Lycée Alaoui	**Fonction logarithme népérien**	Année scolaire 2018-2019
Prof : ABDA Ezeddine		Niveau : $4^{ème}$ Maths

On a vu dans le chapitre sur les primitives que toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I. La fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$ admet donc des primitives. Parmi ces primitives F, une seule vérifie la condition $F(1)=0$. C'est précisément cette fonction F qui s'appelle logarithme Népérien.

<u>Définition</u> : La fonction logarithme Népérien, notée ln ou (Log) est la primitive définie sur $]0,+\infty[$ de la fonction inverse : $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

<u>Conséquences immédiates</u> :

- La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $ln'(x)=\frac{1}{x}>0$, pour tout $x>0$.
- La fonction ln est continue sur $]0,+\infty[$ puisque dérivable sur cet intervalle.
- Ainsi, nous en déduisons également le signe de la fonction ln :
  $0<x<1 \Leftrightarrow ln(x)<0$; $x=1 \Leftrightarrow ln(x)=0$; $x>1 \Leftrightarrow ln(x)>0$.

* La fonction ln étant strictement croissante et continue, elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur l'intervalle image (que nous préciserons ultérieurement). On en déduit que pour tous réels a et b de $]0,+\infty[$, on a : $ln(a)=ln(b) \Leftrightarrow a=b$; $ln(a)<ln(b) \Leftrightarrow a<b$.

<u>Théorème fondamentale</u> : Pour tous réels a et b de $]0,+\infty[$, on a : $ln(ab)=ln(a)+ln(b)$.

<u>Remarque</u> : Si a et b deux réels strictement négatifs : $ln(ab)=ln(-a)+ln(-b)$

<u>Conséquences</u> : Pour tous réels a et b strictement positifs :

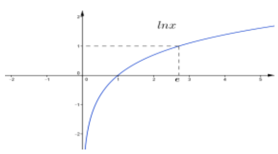
$$ln\,\frac{1}{b}=-ln(b)\ ;\ ln\,\frac{a}{b}=ln(a)-ln(b)\ ;\ ln\,a^p=p\,ln\,a\ \ (p\in\mathbb{Z})\ ;\ \ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}ln\,a.$$

<u>Limites de références</u> : Soit n et m deux entiers naturels non nuls

$\lim\limits_{x\to 0^+} lnx=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} lnx=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x.lnx=0$
$\lim\limits_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(x+1)}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln^n x}{x^m}=0$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x^m.ln^n x=0$

<u>Tableau de variation et courbe de ln</u> :

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖		$+$		
lnx	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Dérivés et primitives :

* Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction définie par $\ln(u)$ est dérivable sur I et on a : $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$.

* Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln|u|$.

Série n°7 : Fonction logarithme népérien

Exercice 1 :

1. Préciser l'ensemble de définition puis résoudre les équations suivantes :

$\ln(2+5x) = \ln(x+6)$	$\ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln 3$	$\ln(x-1) = \ln(2x-1)$
$\ln(2x-5) = 1$	$(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$	$\ln\|x-1\| = \ln(2x-1)$
$\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) = 0$	$\frac{1}{2}\ln 2x = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$	$\ln\|x-1\| = \ln\|2x-1\|$
$\ln\left(\left\|\frac{x-1}{2x-1}\right\|\right) = 0$	$\ln\|4-x\| = \ln(x-1) + \ln(x-2)$	$\ln(\|x\|^3 + 2) = \ln(2x^2 + \|x\|)$

2. Préciser l'ensemble de définition puis résoudre les inéquations suivantes :

$\ln(2+5x) \leq \ln(x+6)$	$\ln(x-1) + \ln(x-3) \geq \ln 3$	$\ln\|x-1\| \leq \ln\|2x-1\|$
$(\ln x)^2 + \ln x - 6 < 0$	$\frac{1}{2}\ln 2x < \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$	$(0{,}8)^n \leq 0{,}1$; $n \in \mathbb{N}$
$\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) > 0$	$\ln\|4-x\| \geq \ln(x-1) + \ln(x-2)$	$(1{,}2)^n \geq 4$; $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 :

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln x^3$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} x - \ln x$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \ \ln x$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x - \ln x$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(1+\frac{1}{x})$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin \ln x}{x}$
-
-

Exercice 3 :

Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions ci-dessous.

