

# La saga du "cardinal"

Michel Coste

26 novembre 2007

Je voudrais développer une approche reprenant les grandes lignes de celle de Guillaume Foucart (à savoir, essayer de développer une notion de "cardinal"), mais en prenant plus de précautions que lui. Comme je n'aime pas trop cette appellation, je mettrai toujours des guillemets à "cardinal" ; je le noterai par  $\mathfrak{C}$ . Je n'ai pas l'ambition de le faire pour une grosse classe de parties de  $\mathbb{R}^n$ , mais de voir jusqu'où on peut aller raisonnablement. Je reprends des pistes que j'avais déjà données, de manière plus explicite cette fois ci.

## 1er épisode : Règles et calculs

1. Comme le pose GF dans son 1.1,  $\mathfrak{C}(\emptyset) = 0$  (1e règle).
2. Pour être sûr de ne pas oublier les petits, on pose (2e règle)

$$\mathfrak{C}(\text{un point}) = 1 .$$

3. On veut aussi une propriété d'additivité (3e règle - c'est dans le 1.1 de GF, mais on se limite prudemment aux réunions finies)

$$\mathfrak{C}(A \cup B) = \mathfrak{C}(A) + \mathfrak{C}(B) - \mathfrak{C}(A \cap B) ,$$

Remarquons qu'on en déduit  $\mathfrak{C}(n \text{ points}) = n$ . Ca va doucement, mais ça avance.

4. Une chose naturelle, c'est de demander que deux figures "égales" (superposables) aient même  $\mathfrak{C}$  (4e règle).
5. On demande aussi que  $\mathfrak{C}$  soit croissant (5e règle) :

$$A \subset B \Rightarrow \mathfrak{C}(A) \leq \mathfrak{C}(B) .$$

C'est aussi dans le 1.1 de GF.

Commençons comme GF à nous intéresser aux intervalles. Posons, pour faire court  $\mathfrak{S} := \mathfrak{C}(\text{segment de longueur } 1)$ . Par la propriété de croissance,  $\mathfrak{S}$  doit être plus grand que tous les entiers naturels. Pour avoir un segment de longueur 2, je peux mettre bout à bout deux segments de longueur 1, avec une extrémité en commun. Par les règles posées, ça me donne

$$\mathfrak{C}(\text{segment de longueur } 2) = 2\mathfrak{S} - 1 ,$$

et en recommençant, pour tout entier positif  $n$ ,

$$\mathfrak{C}(\text{segment de longueur } n) = n\mathfrak{S} - n + 1 ,$$

Ca s'écrit plus joliment en fonction de  $\mathfrak{J} := \mathfrak{S} - 1$  (ce  $-1$  pour les segments se trouve dans la proposition 1.4 de GF). On a alors

$$\mathfrak{C}(\text{segment de longueur } n) = n\mathfrak{J} + 1 .$$

Si maintenant on part d'un segment de longueur rationnelle, disons  $p/q$ , et qu'on en met  $q$  copies bout à bout, on trouve un segment de longueur  $p$ , et en utilisant de nouveau les règles on aboutit à

$$\mathfrak{C}(\text{segment de longueur rationnelle } r) = r\mathfrak{J} + 1 .$$

On a bien sûr envie de passer aux segments de longueur réelle. Pour ceci, on a besoin d'une

6. règle n° 6 qui stipule que  $\mathfrak{C}$  possède une propriété de continuité qui permette d'avoir  $\lim \mathfrak{C}([0, u_n]) = \mathfrak{C}([0, \lim u_n])$  et de conclure que

$$\mathfrak{C}(\text{segment de longueur réelle } r) = r\mathfrak{J} + 1 .$$

Cette règle n°6 de continuité demande bien sûr à être précisée. On y reviendra plus tard.

Quand on retire les deux points extrémités d'un segment, on a un intervalle ouvert. Suivant les règles :

$$\mathfrak{C}(\text{intervalle ouvert de longueur réelle } r) = r\mathfrak{J} - 1 .$$

Bon passons à des objets de dimension supérieure. On va demander une propriété de multiplicativité de  $\mathfrak{C}$ , qu'on trouve dans le 1.3 de GF. Ca sera la

7. règle n° 7 :  $\mathfrak{C}(A \times B) = \mathfrak{C}(A) \times \mathfrak{C}(B)$ , où  $A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  est le produit cartésien de  $A \subset \mathbb{R}^n$  et  $B \subset \mathbb{R}^p$ .

