UNIVERSITÉ CADI AYYAD
FACULTÉ DES SCIENCES-SEMLALIA
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

# ALGEBRE LINEAIRE

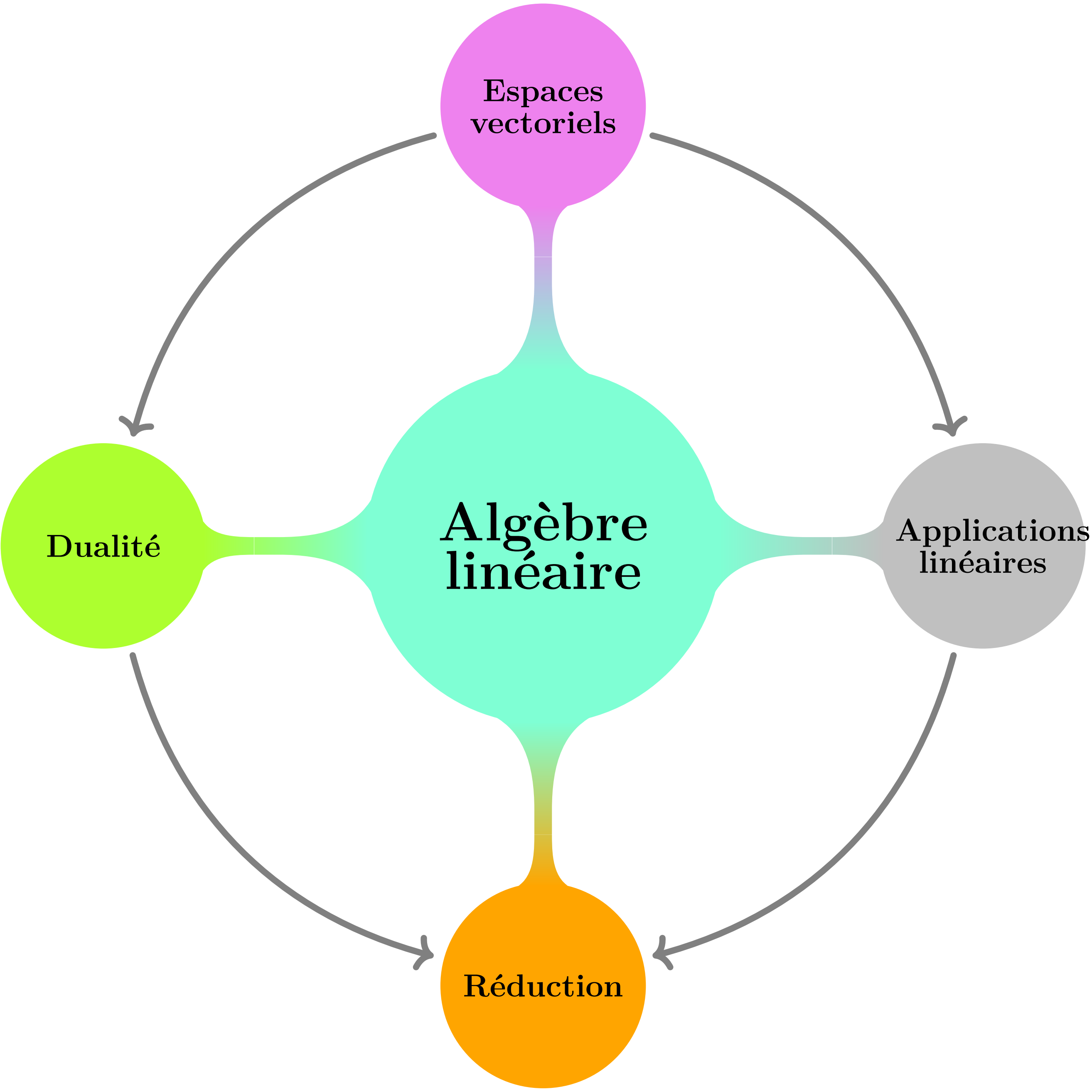
## Polycopié de cours

### Nombreux exercices et exemples avec solution

Professeur
**Mohamed HOUIMDI**

Version septembre 2018

Publications du
Département de Mathématiques


Espaces vectoriels
Dualité
Algèbre linéaire
Applications linéaires
Réduction

# Table des matières

# 1 Espaces vectoriels

## 1.1 Définitions et propriètés de base

### 1.1.1 Espace vectoriel sur un corps quelconque

**Définition 1.2.**

Soient $(E,+)$ un **groupe commutatif** et $(K,+,\times)$ un **corps commutatif**. On dit que $E$ est un $K$-espace vectoriel ou un espace vectoriel sur $K$, s'il existe une application de $K \times E$ vers $E$, appelée loi externe sur $E$, qui à $(\alpha, x) \in K \times E$ fait correspondre $\alpha \cdot x$, vérifiant les axiomes suivants :

i) $\forall x \in E,\ 1_K \cdot x = x.$

ii) $\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in E,\ (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$

iii) $\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in E,\ (\alpha\beta)\cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$

iv) $\forall \alpha \in K, \forall x \in E, \forall y \in E,\ \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

Dans ce cas, les éléments de $E$ sont appelés des **vecteurs** et se notent $x, y, z, \ldots$, tandis que les éléments de $K$ sont appelés des **scalaires** et se notent $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \cdots$.

### 1.2.1 Conséquences de la définition

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel, alors les propriètés de base suivantes sont vérifiées,

a) $\forall x \in E,\ 0_K \cdot x = 0_E.$

b) $\forall \lambda \in K,\ \lambda \cdot 0_E = 0_E.$

c) $\forall \lambda \in K, \forall x \in E,\ \ \lambda \cdot x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_K \ \text{ ou } \ x = 0_E.$

**Preuve**

*a) D'après l'axiome ii) de la définition, nous avons*

$$0_K \cdot x = (0_K + 0_K)\cdot x = 0_K \cdot x + 0_K \cdot x$$

*donc* $0_K \cdot x = 0_E$.

*b) D'après l'axiome iv) de la définition, nous avons*

$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$$

*donc* $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

*c)* $(\Longrightarrow)$ *Supposons que* $\lambda \cdot x = 0_E$ *et* $\lambda \neq 0_K$ *et montrons que* $x = 0_E$.
*Puisque* $\lambda \cdot x = 0_E$, *alors* $\lambda^{-1}\cdot(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot 0_E = 0_E$, *or d'après l'axiome iii) de la définition, nous avons*

$$\lambda^{-1}\cdot(\lambda \cdot x) = (\lambda^{-1}\lambda)\cdot x = 1_K \cdot .x$$

*donc d'après l'axiome i) de la définition, on a* $x = 0_E$.

$(\Longleftarrow)$ *Déjà vu.*

