrie" de Marcel Berger, à qui j'ai emprunté la peinture.

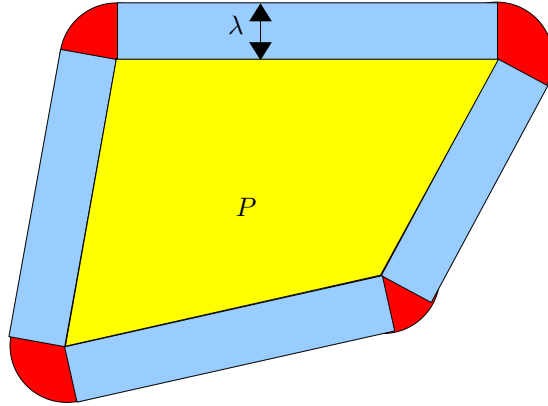
Dans ce texte, M. Berger explique comment on calcule le volume obtenu en passant une couche de peinture d'épaisseur  $\lambda$  sur le polytope  $P$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $B(P, \lambda)$  l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}^d$  qui sont à une distance  $\leq \lambda$  de  $P$  (c'est  $P$  avec sa couche de peinture). Berger note  $\mathcal{L}$  la mesure de Lebesgue. Sa proposition 12.3.6 dit :

Il existe des réels positifs  $\mathcal{L}_i(P)$ , ne dépendant que de  $P$ , tels que pour tout réel positif  $\lambda$ , on ait

$$\mathcal{L}(B(P, \lambda)) = \sum_{i=0}^d \mathcal{L}_i(P) \lambda^i$$

(formule de Steiner-Minkowski). Pour  $\lambda = 0$ , on a  $\mathcal{L}_0(P) = \mathcal{L}(P)$ , le volume de  $P$  pour la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ . Par ailleurs  $\mathcal{L}_1(P)$  est la "surface" de  $P$ , c.-à-d. la somme des volumes des faces de  $P$  pour la mesure de Lebesgue en dimension  $d - 1$ . Et  $\mathcal{L}_d(P)$  est  $\beta(d)$ , le volume de la boule unité de dimension  $d$ .

Berger donne la démonstration de cette proposition, et il la fait précéder de dessins qui l'expliquent en dimension 2 et 3.



En dimension 2, pour un polygone convexe compact  $P$ , on comprend bien en contemplant le dessin ci-dessus que le coefficient  $\mathcal{L}_1(P)$  de  $\lambda$  (zone bleue) dans la formule de Steiner-Minkowski est le périmètre, et que le coefficient de  $\lambda^2$  (zone rouge) est  $\pi$ .

Si  $P$  est un parallélépipède rectangle  $a \times b \times c$ , le calcul de la formule de Steiner-Minkowski peut se faire sans peine, pour aboutir à

$$abc + 2(ab + bc + ca)\lambda + \pi(a + b + c)\lambda^2 + \frac{4}{3}\pi\lambda^3 .$$

Le terme constant est le volume du parallélépipède, celui en  $\lambda$  vient des faces, celui en  $\lambda^2$  des arêtes (on a un "quart de rond" le long de chaque arête) et celui en  $\lambda^3$  des sommets (une huitième de sphère à chaque sommet)

L'analogie avec les formules pour le "cardinal"  $\mathfrak{C}$  obtenu à l'épisode précédent est frappante, et elle le deviennent encore plus si on normalise les coefficients  $\mathcal{L}_i(P)$  de la formule de Steiner-Minkowski par les volumes  $\beta(i)$  des boules unités de dimension  $i$ . Rappelons que  $\beta(0) = 1$ ,  $\beta(1) = 2$ ,  $\beta(2) = \pi$ ,  $\beta(3) = 4\pi/3$ .

Fort des exemples qu'on a vu, et aussi pour d'autres raisons qu'on verra plus tard, on peut affirmer :

**Théorème.** *Pour tout polytope  $P$  de dimension  $d$ , on a*

$$\mathfrak{C}(P) = \sum_{j=1}^d \mathfrak{c}_j(P) \mathfrak{V}^j ,$$

où les coefficients  $\mathfrak{c}_j(P)$  s'obtiennent à partir de la formule de Steiner-Minkowski par  $\mathfrak{c}_j(P) = \frac{1}{\beta(d-j)} \mathcal{L}_{d-j}(P)$ .