En appliquant ce qu'on a vu sur les segments et cette règle, on obtient

$$\mathfrak{C}(\text{rectangle fermé de côtés } a, b) = ab\mathfrak{J}^2 + (a + b)\mathfrak{J} + 1 .$$

Cette formule est du type

$$\mathfrak{C}(F) = \text{aire}(F) \mathfrak{J}^2 + \frac{1}{2} \text{périmètre}(F) \mathfrak{J} + 1 ,$$

où  $F$  est une "figure" plane. Cette formule est valide pour les rectangles. En utilisant des découpages, la règle d'additivité, et ce qu'on sait sur les segments, on la démontre

- pour les triangles rectangles (deux triangles rectangles égaux recollés le long de leurs hypothénuses font un rectangle)
- pour les parallélogrammes (qu'on peut découper dans un rectangle en enlevant deux triangles rectangles égaux)
- pour les triangles quelconques (on en recolle deux égaux pour faire un parallélogramme)
- pour un polygone compact convexe (en le découpant en triangles à partir d'un point intérieur).

Montons en dimension (ça tourne autour du 1.4 de GF). Toujours avec la multiplicativité, on a

$$\mathfrak{C}(\text{cube de côté } 1) = \mathfrak{J} + 3\mathfrak{J}^2 + 3\mathfrak{J} + 1 .$$

Si on écrase ce cube de côté 1 (patate) en un parallélépipède rectangle  $P$  de cotés  $\frac{1}{4}, 2, 2$  de même volume, on obtient

$$\mathfrak{C}(P) = \mathfrak{J}^3 + 5\mathfrak{J}^2 + \frac{17}{4}\mathfrak{J} + 1 .$$

Le "cardinal" de la patate écrasée est plus grand. Ca contredit le 1.17 de GF. De manière générale, pour un parallélépipède rectangle  $a \times b \times c$ , on obtient

$$(a\mathfrak{J} + 1)(b\mathfrak{J} + 1)(c\mathfrak{J} + 1) = abc\mathfrak{J}^3 + (ab + bc + ca)\mathfrak{J}^2 + (a + b + c)\mathfrak{J} + 1$$

comme valeur de  $\mathfrak{C}$ . on remarque que le coefficient de  $\mathfrak{J}^3$  est le volume, et celui de  $\mathfrak{J}^2$  la moitié de la surface du parallélépipède.

Pour l'intérieur de la patate, on a avec ce qu'on a vu pour les intervalles ouverts et la multiplicativité

$$\mathfrak{C}(\text{cube ouvert de côté } 1) = \mathfrak{J} - 3\mathfrak{J}^2 + 3\mathfrak{J} - 1 ,$$

$$\mathfrak{C}(\overset{\circ}{P}) = \mathfrak{J}^3 - 5\mathfrak{J}^2 + \frac{17}{4}\mathfrak{J} - 1 .$$

La patate ouverte écrasée est plus petite.

L'impression que ça donne c'est que le  $\mathfrak{C}$  fait comme si le cube compact était couvert d'une couche de peinture. Quand on l'écrase, la peinture ne suffit plus pour recouvrir toute la surface...

## 2e épisode : Couche de peinture et formule de Steiner-Minkowski

Reparlons de cette couche de peinture sur les polytopes (= polyèdre convexe compact). Je m'appuie ici sur le passage 12.3.5-6 du livre "Géométrie" de Marcel Berger, à qui j'ai emprunté la peinture.

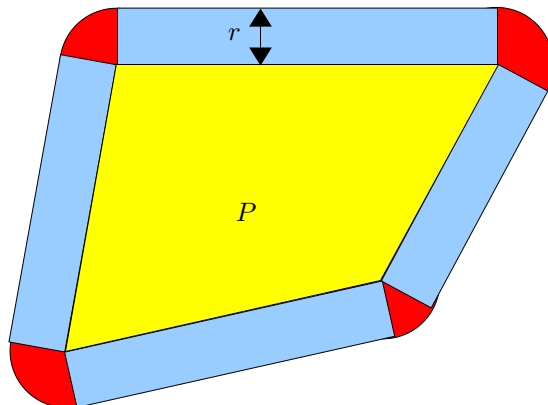
Dans ce texte, M. Berger explique comment on calcule le volume obtenu en passant une couche de peinture d'épaisseur  $r$  sur le polytope  $P$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $B(P, r)$  l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}^d$  qui sont à une distance  $\leq r$  de  $P$  (c'est  $P$  avec sa couche de peinture). Notons  $\lambda_d$  la mesure de Lebesgue en dimension  $d$  (Berger la note  $\mathcal{L}$ ). Sa proposition 12.3.6 dit :

*Il existe des réels positifs  $\mathcal{L}_{i,d}(P)$ , ne dépendant que de  $P$ , tels que pour tout réel positif  $r$ , on ait*

$$\lambda_d(B(P, r)) = \sum_{i=0}^d \mathcal{L}_{i,d}(P) r^i$$

*(formule de Steiner-Minkowski). Pour  $r = 0$ , on a  $\mathcal{L}_{0,d}(P) = \lambda_d(P)$ , le volume de  $P$ . Par ailleurs  $\mathcal{L}_{1,d}(P)$  est la "surface" de  $P$ , c.-à-d. la somme des volumes des faces de  $P$  pour la mesure de Lebesgue en dimension  $d-1$ . Et  $\mathcal{L}_{d,d}(P)$  est  $\beta(d)$ , le volume de la boule unité de dimension  $d$ .*

Berger donne la démonstration de cette proposition, et il la fait précéder de dessins qui l'expliquent en dimension 2 et 3.



