Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
$1^{ère}$ Année Licence MIAS
Matière : **AnalyseI**
Responsable : Prof. Sidi Mohamed Bahri

Feuille d'exercices N°1

(24 *Septembre* 2018)

Naturels, Rationnels et Réels

Dans chacun des cas suivants, utilisez uniquement (et indiquez) les théorèmes ou les axiomes introduits dans le cours.

Exercise 1 **(a)** *Montrer que*

$$3 + 11 + \cdots + (8n - 5) = 4n^2 - n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(b) *Montrer que*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exercise 2 *Nous décrivons maintenant une extension utile du principe de l'induction mathématique. Soit $P_m, P_{m+1}, \ldots,$ une suite de propositions, montrez que*

(i) *P_m est vraie;*

(ii) *pour tout $n \geq m$, si P_m est vraie alors P_{m+1} est vraie;*

alors $P_n, P_{n+1}, \ldots$ sont vraies.

Utilisez cette extension du principe de l'induction mathématique pour montrer les affirmations suivantes :

(a) *$n^2 > n + 1$ pour tout entier $n \geq 2$.*

(b) *$n! > n^2$ tout entier $n \geq 4$. (Rappelons que $n! = n\,(n-1)\cdots 2 \cdot 1$. Par exemple, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.)*

Exercise 3 *Soit $p, q \in \mathbb{Q}$. Supposons que pour tout $s > p$, nous avons $q \leq s$. Montrer que $q \leq p$.*

(Astuce : Montrer le résultat par contradiction en utilisant le fait que, entre deux nombres rationnels, il existe un nombre rationnel).

Exercise 4 *Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationel. De même pour $\sqrt[3]{5 - \sqrt{3}}$.*

Exercise 5 **(a)** *Montrer que $\sqrt{12}$ est irrationnel.*

(b) *Considérons maintenant l'ensemble* $E := \{\alpha \in \mathbb{Q} | \alpha^2 < 12\}$. *Étant donné* $\beta \in \mathbb{Q}$ *tel que* $\beta^2 < 12$, *trouver un nombre rationnel explicite* $\epsilon > 0$ *(dépendant bien sûr de* β*), tel que* $(\beta + \epsilon)^2 < 12$.

Indice. Il est facile de voir que $\beta < 4$. *Aussi, si* ϵ *est choisi inférieur à* 1, *alors* $\epsilon^2 < \epsilon$ *(quel axiome d'ordre utilisons-nous?).*

(c) *De même, si* $\beta^2 > 12$ *et* $\beta < 4$, *trouver un nombre rationnel explicite positif* ϵ *tel que* $(\beta - \epsilon)^2 > 12$ *et pourtant* $\beta - \epsilon$ *est une borne supérieure de* E.

(d) *Par conséquent, montrez que* E *n'a pas de borne supérieure dans* $\mathbb{Q}$.

Exercise 6 *Soit* $A, B \subset \mathbb{R}$.

(a) *Si* $\sup A < \sup B$, *alors montrer qu'il existe* $b \in B$ *qui soit une borne supérieure pour* A.

(b) *Montrer, en donnant un exemple, que ce n'est pas nécessairement le cas si* $\sup A \leq \sup B$.

Exercise 7 *Soit* $a < b$ *des nombres réels, et considérons l'ensemble* $T = \mathbb{Q} \cap [a, b]$. *Montrer que* $\inf T = a$ *et* $\sup T = b$.

Exercise 8 *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) *Montrer que* $|b| \leq a$ *si et seulement si* $-a \leq b \leq a$.

(b) *Montrer que* $||b| - |a|| \leq |b - a|$.

Exercise 9 **(a)** *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$ *tel que* $a \leq b + \frac{1}{n}$ *pour tout* $n \in N$. *Montrer que* $a \leq b$.

(b) *Montrer que si* $a > 0$, *alors il existe un nombre naturel* $n \in N$ *tel que* $\frac{1}{n} \leq a \leq n$.

Exercise 10 *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$ *tel que* $a < b$. *Utilisez la densité de* $\mathbb{Q}$ *pour montrer qu'il existe une infinité de rationels entre* a *et* b.

Exercise 11 *Soit* A *et* B *des sous-ensembles non vides de* $\mathbb{R}$, *et posons*

$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}.$$

C'est-à-dire que $A + B$ *est l'ensemble de toutes les sommes* $a + b$, *où* $a \in A$ *et* $b \in B$.

(a) *Montrer que* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. *Note. Considérer séparément le cas où au moins l'une des deux bornes sup à droite est* ∞.

(b) *A voir que* $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$. *Astuce : Utilisez (a).*