### 1.2.2 Exemples fondamentaux

1. Soient $(L, +, \times)$ un corps commutatif et $K$ un sous-corps de $L$, alors $L$ peut-être considéré comme un $K$-espace vectoriel, pour la loi externe,
$$\begin{aligned} K \times L &\longrightarrow L \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x = \lambda \times x \end{aligned}$$
Par exemple, $L = \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{Q}$ ou $L = \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{Q}$.
En particulier, tout corps $K$ peut-être considéré comme un espace vectoriel sur lui-même.
2. Soit $K$ un corps commutatif, alors pour tout entier $n \geq 1$, $K^n$ est un $K$-espace vectoriel pour la loi externe,
$$\begin{aligned} K \times K^n &\longrightarrow K^n \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}$$
où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
3. Soit $K$ un corps commutatif, on désigne par $K^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites à coefficients dans $K$. Alors $K^{\mathbb{N}}$ est un $K$-espace vectoriel pour la loi externe,
$$\begin{aligned} K \times K^{\mathbb{N}} &\longrightarrow K^{\mathbb{N}} \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x = (\lambda x_n)_{n \geq 0} \end{aligned}$$
où $x = (x_n)_{n \geq 0}$.
4. Soient $K$ un corps commutatif, $A$ un ensemble quelconque non vide et $K^A$ l'ensemble de toutes les application de $A$ vers $K$. Alors $K^A$ est un $K$-espace vectoriel pour la loi externe,
$$\begin{aligned} K \times K^A &\longrightarrow K^A \\ (\lambda, f) &\longmapsto \lambda \cdot f \end{aligned}$$
où $\lambda \cdot f$ est l'application de $A$ vers $K$ définie par,
$$\forall a \in A,\ (\lambda \cdot f)(a) = \lambda f(a)$$
Rappelons aussi que si $f$ et $g$ sont deux éléments de $K^A$, alors $f + g$ est l'application de $A$ vers $K$, définie par,
$$\forall a \in A,\ (f + g)(a) = f(a) + g(a)$$
5. Soient $K$ un corps commutatif et $K[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $K$. Alors $K[X]$ est un $K$-espace vectoriel pour la loi externe,
$$\begin{aligned} K \times K[X] &\longrightarrow K[X] \\ (\lambda, P) &\longmapsto \lambda \cdot P = \sum_{i=1}^{m} (\lambda a_i) X^i \end{aligned}$$
où $P = \sum_{i=1}^{m} a_i X^i$.
6. Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des espaces vectoriels sur le même corps $K$. Alors le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est un $K$-espace vectoriel pour la loi externe définie par l'application de $K \times E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ qui à $(\lambda, (x_1, x_2, \dots, x_n)) \in K \times E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ fait correspondre
$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n)$$
$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ s'appelle l'espace vectoriel produit des $K$-espaces vectoriels $E_1, E_2, \dots, E_n$.

7. Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $A$ un ensemble non vide quelconque et $E^A$ l'ensemble de toutes les applications de $A$ vers $E$. Alors $E^A$ est un $K$-espace vectoriel pour la loi externe,

$$\begin{aligned} K \times E^A &\longrightarrow E^A \\ (\lambda, f) &\longmapsto \lambda \cdot f \end{aligned}$$

où $\lambda \cdot f$ est l'application de $A$ vers $E$ définie par,

$$\forall a \in A,\ (\lambda \cdot f)(a) = \lambda \cdot f(a)$$

Rappelons aussi que si $f$ et $g$ sont deux applications de $A$ vers $E$, alors $f+g$ est l'application de $A$ vers $E$ définie par,

$$\forall a \in A,\ (f+g)(a) = f(a) + g(a)$$

## 1.3 Sous-espaces vectoriels

### 1.3.1 Définition et exemples

**Définition 1.4.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $F$ une partie de $E$. On dit que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, si

i) $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$.

ii) $\forall \lambda \in K, \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$.

**Remarques 1.1**

*Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $F$ est un espace vectoriel pour la loi externe induite par celle de $E$ :*

$$\begin{aligned} K \times F &\longrightarrow F \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha \cdot x \end{aligned}$$

**Proposition 1.5.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $F$ une partie de $E$. Alors $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, si, et seulement si,

i) $F \neq \emptyset$.

ii) $\forall x \in F, \forall y \in F,\ x + y \in F$.

iii) $\forall \lambda \in K, \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$.

**Preuve**

*($\Longrightarrow$) Trivial.*

*($\Longleftarrow$) Supposons que $F$ vérifie i), ii) et iii) et montrons que $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$. Donc on doit vérifier que,*

— $F \neq \emptyset$.

— $\forall x \in F, \forall y \in F,\ x - y \in F$.

*Soient $x \in F$ et $y \in F$, puisque, par hypothèse $F \neq \emptyset$, alors il suffit de voir que $x - y \in F$.*
*D'après iii), $(-1_K) \cdot y \in F$ avec $(-1_K) \cdot y = -y$, donc d'après ii), $x + (-y) \in F$.*

**Remarques 1.2**
*Soit $K$ un corps commutatif. Pour montrer qu'un ensemble $F$ est un $K$-espace vectoriel, il suffit, dans la plupart des cas, de montrer qe $F$ est un sous-espace vectoriel d'un $K$-espace vectoriel connu.*

**Exemples 1.1**

1. *Pour tout $K$-espace vectoriel $E$, les parties $\{0_E\}$ et $E$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.*
2. *Soit $K$ un corps commutatif. Pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par $K_n[X]$ la partie de $K[X]$ définie par,*

$$K_n[X] = \{P \in K[X] \ : \ \deg(P) \leq n\}$$

   *Alors $K_n[X]$ est un $K$-espace vectoriel.*
   *Il suffit de vérifier que $K_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $K[X]$.*