- $f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + 2\ln x$
- $f(x) = x\ln x - x$
- $f(x) = \ln(-3x+1)$
- $f(x) = \frac{2\ln x}{\ln 2}$
- $f(x) = x^2 \ln x$
- $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$
- $f(x) = \ln(4-x) - \ln x$
- $f(x) = \ln(2x-5)$
- $f(x) = \ln(\frac{x-1}{x+1})$
- $f(x) = \ln(\ln x)$
- $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
- $f(x) = \ln x^2$
- $f(x) = x\ln(2x-3)$
- $f(x) = (\ln x)^2$
- $f(x) = \frac{x-\ln x}{x^2}$
- $f(x) = 2x(1-\ln x)$
- $f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x - 4$
- $f(x) = \ln(1-x^2)$

Exercice 4 :

Déterminer une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné.

- $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$
- $f(x) = \frac{3}{3x-4}$ sur $]\frac{4}{3}, +\infty[$

- $f(x)=\frac{7}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$
- $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$ sur $]2,+\infty[$
- $f(x)=\frac{1}{x+1}$ sur $]-1,+\infty[$
- $f(x)=\frac{1}{x+1}$ sur $]-\infty,-1[$
- $f(x)=\frac{1}{3x-5}$ sur $[2,+\infty[$
- $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$
- $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x}$ sur $]0,+\infty[$
- $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ sur $]-1,1[$

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

1. Montrer que, pour tout entier naturel $k\geq 0$: $f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(t)dt\leq f(k)$.
2. On considère la suite S définie par son terme général : $S_p=\sum_{k=2}^{p}\frac{\ln k}{k^2}, p\geq 2$.
   a. Montrer que la suite S est croissante.
   b. En utilisant (1), montrer que : $S_p-\frac{\ln 2}{2^2}\leq\int_2^p f(t)dt\leq S_p-\frac{\ln p}{p^2}$ et en déduire un encadrement de S_p
   c. En utilisant la valeur de $\int_2^p f(t)dt$, démontrer que la suite S est majorée.
   d. On admettra que la suite S est convergente, montrer que sa limite L vérifie : $\frac{1}{2}+\frac{\ln 2}{2}\leq L\leq\frac{1}{2}+\frac{3\ln 2}{2^2}$

Exercice 6 :

Partie A : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$.

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction f.
2. Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α, appartient à $[-0{,}72;-0{,}71]$.
3. Donner le signe de $f(x)$ pour x de $]-1,+\infty[$.

Partie B : Soit g la fonction définie sur l'ensemble $D=]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par : $g(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$.

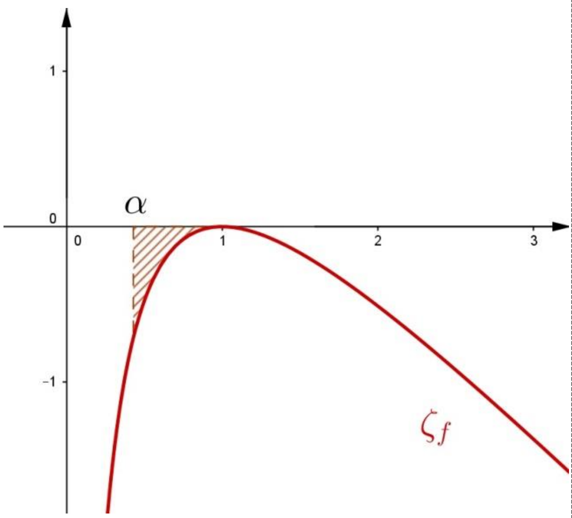
1. Étude de g aux bornes de son ensemble de définition :
   a. Calculer les limites de $g(x)$ quant x tend vers zéro par valeurs inferieures et quant x tend vers zéro par valeurs supérieures.
   b. Calculer $\lim_{x\to-1^+}g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}g(x)$.
2. Sens de variation de g :
   a. Calculer $g'(x)$ et déduire à l'aide de la partie A, son signe.
   b. Montrer que $g(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approché de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha=0{,}715$.
3. Tableau et représentation graphique.
   a. Dresser le tableau de variation de g.
   b. Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
4. Soit h la fonction définie sur D par : $h(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}-\frac{1}{x(x+1)}$.
   a. Déterminer des fonctions u et v telles que l'on puisse écrire : $h(x)=u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$ et en déduire une primitive de h.
   b. Après avoir vérifié que $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, déterminer un primitive de $\frac{1}{x(x+1)}$.
   c. Déduire des questions précédentes, une primitives de g.