En dimension 2, pour un polygone convexe compact  $P$ , on comprend bien en contemplant le dessin ci-dessus que le coefficient  $\mathcal{L}_{1,2}(P)$  de  $r$  (zone bleue) dans la formule de Steiner-Minkowski est le périmètre, et que le coefficient de  $r^2$  (zone rouge) est  $\pi$ .

Si  $P$  est un parallélépipède rectangle  $a \times b \times c$ , le calcul de la formule de Steiner-Minkovski peut se faire sans peine, pour aboutir à

$$abc + 2(ab + bc + ca)r + \pi(a + b + c)r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

Le terme constant est le volume du parallélépipède, celui en  $r$  vient des faces, celui en  $r^2$  des arêtes (on a un "quart de rond" le long de chaque arête) et celui en  $r^3$  des sommets (une huitième de sphère à chaque sommet)

L'analogie avec les formules pour le "cardinal"  $\mathfrak{C}$  d'un polygone convexe compact ou d'un parallélépipède rectangle obtenu à l'épisode précédent est frappante, et elle le devient encore plus si on normalise les coefficients  $\mathcal{L}_{i,d}(P)$  de la formule de Steiner-Minkovski par les volumes  $\beta(i)$  des boules unités de dimension  $i$ . Rappelons que  $\beta(0) = 1$ ,  $\beta(1) = 2$ ,  $\beta(2) = \pi$ ,  $\beta(3) = 4\pi/3$ .

Fort des exemples qu'on a vu, osons le :

**Théorème.** *Pour tout polytope  $P$  de dimension  $d$ , on a*

$$\mathfrak{C}(P) = \sum_{j=1}^d c_j(P) \mathfrak{I}^j ,$$

où les coefficients  $c_j(P)$  s'obtiennent à partir de la formule de Steiner-Minkovski par  $c_j(P) = \frac{1}{\beta(d-j)} \mathcal{L}_{d-j,d}(P)$ .

Pour le moment, ce "Théorème" n'est qu'une conjecture...

### 3e épisode : Des polyèdres aux patates

Dans cet épisode, nous allons voir comment passer des polyèdres convexes compacts aux "patates" (=compacts) connexes. Ceci nous permettra de préciser la règle de continuité pour le "cardinal"  $\mathfrak{C}$ .

Encore une fois nous faisons appel à M. Berger, qui introduit dans son livre "Géométrie", en 9.11, la distance de Hausdorff entre deux parties compactes  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}^d$ . Cette distance est le max des distances de tous les  $x \in A$  à  $B$  et de toutes les distances des  $y \in B$  à  $A$ . Il montre en 12.9 comment approcher des compacts convexes quelconques par des polyèdres compacts convexes, et il montre (théorème 12.10.6) que la formule de Steiner-Minkovski passe bien à la limite, donnant une formule de Steiner-Minkovski pour les patates convexes.

Précisons la condition de continuité (règle 6 imposée au cardinal  $\mathfrak{C}$ ) : les coefficients du cardinal sont continus pour la topologie de Hausdorff SUR LA CLASSE DES CONVEXES COMPACTS. On a alors un cardinal pour toute patate convexe  $P$  non vide dans  $\mathbb{R}^d$ , avec une formule

$$\mathfrak{C}(P) = \sum_{j=0}^d \mathfrak{c}_j(P) \mathfrak{J}^j ,$$

où :

$$\mathfrak{c}_j(P) = \frac{1}{\beta(d-j)} \mathcal{L}_{d-j,d}(P) .$$

Prenons un exemple. Il est facile de calculer la formule de Steiner-Minkovski pour une boule de rayon  $R$  : on développe comme polynôme en  $r$  le volume de la boule de rayon  $R+r$ . Ça fait :

$$\frac{4}{3} \pi R^3 + 4\pi R^2 r + 4\pi R r^2 + \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

