Les suites numériques

Exercice 1 :

Soit (U_n) *la suite définie par :*

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall\, n \in IN, U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{U_n + 2} \end{cases}$$

1-Calculer U_1 *et* U_2
2-On considère la suite $V_n = \frac{1}{U_n}$ *pour tout* $n \in IN$
Démontrer que (V_n) *est une suite arithmétique .*
3- Exprimer V_n *en fonction de* n
4- En déduire l' expression de U_n *en fonction de* n *.*

Exercice 2:
1. Soit $(t_{n)n\in IN}$ *la suite definie par :* $t_{n=}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$
a.Montrer que $t_{n=}\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ *(0.5pt)*
b.Calculer les 4 premiers termes de $(t_{n)}$ *(4pts)*
c.En déduire la somme : $t_0 + t_1 + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots t_{24}$.
2.Soit $(V_{n)n\geq 1}$ *la suite définie par* $V_{n=}\, 2^{2n+1} - 4^n$ *.*

a.Calculer les trois premiers termes de $(V_{n)}$
b. Montrer que pour $n \geq 1$ *on a :*

$$V_{n=}\, 2^{2n}$$

c. En deduire que (V_n) *est géométrique dont on précisera la raison.*
d. Etudier le sens de varia tion de $(V_{n)}$ $(0.5pt)$
3.On pose pour tout n≥ 1 $U_{n=2n}$
a.Montrer que U_n *est arithmétique et calculer la somme* $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ *en fonction de n.*
b.En déduire le produit $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_{n-1} \times V_n$ *en fonction de n.*

Exercice 3:

Démontrer par récurrence que :

1. $\forall\, n \in IN: \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
2. $\forall\, n \in IN: n^3 - n$ *est divisible par* 3

Exercice 4 :

Soit U_n la suite définie par :

$$U_0 = 2 \text{ et } \forall\, n \in IN;\ U_{n+1} = 3U_n - n^2 + n.$$

1.Déterminer un polynôme de degré 2 tel que la suite de terme général $A_n = P(n)$ vérifie la relation de récurrence précédente.

2. Démontrer que la suite de terme général $V_n = U_n - A_n$ est une suite géométrique.

3.Exprimer V_n , *puis* U_n en fonction de n.

Exercice 5

Soit (U_n) une suite arithmétique décroissante d'entiers naturels.

a) Sachant que $U_1+U_2+U_3=105$, calculez U_2.

b) On désigne par m et d respectivement le PPCM et le PGCD de U_1 et U_3 sachant que $\frac{m}{d}=12$, déterminer U_1 etU_3.

c) En déduire l'expression de U_n en fonction de n. Calculez

$S_n= U_1+U_2+U_3+\dots +U_n$ en fonction de n. Déterminez *n* pour que S_n soit égale à 525

Exercice 6

1°/ On considère la suite (U_n) définie par, $\forall n\in \rfloor$: $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=U_n+2n+3 \end{cases}$

a.) Préciser le sens de variation de la suite (U_n).

b.) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $U_n > n^2$; en déduire la limite de la suite (U_n).

c.) Conjecturer une expression de U_n en fonction de *n* puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 7

Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_0 = 0$ et pour $n \geq 1$

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\dots + \frac{1}{n}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul *n* : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$

(On pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction *f* qui à *x* associe $\ln x$ sur l'intervalle $[n\ ;\ n+1]$) *(1pt)*

b) En déduire que pour tout entier non nul *n* on a : $Un \geq \ln(n+1)$ puis calculer la limite de (U_n) quand *n* tend vers $+\infty$ *(1pt*

Exercice 8:

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3 000 nouveaux. Il démarre avec 50 000 pieds en 2015. En désignant par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année (2015 + n)

1°/ a) Déterminez le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017. **(0,5pt)**

b) Exprimez X_{n+1} en fonction de X_n. **(1pt)**

2°/ On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 60\,000 - X_n$

a) Montrez que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1er terme. **(1pt)**

b) Exprimer U_n en fonction de n, en déduire X_n en fonction de n **(1pt)**

c) Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers dans 20 ans ? **(1pt)**

d) Calculer la limite de la suite (X_n). Conclure

Exercice 9

On considère la suite complexe (W_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = (1+\dfrac{1}{nz})^n$ où

z = x + yi est un complexe non nul.

a) Démontrer que : $ln|W_n| = \dfrac{n}{2}\ln(1+\dfrac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)})$

b) On pose $\alpha_n = \dfrac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)}$ (1pt)

– Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n$ (1pt)

– Vérifier que $\ln|W_n| = \dfrac{n}{2}\alpha_n \dfrac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}$ (0,5pt)

En déduire pour z complexe de module 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln|W_n|$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} |W_n|$