Exercice 7 :

La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$$

1. **a.** Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que, $\forall\, x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $N(x) = -2\left(x\sqrt{x} - 1\right) - \ln x$.
   b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$.
   c. Dresser le tableau de variation de f.
2. On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire, exprimé en unités d'aire, de la partie du plan hachurée sur la figure, où α désigne un réel de $]0;1[$.
   a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
   $\mathcal{A}(\alpha) = 2\sqrt{\alpha}\,\ln\alpha - 4\sqrt{\alpha} - \frac{\alpha^2}{2} + \alpha + \frac{7}{2}$
   b. Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0^+.
   Donner une interprétation graphique de cette limite.
3. On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1{,}5$ et $u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1$ pour tout entier naturel n.
   a. Démontrer que, pour tout réel x de $[1;2]$: $0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$.
   b. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $1 \leq u_n \leq 2$.
   c. Déterminer le sens de variation de la suite u.
   d. Montrer que la suite u est convergente. On note L sa limite. Déterminer la valeur exacte de L.



Exercice 8 :

1. Le tableau de variation ci-dessous est celui de la fonction g définie sur $]0;2[$ par :
$$g(x) = 2\,\frac{x-1}{x-2} + \ln(x(2-x))$$
   a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0;2[$ exactement deux solutions dont l'une est 1 et l'autre $\alpha \in]0.2;0.3[$.
   b. Préciser le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0;2[$.

x	0		$2-\sqrt{2}$		2
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$2-\sqrt{2}+\ln(2\sqrt{2}-2)$	↘	$-\infty$ ‖

2. Soit f la fonction définie sur $[0;2[$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln(x(2-x)) & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.
   On désigne par Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
   a. Montrer que f est continue à droite en zéro.
   b. Étudier la dérivabilité de f en 0^+ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. **a.** Vérifier que pour tout $x \in]0;2[$, $f'(x) = g(x)$.
   b. Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe Γ.

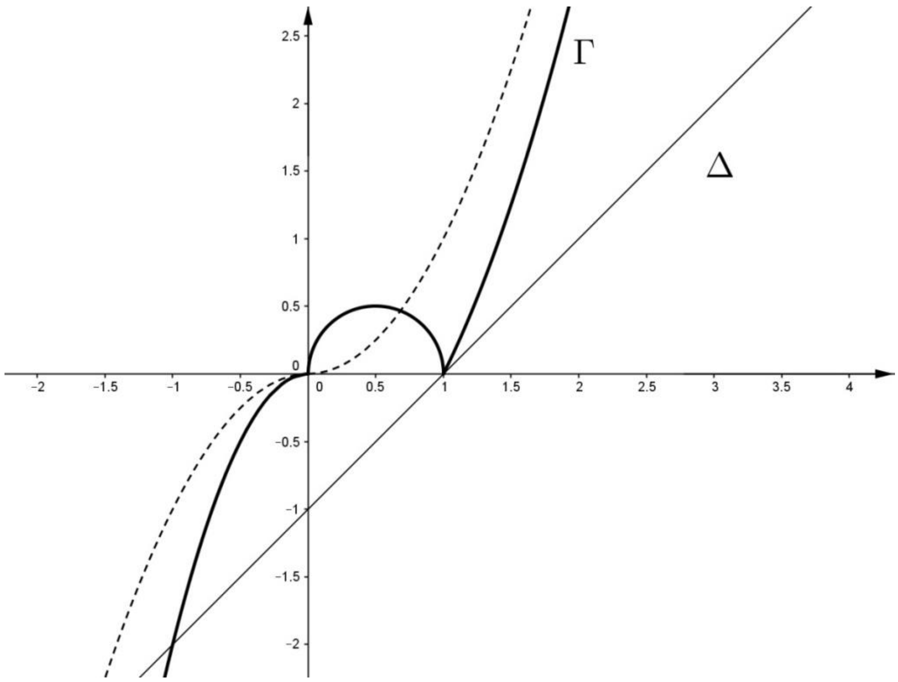
4. Pour tout $\in]0;1[$, on désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ et les droites d'équations respectives : $x=\alpha$, $x=1$ et $y=0$.
   a. Trouver trois réels , b et c tels que pour tout $x \neq 2$, $\frac{x-x^2}{2-x} = \frac{a}{2-x} + bx + c$.
   b. Déduire l'intégrale : $\int_\alpha^1 \frac{x-x^2}{2-x} dx$.
   c. À l'aide d'une intégration par partie, calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ puis $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$.