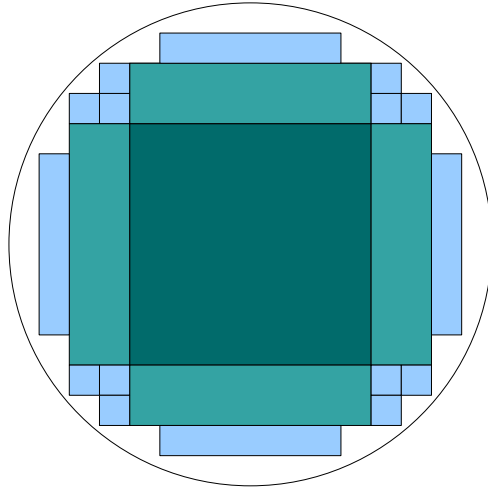
Et hop, voici le cardinal de la boule (de dimension 3) de rayon  $R$  :

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \mathfrak{J}^3 + 2\pi R^2 \mathfrak{J}^2 + 4R\mathfrak{J} + 1 .$$

On voit le volume, la moitié de la surface, mais que représente le coefficient de  $\mathfrak{J}$ ? Vous en aurez une interprétation au prochain épisode.

Et puis aussi, il faudra bien un jour se rassurer sur la validité de notre théorème conjectural, base du calcul du "cardinal" via la formule de Steiner-Minkovski...

Le lecteur (la lectrice) ne s'est sans doute pas rendu compte qu'on a frolé la catastrophe dans le passage aux compacts convexes généraux. Pour s'en convaincre, prenons un exemple. Nous voulons calculer le "cardinal" d'un disque de rayon 1. Une manière de faire serait de remplir le disque en utilisant les carreaux d'un pavage de plus en plus fin, comme indiqué sur le dessin suivant.



On voit facilement par récurrence en utilisant la règle d'additivité que le "cardinal" d'une telle réunion de carreaux est toujours donné par

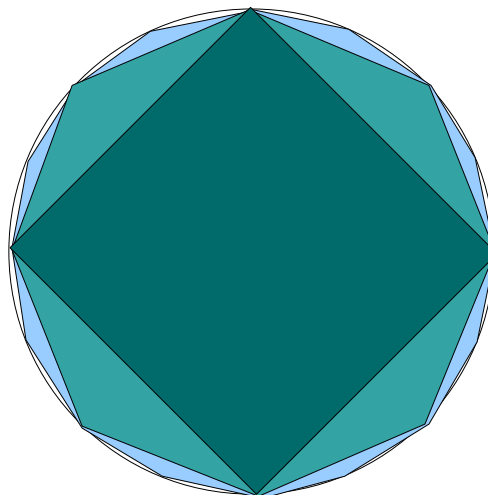
$$\text{aire} \times \mathcal{J}^2 + \frac{1}{2} \text{périmètre} \times \mathcal{J} + 1 ,$$

et à la limite on obtient

$$\pi \mathcal{J}^2 + 4 \mathcal{J} + 1 .$$

En effet vu que le bord d'une réunion de carreaux est formé de segments parallèles aux axes, son demi-périmètre est toujours la somme de sa hauteur et de sa largeur.

Une autre manière de faire est d'approcher le cercle par des polygones convexes avec des côtés de plus en plus petits, comme sur le dessin suivant.



Ici la limite pour le "cardinal" est

$$\pi \mathcal{J}^2 + \pi \mathcal{J} + 1 ,$$

ce qui est différent de la limite pour la première approximation. Pourtant, les deux approximations convergent bien vers le disque unité pour la distance de Hausdorff. Le problème est rigoureusement le même pour le cardinal et pour la formule de Steiner-Minkovski. On voit pourquoi il était crucial de ne travailler qu'avec des polyèdres CONVEXES compacts; heureusement, avec ceux-ci, on trouve toujours la même limite quelle que soit la manière dont on approxime (voir Berger).

L'exemple des deux manières de remplir le disque donnant des limites différentes montre aussi qu'il serait imprudent de manier des sommes infinies de "cardinaux".

## 4e épisode : À la recherche du coefficient mystérieux

Pour un ensemble convexe compact  $C$  non vide de  $\mathbb{R}^3$ , la formule du "cardinal"

$$\mathfrak{C}(C) = \mathfrak{c}_3(C)\mathfrak{J}^3 + \mathfrak{c}_2(C)\mathfrak{J}^2 + \mathfrak{c}_1(C)\mathfrak{J} + 1$$

contient des coefficients bien identifiés :  $\mathfrak{c}_3(C)$  est le volume de  $C$ ,  $\mathfrak{c}_2(C)$  est la moitié de sa surface. Mais que représente  $\mathfrak{c}_1(C)$  ?

