Bonjour,

Et voilà, c'est reparti pour un tour !

Le document de GF est toujours aussi foutraque. Pourtant c'est sympathique comme approche : Lebesgue écrase les maigres, non à la discrimination anti-maigre ! Les petits ont le droit de vivre et d'être pris en compte !

Plus sérieusement, je voudrais développer une approche reprenant les grandes lignes de celle de GF, mais en prenant plus de précautions que lui. A savoir, essayer de développer une notion de "cardinal". Comme je n'aime pas trop cette appellation, je ne l'appellerai pas et je me contenterai de la noter par $\mathfrak{C}$. Je n'ai pas l'ambition de le faire pour une grosse classe de parties de $\mathbb{R}^n$, mais de voir jusqu'où on peut aller raisonnablement. Je reprends des pistes que j'avais déjà données, de manière plus explicite cette fois ci.

Comme le pose GF dans son 1.1, $\mathfrak{C}(\emptyset) = 0$ (1e règle).

Pour être sûr de ne pas oublier les petits, on pose (2e règle)

$$\mathfrak{C}(\text{un point}) = 1 \ .$$

On veut aussi une propriété d'additivité (3e règle - c'est dans le 1.1 de GF, mais on se limite prudemment aux réunions finies)

$$\mathfrak{C}(A \cup B) = \mathfrak{C}(A) + \mathfrak{C}(B) - \mathfrak{C}(A \cap B) \ ,$$

Remarquons qu'on en déduit $\mathfrak{C}(n \text{ points}) = n$. Ca va doucement, mais ça avance.

Une chose naturelle, c'est de demander que deux figures "égales" (superposables) aient même $\mathfrak{C}$ (4e règle).

On demande aussi que $\mathfrak{C}$ soit croissant (5e règle) :

$$A \subset B \Rightarrow \mathfrak{C}(A) \leq \mathfrak{C}(B) \ .$$

C'est aussi dans le 1.1 de GF.

Commençons comme GF à nous intéresser aux intervalles. Posons, pour faire court $\mathfrak{S} := \mathfrak{C}(\text{segment de longueur } 1)$. Par la propriété de croissance, $\mathfrak{S}$ doit être plus grand que tous les entiers naturels. Pour avoir un segment de longueur 2, je peux mettre bout à bout deux segments de longueur 1, avec une extrémité en commun. Par les règles posées, ça me donne

$$\mathfrak{C}(\text{segment de longueur } 2) = 2\mathfrak{S} - 1 \ ,$$

et en recommençant, pour tout entier positif n,

$$\mathfrak{C}(\text{segment de longueur } n) = n\mathfrak{S} - n + 1 \ ,$$

Ca s'écrit plus joliment en fonction de $\mathfrak{I} := \mathfrak{S} - 1$ (ce -1 pour les segments se trouve dans la proposition 1.4 de GF). On a alors

$$\mathfrak{C}(\text{segment de longueur } n) = n\mathfrak{I} + 1 \ .$$

Si maintenant on part d'un segment de longueur rationnelle, disons p/q, et qu'on en met q copies bout à bout, on trouve un segment de longueur p, et en utilisant de nouveau les règles on aboutit à

$$\mathfrak{C}(\text{segment de longueur rationnelle } r) = r\mathfrak{I} + 1 \ .$$

On a bien sûr envie de passer aux segments de longueur réelle. Pour ceci, on a besoin d'une règle n° 6 qui stipule que $\mathfrak{C}$ possède une propriété de continuité qui permet de conclure que

$$\mathfrak{C}(\text{segment de longueur réelle } r) = r\mathfrak{I} + 1 \; .$$

Cette règle n°6 de continuité demande bien sûr à être précisée. On y reviendra plus tard.

Quand on retire les deux points extrémités d'un segment, on a un intervalle ouvert. Suivant les règles :

$$\mathfrak{C}(\text{intervalle ouvert de longueur réelle } r) = r\mathfrak{I} - 1 \; .$$

Bon passons à des objets de dimension supérieure. On va demander une propriété de multiplicativité de $\mathfrak{C}$, qu'on trouve dans le 1.3 de GF. Ca sera la règle n° 7 :

$$\mathfrak{C}(A \times B) = \mathfrak{C}(A) \times \mathfrak{C}(B) \; ,$$

où $A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ est le produit cartésien de $A \subset \mathbb{R}^n$ et $B \subset \mathbb{R}^p$.

En appliquant ce qu'on a vu sur les segments et cette règle, on obtient

$$\mathfrak{C}(\text{rectangle fermé de côtés } a, b) = ab\mathfrak{I}^2 + (a+b)\mathfrak{I} + 1 \; .$$

Cette formule est du type

$$\mathfrak{C}(F) = \mathcal{A}(F)\,\mathfrak{I}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{P}(F)\,\mathfrak{I} + 1 \; ,$$

où F est une "figure" plane, $\mathcal{A}(F)$ son aire et $\mathcal{P}(F)$ son périmètre. Cette formule est valide pour les rectangles. En utilisant des découpages, la règle d'additivité, et ce qu'on sait sur les segments, on la démontre

- pour les triangles rectangles (deux triangles rectangles égaux recollés le long de leurs hypothénuses font un rectangle)
- pour les parallélogrammes (qu'on peut découper dans un rectangle en enlevant deux triangles rectangles égaux)
- pour les triangles quelconques (on en recolle deux égaux pour faire un parallélogramme)
- pour un polygone compact convexe (en le découpant en triangles à partir d'un point intérieur).

Montons en dimension (ça tourne autour du 1.4 de GF). Toujours avec la multiplicativité, on a

$$\mathfrak{C}(\text{cube de côté } 1) = \mathfrak{I} + 3\mathfrak{I}^2 + 3\mathfrak{I} + 1 \; .$$

Si on écrase ce cube de côté 1 (patate) en un parallélépipède rectangle P de cotés $\frac{1}{4}, 2, 2$ de même volume, on obtient

$$\mathfrak{C}(P) = \mathfrak{I}^3 + 5\mathfrak{I}^2 + \frac{17}{4}\mathfrak{I} + 1 \; .$$

Le "cardinal" de la patate écrasée est plus grand. Ca contredit le 1.17 de GF.

Pour l'intérieur de la patate, on a avec ce qu'on a vu pour les intervalles ouverts et la multiplicativité

$$\mathfrak{C}(\text{cube ouvert de côté } 1) = \mathfrak{I} - 3\mathfrak{I}^2 + 3\mathfrak{I} - 1 \; ,$$

$$\mathfrak{C}(\mathring{P}) = \mathfrak{I}^3 - 5\mathfrak{I}^2 + \frac{17}{4}\mathfrak{I} - 1 \ .$$

La patate ouverte écrasée est plus petite.

L'impression que ça donne c'est que le $\mathfrak{C}$ fait comme si le cube compact était couvert d'une couche de peinture. Quand on l'écrase, la peinture ne suffit plus pour recouvrir toute la surface...

A suivre.

MC