   **i)** *Si on suppose que $\deg(0) = -\infty$, alors pour tout entier $n \geq 0$, $K_n[X]$ contient le polynôme nul, par suite $K_n[X] \neq \emptyset$.*

   **ii)** *On sait que pour tout $P \in K[X]$ et pour tout $Q \in K[X]$, on a*

$$\deg(P+Q) \leq \sup(\deg(P), \deg(Q))$$

   *Donc si $\deg(P) \leq n$ et $\deg(Q) \leq n$, alors $\deg(P+Q) \leq n$ et par suite, on a*
   *$P + Q \in K_n[X]$.*

   **iii)** *On sait, aussi, que pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $P \in K[X]$,*

$$\deg(\lambda P) \leq \deg(P) \quad \textit{et si } \lambda \neq 0 \textit{ alors} \quad \deg(\lambda P) = \deg(P)$$

   *Donc si $\lambda \in K$ et $P \in K_n[X]$, alors $\lambda \cdot P \in K_n[X]$.*

3. *L'ensemble $F$ des suites réelles qui tendent vers zéro à l'infini, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel,*

$$F = \{(x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \lim_{n \to \infty} x_n = 0\}$$

   *Il suffit de montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

4. *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, l'ensemle des fonctions continues de $I$ vers $\mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Il suffit de vérifier que $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$, l'espace vectoriel de toutes les applications de $I$ vers $\mathbb{R}$.*

### 1.5.1 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

#### Intersection

**Proposition 1.6.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel, alors l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Preuve**
*Soit* $(F_i)_{i\in I}$ *une famille de sous-espaces vectoriels de* $E$, *où* $I$ *est un ensemble d'indice quelcomque et non vide. La vérification que* $\bigcap_{i\in I} F_i$ *est un sous-espace vectoriel de* $E$ *est laissée à titre d'exercice.*
*Rappelons que,*

$$x \in \bigcap_{i\in I} F_i \Longleftrightarrow \forall i \in I,\ x \in F_i$$

### Réunion

La réunion de deux sous-espaces vectoriels de $E$ n'est pas toujours un sous-espace vectoriel de $E$. Cependant on a la proposition suivante :

**Proposition 1.7.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque, $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$, si et seulement si, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

**Preuve**
($\Longrightarrow$) *Supposons que* $F\cup G$ *est un sous-espace vectoriel de* $E$ *et montrons que* $F \subseteq G$ *ou* $G \subseteq F$. *Pour cela, supposons, par absurde, que* $F \nsubseteq G$ *et* $G \nsubseteq F$.

$$\begin{aligned} F \nsubseteq G &\Longrightarrow \exists x \ :\ x \in F \ \ et\ \ x \notin G \\ F \nsubseteq G &\Longrightarrow \exists y \ :\ y \in G \ \ et\ \ y \notin F \end{aligned}$$

$F \cup G$ *étant un sous-espace vectoriel, donc* $x + y \in F \cup G$, *par suite, on a*

$$x + y \in F \ \ ou\ \ x + y \in G$$

*Si* $x + y \in F$, *puisque* $y = (x + y) - x$, *alors* $y \in F$, *ce qui est absurde, car* $y \notin F$.
*Si* $x + y \in G$, *puisque* $x = (x + y) - y$, *alors* $x \in G$, *ce qui est encore absurde, car* $x \notin G$.
*Donc notre supposition de départ est fausse, par suite,* $F \subseteq G$ *ou* $G \subseteq F$.

($\Longleftarrow$) *Trivial.*

**Remarques 1.3**
*La proposition précédente se généralise à un nombre fini de sous-espaces vectoriels de* $E$ *:*

**Proposition 1.8.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque et $n$ un entier $\geq 2$. On suppose que $K$ est un corps de caractéristique $\geq n$.
Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de $E$, alors $F_1 \cup F_2 \cdots \cup F_n$ est un sous-espace vectoriel de $E$, si et seulement si,

$$\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\} \ :\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \ F_j \subseteq F_i$$

**Preuve**

($\Longleftarrow$) *Trivial.*

($\Longrightarrow$) *On procède par récurrence sur $n \geq 2$.*

*Le cas $n = 2$ est déjà vu, car tout corps est de caractéristique $\geq 2$.*

*Supposons, donc, que $n > 2$ et que la proposition est vérifiée pour tout entier $m < n$.*

*Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de $E$, tel que $F_1 \cup F_2 \dots \cup F_n$ soit un sous-espace vectoriel de $E$.*

*Supposons, par absurde, que*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} F_j \nsubseteq F_i$$

*Donc, en particuler, $\bigcup\limits_{j=1}^{n-1} F_j \nsubseteq F_n$. D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que $F_n \nsubseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} F_j$.*

*Soient $x \in F_n$ et $y \in \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} F_j$, tels que $x \notin \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} F_j$ et $y \notin F_n$.*

$$(x \in F_n \quad et \quad y \notin F_n) \Longrightarrow \forall \lambda \in K, \quad \lambda x + y \notin F_n$$

*Or, $\bigcup\limits_{j=1}^{n} F_j$ est un sous-espace vectoriel de $E$, donc $\forall \lambda \in K, \quad \lambda x + y \in \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} F_j$.*

*Remarquons que si $\lambda x + y \in F_j$, pour un certain $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, alors pour tout $\mu \neq \lambda$, $\mu x + y \notin F_j$, car sinon, on aura $x \in F_j$, ce qui est absurde.*

*$K$ est de caractéristique $\geq n$, donc l'ensemble $\{1_K, 21_K, \dots, (n-1)1_K\}$ est de cardinal $= n - 1$. Donc, d'après la remarque précédente, pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, il existe un unique $\lambda_j \in \{1, 21_K, \dots, (n-1)1_K\}$, tel que, $\lambda_j x + y \in F_j$.*

*Or $y \in \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} F_j$, donc il existe $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, tel que, $y \in F_j$, donc $x \in F_j$, car $\lambda_j x + y \in F_j$ et $\lambda_j \neq 0$, ce qui est absurde, car $x \notin F_j$.*

**Somme**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de $E$, où $n \geq 2$. On définit la partie de $E$, notée $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ par :
$x \in F_1 + F_2 + \dots + F_n$, si et seulement si, il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$, tel que

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

**Proposition 1.9.**

$F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est un sous-espace vectoriel de $E$, appelé sous-espace vectoriel somme des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_n$.

**Preuve**

*La vérification que $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est un sous-espace vectoriel est laissée à titre d'exercice.*

### Somme directe

**Définition 1.10.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $F_1$, $F_2$, ..., $F_n$ des sous-espaces vectoriels de $E$. On dit que la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est directe, si pour tout $x \in F_1+F_2+\cdots+F_n$, il existe **un unique** $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$, tel que $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

**Notations**

*Dans le cas où la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est directe, on la note,*

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n \quad \textit{ou encore} \quad \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$$

**Lemme 1.11.**

La somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est directe, si et seulement si, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$, on a

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

**Preuve**

($\Longrightarrow$) *Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$, tel que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$, a-t-on $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ?*
*Puisque la somme est directe et puisque on a aussi $0 = 0 + 0 + \ldots + 0$, alors d'après l'unicité de la décomposition, on a $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.*

($\Longleftarrow$) *Soit $x \in F_1+F_2+\cdots+F_n$, tel que $x = x_1+x_2+\cdots+x_n$ et $x = y_1+y_2+\cdots+y_n$, a-t-on $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_n = y_n$ ?*
*$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ et $x = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, donc on aura*

$$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \cdots + (x_n - y_n) = 0$$

*par suite, si on pose $z_1 = x_1 - y_1$, $z_2 = x_2 - y_2$, ... et $z_n = x_n - y_n$, alors on aura*
*$(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$ et $z_1+z_2+\cdots+z_n = 0$, donc, par hypothèse, on a $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$.*

**Théorème 1.12.**

La somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est directe, si et seulement si,

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \quad F_i \cap (F_{i+1} + \cdots + F_n) = \{0\}$$