J'assène la réponse :  $\mathfrak{c}_1(C)$  est proportionnel à la largeur moyenne de  $C$ . D'abord, qu'est-ce que ça veut dire? Si on fixe une direction de droite, on peut serrer notre compact connexe  $C$  entre deux plans perpendiculaires à cette direction; la distance entre les deux plans est alors la largeur de  $C$  dans cette direction. Ensuite, on prend la moyenne pour toutes les directions. On prend cette moyenne en intégrant sur la sphère unité et en divisant par la surface de la sphère (à une direction correspondent sur la sphère deux vecteurs unitaires opposés).

Admettons la réponse, et cherchons le coefficient de proportionnalité. On peut le trouver en prenant pour  $C$  la boule unité dans  $\mathbb{R}^3$ , pour laquelle on connaît le cardinal

$$\frac{4}{3}\pi\mathfrak{J}^3 + 2\pi\mathfrak{J}^2 + 4\mathfrak{J} + 1.$$

Ici la largeur dans toutes les directions est 2, et donc la largeur moyenne est 2. Conclusion : pour  $C$  convexe compact dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathfrak{c}_1(C)$  est deux fois la largeur moyenne de  $C$ .

Faisons une petite vérification pour un segment de longueur 1. Il faut calculer la moyenne de la longueur de sa projection sur une droite dirigée par un vecteur unitaire parcourant la sphère. Ca fait

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta (2\pi \cos \theta) d\theta = \frac{1}{2}.$$

Comme le cardinal du segment de longueur 1 est  $\mathfrak{J} + 1$ , on a bien encore que  $\mathfrak{c}_1$  est deux fois la largeur moyenne dans  $\mathbb{R}^3$ .

Si on connaît le cardinal, on en déduit la largeur moyenne. Par exemple, pour un parallélépipède rectangle  $a \times b \times c$ , on a vu que  $\mathfrak{c}_1 = a + b + c$ , et donc la largeur moyenne est  $\frac{1}{2}(a + b + c)$ . Autre exemple : on peut calculer le cardinal

d'un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $h$  en faisant le produit du cardinal d'un disque de rayon  $R$  avec le cardinal d'un segment de longueur  $h$ ; ça donne

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}(\text{cylindre}) &= (\pi R^2 \mathfrak{J} + \pi R \mathfrak{J} + 1)(h \mathfrak{J} + 1) \\ &= \pi R^2 h \mathfrak{J}^3 + \pi(R^2 + Rh) \mathfrak{J}^2 + (h + \pi R) \mathfrak{J} + 1 ,\end{aligned}$$

et donc la largeur moyenne est  $\frac{1}{2}(h + \pi R)$ .

Ca a l'air trop beau pour être vrai. Pour justifier mes dires, je vais faire intervenir un grand maître : Jean Dieudonné himself, pages 175 et suivantes du tome 3 des ses "Eléments d'Analyse". Attention, il va falloir s'accrocher. Dieudonné, il ne rigole pas ! Il utilise des notations qui ne sont pas celles de Berger. Je vais unifier, pour la cohérence du présent texte. Dieudonné note  $V_n$  est le volume de la boule unité de dimension  $n$ , que nous continuerons de noter  $\beta(n)$ . Il utilise la forme  $\sigma^{(n-1)}$  qui donne la mesure usuelle sur la sphère unité  $S_{n-1}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On se rappelle que la "surface" de la sphère unité, soit  $\int_{S_{n-1}} \sigma^{(n-1)}(u)$ , vaut  $n\beta(n)$ . Par exemple pour  $n = 2$ ,  $\beta(2) = \pi$  et le périmètre du cercle unité est  $2\pi$ . Pour  $n = 3$  le volume de la boule unité est  $\frac{4}{3}\pi$  et la surface de la sphère  $4\pi$ , etc. (et pour  $n = 1$  ?).

La partie qui nous intéresse est formée des exercices 3 à 9. Je les commente un peu, de façon qu'on puisse suivre le fil du discours sans se référer à Dieudonné..

Les exercices 3 et 4 établissent la formule de Cauchy donnant la surface d'un corps convexe compact  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  (c'est la formule (2) page 175). Elle dit que la surface de  $C$  est égale à la moyenne des  $\lambda_{n-1}$  des projections orthogonales de  $C$  sur des hyperplans, multipliée par  $n\beta(n)/\beta(n-1)$ . Cette formule de Cauchy se trouve aussi chez Berger (c'est le 12.10.2). Berger explique (pour  $n = 2$ ) l'application aux courbes de largeur constante, comme le triangle de Reuleaux : le périmètre d'une telle courbe est toujours  $\pi$  fois la largeur, comme pour le cercle.