Exercice 9 :

Dans le graphique ci-dessous on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ en gras la courbe Γ d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. On sait que la partie de Γ représenté sur $[0;1]$ est le demi-cercle de diamètre $[OI]$.

En pointillé on a représenté la courbe de la fonction : $g: x \longrightarrow \begin{cases} x^2 \; si \; x \geq 0 \\ -x^2 \; si \; x < 0 \end{cases}$.

1. Préciser le signe de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^{\ln x} f(t)dt$.
   a. Calculer $F(1)$.
   b. Donner une interprétation graphique de $F(e)$ puis prouver que $F(e) = \frac{\pi}{8}$.
3. **a.** Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $F'(x) = \frac{f(\ln x)}{x}$.
   b. Par une lecture graphique prouver que pour tout $t \geq 1$, on a : $t-1 \leq f(t) \leq t^2$.
   En déduire que pour tout $x \geq e$ on a : $\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x \leq \int_1^{\ln x} f(t)dt \leq \frac{1}{3}(\ln x)^3$.
   c. Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$.
4. **a.** Montrer que pour tout $0 < x \leq 1$ on a : $F(x) \geq -\frac{1}{3}(\ln x)^3$ et déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$.
   b. Dresser le tableau de variation de F. Donner l'allure de la courbe de F.



Exercice 10 :

I.

1. Montrer que l'équation : $x^3 + 2x - 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique x_0 et que $x_0 \in]0;1[$.
2. Montrer que pour tout $x > -1$ on a : $\ln(1+x) \leq x$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

II.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt$

1. **a.** Montrer que F est paire.
   b. Calculer $F(0)$ et $F(1)$. Déterminer le signe de $F(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$.
2. **a.** Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\begin{cases} F'(x) = \frac{2\ln(1+x^4)-\ln(1+x^2)}{x} & si\ x \neq 0 \\ F'(0) = 0 \end{cases}$
   b. Montrer que F' est continue sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Montrer que l'équation $F'(x) = 0$ admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]0;1[$.
   b. Montrer que F est décroissante sur $[0;\alpha]$ et que F est croissante sur $]\alpha;+\infty[$.
4. **a.** Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = 3\,(\ln x)^2$.
   b. Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
5. **a.** Soit > 0 , calculer $\int_x^{x^2} \frac{\ln(t^2)}{t}dt$ et en déduire que : $F(x) - 3(\ln x)^2 = \int_x^{x^2} \frac{\ln(1+t^{-2})}{t}dt$.
   b. Montrer que pour tout $x > 1$ on a : $3(\ln x)^2 \leq F(x) \leq 3(\ln x)^2 + \frac{1}{2x^2}$.
   c. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$
6. Soit Γ la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   Donner une allure de Γ. (on donne $\alpha \approx 0.7$; $F(\alpha) \approx -0{,}1$ et $F(2) = 1.5$

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\ln(1+x^2)$. On désigne par Γ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. **a.** Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   b. Préciser la tangente à Γ au point d'abscisse 0. Tracer Γ.
   c. Tracer la courbe Γ' de la fonction f^{-1} dans le même repère.
2. **a.** Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$. En déduire $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$.
   b. Déterminer alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ et les droites d'équations $= 0$, $x = 1$ et $y = 0$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2p+4}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k+3}$.
   a. Montrer que $S_n(x) = \frac{x^3}{1+x^2} + (-1)^n\ \frac{x^{2n+5}}{1+x^2}$.
   b. En déduire que $U_n = I + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+5}}{1+x^2}\,dx$.
   c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+5}}{1+x^2}\,dx \leq \frac{1}{2n+6}$.
   d. Calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 12 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f_n(x) = (x-1)^n \ln x$.
On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Dans le graphique ci-dessous on a représenté $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

1. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
2. On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_1^2 f_n(x)dx$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $(n+1)U_n = \ln 2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^n}{x} dx$

b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)U_n$.