**Preuve**

($\Longrightarrow$) *Supposons que la somme est directe et soit $x_i \in F_i \cap (F_{i+1} + \cdots + F_n)$, avec $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Montrons que $x_i = 0$ ?*

$$\begin{aligned} x_i \in F_{i+1} + \cdots + F_n &\Longrightarrow \exists (x_{i+1}, \ldots, x_n) \in F_{i+1} \times \cdots \times F_n \ : \ x_i = x_{i+1} + \cdots + x_n \\ &\Longrightarrow x_i + (-x_{i+1}) + \cdots + (-x_n) = 0 \\ &\Longrightarrow x_i = x_{i+1} = \cdots = x_n = 0 \quad \textit{(d'après le lemme précédent)} \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) *Supposons que* $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad F_i \cap (F_{i+1} + \cdots + F_n) = \{0\}$.
*Soit* $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$, *tel que* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$, *a-t-on* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ *? on a*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 &\Longrightarrow x_1 = -(x_2 + \cdots + x_n) \\ &\Longrightarrow x_1 \in F_1 \cap (F_2 + \cdots + F_n) \\ &\Longrightarrow x_1 = 0 \end{aligned}$$

*D'où* $x_2 + \cdots + x_n = 0$, *donc de la même manière on montre que* $x_2 = 0$ *et ainsi, par récurrence sur* $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, *on montre que*

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

**Remarques 1.4**
*Soit* $E$ *un* $K$*-espace vectoriel quelconque, alors d'après le théorème précédent,*

1. *La somme de deux sous-espaces vectoriels* $F$ *et* $G$ *de* $E$ *est directe, si et seumlement si,*
$$F \cap G = \{0\}$$
2. *La somme de trois sous-espaces vectoriels* $F$, $G$ *et* $H$ *de* $E$ *est directe, si et seumlement si,*
$$F \cap (G + H) = \{0\} \quad et \quad G \cap H = \{0\}$$

### 1.12.1 Sous-espaces supplémentaires

**Définition 1.13.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On dit que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$, si, Indexsous-espaces supplémentaires

i) La somme $F + G$ est directe.
ii) $E = F \oplus G$.

**Remarques 1.5**

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\Longleftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ et \\ \forall (x, y) \in F \times G, \ x + y = 0 \Longrightarrow x = y = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ et \\ F \cap G = \{0\} \end{cases} \end{aligned}$$

**Exemples 1.2**

1. *Soient* $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de toutes les fonctions de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$, $F$ *l'ensemble des fonctions* $f \in E$ *qui sont paires et* $G$ *l'ensemble des fonctions* $f \in E$ *qui sont impaires. Alors* $F$ *et* $G$ *sont deux sous-espaces supplémentaires de* $E$*.*
*En effet, Il est clair que* $F$ *et* $G$ *sont deux sous-espaces vectoriels de* $E$, *car la*

*somme de deux fonctions paires (resp. impaires) est une fonction paire (resp. impaire), ainsi que la multiplication d'une fonction paire (resp. impaire) est une fonction paire (resp. impaire).*
*Si $f \in F \cap G$, alors $f$ est une fonction qui est à la fois paire et impaire, donc $f$ est nulle, par suite, $F \cap G = \{0\}$.*
*Vérifions que $E = F + G$. Pour cela soit $f \in E$ et soient $g$ et $h$ les fonctions définies par,*

$$\forall x \in E, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad et \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

*Alors $g$ et $h$ sont respectivement paire et impaire et on a $f = g + h$.*

2. *Soient $E = \mathcal{C}^m(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^m$ sur $\mathbb{R}$, $F$ et $G$ les parties de $E$ définies par,*

$$F = \{f \in E \ : \ f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(m)}(0) = 0\} \quad et \quad G = \mathbb{R}_m[x]$$

*où $\mathbb{R}_m[x]$ est l'ensemble des fonctions polynômiales de degré $\leq m$. Rappelons que*

$$f \in \mathbb{R}_m[x] \Longleftrightarrow \exists (a_0, a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$

*Alors $F$ et $G$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $E$.*
*En effet, soit $f \in F \cap G$. Puisque $f \in \mathbb{R}_m[x]$, alors d'après la formule de Taylor, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$$

*et puisque $f \in F$, alors $\forall k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $f^k(0) = 0$, donc $f$ est nulle, par suite $F \cap G = \{0\}$.*
*Soit maintenant $f \in E$. Cherchons $(g, h) \in F \times G$, tel que $f = g + h$. Pour cela, il suffit de considérer les fonction suivantes $g$ et $h$ définies par,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^k(0)}{k!} x^k \quad et \quad g(x) = f(x) - h(x)$$