Avec l'exercice 5, on rentre dans le vif du sujet. J. Dieudonné définit pour un corps convexe compact  $C$  dans  $\mathbb{R}^n$  des quantités  $W_{i,n}(C)$ . La première,  $W_{0,n}(C)$ , est simplement la mesure de Lebesgue  $\lambda_n(C)$ . Les autres  $W_{i,n}(C)$  sont définis par récurrence, et quand on pousse cette récurrence jusqu'à descendre à  $W_{0,n-i}$ , on s'aperçoit que  $W_{i,n}(C)$  vaut  $\beta(n)/\beta(n-i)$  fois la moyenne des mesures  $\lambda_{n-i}$  des projections orthogonales de  $C$  sur un sous-espace de dimension  $n-i$ . D'après la formule de Cauchy qu'on vient de voir,  $W_{1,n}(C)$  est  $1/n$  fois la surface de  $C$ . Oh, oh ! Ça ressemble bigrement (au facteur  $n$  près) au  $\mathcal{L}_{1,n}(C)$  de la formule de Steiner-Minkovski ! Ces  $W_{i,n}$  sont continus pour la topologie de Hausdorff, et vérifient la propriété d'additivité (tiens, tiens)

$$W_{i,n}(A \cup B) = W_{i,n}(A) + W_{i,n}(B) - W_{i,n}(A \cap B) .$$

Le 6 ne fait qu'explicitier  $W_{n-1,n} : W_{n-1,n}(C)$ , c'est  $\beta(n)/2$  fois la largeur moyenne de  $C$ . Tiens, tiens ;  $W_{2,3}(C)$  ressemble aussi (à un facteur 3 près) au  $\mathcal{L}_{2,3}(C)$  de la formule de Steiner-Minkovski .

La formule de Steiner-Minkovski, on est justement en plein dedans avec l'exercice 7. Le  $V_r(C)$  de Dieudonné n'est autre que le  $B(C, r)$  de Berger, le corps  $C$  sur lequel on a passé une couche de peinture d'épaisseur  $r$ . La formule



qui donne son volume

$$\lambda_n(B(C, r)) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} W_{j,n}(C) r^j$$

nous dit que les  $W_{j,n}$  sont les coefficients  $\mathcal{L}_{j,n}$  de la formule de Steiner Minkovski avec normalisation donnée par les coefficients binomiaux :  $\mathcal{L}_{j,n} = \binom{n}{j} W_{j,n}$ . Pour les coefficients du "cardinal", on avait normalisé avec les volumes des boules unités. Le rapport entre les coefficients  $\mathbf{c}_i(C)$  du "cardinal" et les  $W_{j,n}$  s'établit donc comme suit :

$$\mathbf{c}_i(C) = \frac{1}{\beta(n-i)} \binom{n}{i} W_{n-i,n}(C),$$

pour tout corps convexe compact dans  $\mathbb{R}^n$ .

Dans la phrase précédente, "corps" indique que l'intérieur est non vide. L'exercice 8 permet de passer à tous les ensembles convexes non vides. La formule de comparaison donnée par Dieudonné entre  $W_{i,n}$  et  $W_{i-1,n-1}$  pour un ensemble de dimension  $< n$  est nettement plus sympathique quand on l'écrit avec les coefficients du "cardinal" : c'est simplement  $\mathbf{c}_{n-i} = \mathbf{c}_{n-i}!$

Et dans l'exercice 9, la formule horrible avec les  $W$  devient aussi beaucoup plus sympathique vue du côté "cardinal". Prenez un crayon et du papier, et vous trouvez

$$\mathbf{c}_{p+q-i}(A \times B) = \sum_{j=0}^i \mathbf{c}_{p-j}(A) \mathbf{c}_{q-i+j}(B),$$

qui exprime simplement la multiplicativité du "cardinal" !

Si ça colle aussi bien, c'est vraiment que ça doit être du sérieux, cette histoire de "cardinal" ! C'est pas Dieudonné qui irait raconter des choses farfelues.

Pourtant, un doute nous assaille. Tout ce chateau de sable, on l'a bâti sur notre théorème conjectural d'identification entre la "cardinal" et la formule de Steiner-Minkovski et cette conjecture était vérifiée juste en dimension 2 et pour un parallélépipède rectangle. D'accord, grâce à Dieudonné on sait maintenant que le "cardinal" construit à partir de la formule de Steiner Minkovski vérifie les 7 règles qu'on demandait au "cardinal". Mais est-ce que c'est le seul ?

Allez, je ne vous fait pas languir plus longtemps. Le fait qu'il n'y a qu'un seul "cardinal" vérifiant les règles découle d'un résultat relativement récent (début des années 1950), démontré par Hugo Hadwiger (vous pouvez trouver son théorème sur le Wikipedia en anglais, en cherchant Hadwiger's theorem) :

*Fixons  $n$ . On appelle valuation une fonction  $v$  sur l'ensemble des parties compactes convexes de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  vérifiant la relation d'additivité  $v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$  (quand  $A \cup B$  est convexe). Alors les valuations prenant la même valeur pour des ensembles superposables et continues pour la topologie de Hausdorff forment un espace vectoriel de base  $W_{0,n}, W_{1,n}, \dots, W_{n,n}$ .*

Il faut encore un peu travailler à partir du théorème de Hadwiger, mais essentiellement la messe est dite.

D'accord. Mais il y en a un peu ras-le-bol des convexes compacts. Si on passait à autre chose ? Je sais pas moi, une sphère (creuse), ou un tore ?

## 5e épisode : Ras-le bol des convexes

Pour s'échapper des convexes compacts, on peut déjà faire des unions finies de convexes, et calculer le "cardinal" en utilisant l'additivité. Par exemple, pour le bord du carré unité formé de quatre segments de longueur 1 avec les quatre sommets paratagés par deux segments, on trouve comme "cardinal"  $4(\mathcal{J} + 1) - 4 = 4\mathcal{J}$ . Puis, si on colle ensemble  $k$  bords de carrés, on va trouver  $(3k+1)\mathcal{J} + 1 - k$ . Ici le coefficient constant est négatif, et vous reconnaitrez la caractéristique d'Euler du graphe dessiné (vous savez, nombre de sommets - nombres d'arêtes).



Bon, c'est trop facile. Essayons plutôt avec un tore solide engendré par un disque de rayon  $R$  tournant autour d'un axe, avec  $a$  la distance du centre de disque à l'axe ( $a > R$ ). Alors on peut refaire le coup de la couche de peinture d'épaisseur  $r$  pour calculer le "cardinal" du tore. Avec cette couche de peinture, il faut calculer le volume du tore engendré cette fois par le disque de rayon  $R+r$ , et c'est facile avec la formule de Guldin :  $2\pi a \times \pi(R+r)^2$ , soit  $2\pi^2 a R^2 + 4\pi^2 a Rr + 2\pi^2 a r^2$ , et donc voici le "cardinal" du tore

$$2\pi^2 a R^2 \mathcal{J}^3 + 2\pi^2 a R \mathcal{J}^2 + 2a \mathcal{J}.$$

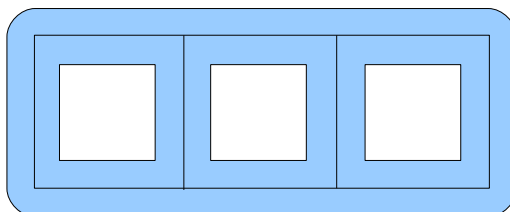
Bon, le coefficient de  $\mathcal{J}^3$  est le volume, celui de  $\mathcal{J}^2$  la moitié de la surface (encore Guldin), le terme constant est la caractéristique d'Euler, nulle pour le tore. Le coefficient de  $\mathcal{J}$  ?

Toujours armé de notre pot de peinture, attaquons-nous au "cardinal" de la sphère de rayon  $R$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Une fois qu'on a bien passé une couche d'épaisseur  $r$  des deux côtés (intérieur et extérieur), le volume obtenu est la différence de volume entre une boule de rayon  $R+r$  et une boule de rayon  $R-r$ , soit  $\frac{4}{3}\pi(6R^2r + 2r^3)$ , d'où le "cardinal" de la sphère

$$4\pi R^2 \mathcal{J}^2 + 2.$$

L'aire de la sphère en coefficient de  $\mathcal{J}^2$ , sa caractéristique d'Euler en terme constant. Rien de surprenant. Visiblement, le coefficient de  $\mathcal{J}$  n'aurait plus à voir avec une largeur moyenne.

Et si on essayait le coup de la couche de peinture d'épaisseur  $r$  sur notre grille formée de bords de carrés recollés ?



La surface qu'on trouve ici est celle du rectangle arrondi,

$$(1 + 2r) \times (k + 2r) - (4 - \pi)r^2 ,$$

moins  $k$  fois celle d'un carré de côté  $1 - 2r$ , ce qui fait  $(6k + 2)r + (\pi - 4k)r^2$ . Pour le cardinal :  $(3k + 1)\mathfrak{J} + 1 - \frac{4k}{\pi}$ . Aïe aïe aïe, la cata ! Ce n'est pas ce qu'on avait trouvé par additivité. Le terme constant n'est même plus entier. Est-ce que tout est fichu ? On peut jeter à la poubelle nos calculs pour le tore et la sphère ?

Heureusement non. Le fait que la technique de la couche de peinture ne marche pas pour calculer le "cardinal" dans le cas de la grille vient, on le sent bien, des coins intérieurs. De manière précise, il y a dans les coins intérieurs des points aussi proches qu'on veut de la grille et qui ont deux points sur la grille réalisant le minimum de distance.

Ceci n'arrive pas pour un ensemble convexe compact non vide  $K$  (dans ce cas il y a toujours un unique point le plus proche sur  $K$ ) ou pour une sous-variété lisse compacte  $M$  de  $\mathbb{R}^n$ . Dans ce dernier cas, pour  $r$  suffisamment petit, tout point à une distance  $\leq r$  de  $M$  a un unique point le plus proche sur  $M$  ; ces points à une distance  $\leq r$  forment un tube  $B(M, r)$ , et Hermann Weyl a établi que le volume d'un tube de rayon  $r$  est donné par un polynôme en  $r$ . Vous pouvez voir cette formule du tube dans le livre de Géométrie différentielle de Berger et Gostiaux, par exemple. On y explique que les coefficients de ce polynôme sont donnés par des intégrales de certaines courbures.

On a aussi une formule du tube pour des sous-variétés compactes  $K$  à bord  $\partial K$ , qui coïncide avec la formule de Steiner-Minkovski pour les corps convexes compacts à bord lisse. On peut utiliser cette formule du tube pour étendre la notion de "cardinal". Si  $K$  est de dimension  $n$ , le coefficient  $c_i(K)$  du "cardinal" (pour  $i < n$ ) est donné par l'intégrale

$$c_i(K) = c_{i,n} \int_{\partial K} \sigma_{n-i-1}(k_1(p), \dots, k_{n-1}(p)) dp ,$$

où  $k_1(p), \dots, k_{n-1}(p)$  sont les courbures principales en  $p \in \partial K$ , et  $\sigma_{n-i-1}$  le  $(n - i - 1)$ ème polynôme symétrique élémentaire. On peut déterminer les constantes  $c_{i,n}$  en prenant pour  $K$  une boule de rayon  $R$ , pour laquelle les courbures principales du bord valent toutes  $1/R$ . Par exemple, on sait que pour une boule  $B$  de rayon  $R$  en dimension 3, on a

$$4R = c_1(B) = c_{1,3} \int_{\partial B} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) dp = c_{1,3} \frac{2}{R} 4\pi R^2 = 8\pi R ,$$

d'où  $c_{1,3} = \frac{1}{2\pi}$ . Donc, si on a une variété à bord compacte  $K$  de dimension 3, le coefficient de  $\mathfrak{J}$  dans le cardinal de  $K$  est  $\frac{1}{\pi}$  fois l'intégrale de la courbure moyenne sur le bord de  $K$  (la courbure moyenne est  $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ ). Pour le tore dont le centre du disque est à distance  $a$  de l'axe, on trouve que l'intégrale de la courbure moyenne est  $2\pi a$ .

Signalons aussi que l'écriture du terme constant du cardinal comme intégrale de courbure n'est autre que la célèbre formule de Gauss-Bonnet qui donne la caractéristique d'Euler comme une constante fois l'intégrale de la courbure de Gauss (produit des courbures principales)

L'extension de ces intégrales de courbure du cas des sous-variétés lisses compactes, éventuellement à bord, à celui de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  pouvant présenter des singularités a été réalisé ces dernières années, principalement par Martina Zähle, Joseph Fu, Ludwig Bröcker et Andreas Bernig. Ces deux derniers auteurs ont démontré l'existence et l'unicité du "cardinal" vérifiant les règles posées au départ (avec une condition de continuité pour une topologie étendant la topologie de Hausdorff sur les convexes compacts et dont la description est un peu compliquée techniquement) sur des classes de compacts qui admettent une bonne décomposition en un nombre fini de morceaux difféomorphes à des pavés ouverts de différentes dimensions. (La décomposition que Guillaume Foucart essayait de mettre en place, sans les outils nécessaires, fait penser à ça)

## Épilogue

Finalement, on a vu que la notion de "cardinal" nous amène à voir pas mal de mathématiques, notamment tout un pan de la géométrie convexe. Ce domaine est encore bien vivant, on peut avoir un aperçu de développements récents dans la conférence invitée de Semyon Alesker au congrès international des mathématiciens de Pékin (2002).

En dehors de la géométrie convexe, la notion d'invariant additif associé à un objet géométrique (comme l'est le cardinal par sa règle n°3) est aussi au coeur d'importants progrès récents, comme l'intégration motivique introduite par Maxim Kontsevich et développée notamment par Jan Denef et François Loeser.

Certaines familles d'invariants additifs se regroupent naturellement en un polynôme, à la façon du "cardinal" : on peut citer le polynôme de Hodge en géométrie algébrique complexe. L'invariance dans ce cas est pour les isomorphismes algébriques, pas pour les isométries comme dans le cas du "cardinal". A ma connaissance, ce sont A. Bernig et L. Bröcker qui ont les premiers regroupé les courbures de Lipschitz-Killing en un polynôme, créant le "cardinal" dont on a raconté la saga.