*Alors $g \in F$, $h \in G$ et on a $f = g + h$.*

3. *Soit $E = \mathcal{M}_n(K)$, où $K$ est un corps commutatif, le $K$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $K$. On dit que $A \in M_n(K)$ est symétrique (resp. antisymétrique), si ${}^tA = A$ (resp. ${}^tA = -A$). On désigne, respectivement, par $\mathcal{S}_n(K)$ et $\mathcal{A}_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques et on pose $F = \mathcal{S}_n(K)$ et $G = \mathcal{A}_n(K)$. Alors $F$ et $G$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $E$.*
*En effet, il est clair que $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$ et que si $A$ est une matrice qui est à la fois symétrique et antisymétrique, alors $A = 0$, donc $F \cap G = \{0\}$.*
*Pour vérifier que $E = F + G$, il suffit de ramarquer que si $A \in E$, alors les matrices $A_1$ et $A_2$ définies par,*

$$A_1 = \frac{A + {}^tA}{2} \quad et \quad A_2 = \frac{A - {}^tA}{2}$$

*sont, respectivement, symétrique et antisymétrique et on a $A = A_1 + A_2$.*

**Théorème 1.14.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque. Alors tout sous-espace vectoriel de $E$ possède au moins un supplémentaire.

**Preuve**

*Supposons d'abord que la dimension de $E$ est finie.*
*Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels $G$ de $E$, tels que $F \cap G = \{0\}$. Alors $\mathcal{M} \neq \emptyset$, car $\{0\} \in \mathcal{M}$.*
*Posons $M = \{\dim(G) \ : \ G \in \mathcal{M}\}$, alors $M$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide et majorée par $\dim(E)$, donc $M$ possède un plus grand élément noté $p$. Puisque $p \in M$, alors il existe au moins un $G \in \mathcal{M}$, tel que $\dim(G) = p$, donc, par définition $F \cap G = \{0\}$.*
*Vérifions que $E = F + G$, pour cela, supposons, par absurde, que $E \neq F + G$, donc il existe $x \in E$, tel que $x \notin F + G$. Soit $H = G + \{\lambda \cdot x \ : \ \lambda \in K\}$, alors $H$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et on a $F \cap H = \{0\}$.*
*En effet, soit $y \in F \cap H$, alors il existe $g \in G$ et il existe $\lambda \in K$, tels que $y = g + \lambda \cdot x$.*
*Si $\lambda = 0$, alors $y \in G$ et puisque $F \cap G = \{0\}$, alors $y = 0$.*
*Si $\lambda \neq 0$, alors $x = \lambda^{-1} \cdot y - \lambda^{-1} \cdot g$, donc $x \in F + G$, ce qui est absurde, donc $\lambda = 0$ et ainsi $y = 0$.*
*Puisque $F \cap H = \{0\}$, donc $H \in \mathcal{M}$ avec $\dim(H) > \dim(G)$, absurde, car $\dim(G)$ est maximal.*

*Si, maintenant, la dimension de $E$ est infinie alors la démonstration précédente ne marche plus. Donc, dans ce cas, on est obligé d'appliquer le fâmeux théorème de Zorn :*

***Théorème 1.15** (de Zorn).*

*Si $(E, \leq)$ est un ensemle ordonné et si $E$ est inductif, alors $E$ possède au moins un élément maximal.*

**Preuve**

*Voir Annexe*

*Pour cela, on considère toujours l'ensemble $\mathcal{M}$ des sous-espaces vectoriels $G$ de $E$, tels que*
*$F \cap G = \{0\}$, ordonné par inclusion. Alors $\mathcal{M}$ est inductif, en effet :*

**i)** *$\mathcal{M} \neq \emptyset$, car $\{0\} \in \mathcal{M}$.*

**ii)** *Soit $\mathcal{A}$ une partie totalement ordonnée de $\mathcal{M}$ et soit $H = \bigcup_{G \in \mathcal{A}} G$.*
*Comme $\mathcal{A}$ est totalement ordonnée par inclusion, alors $H$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et on a,*

$$F \cap H = F \cap \left( \bigcup_{G \in \mathcal{A}} G \right) = \bigcup_{G \in \mathcal{A}} (F \cap G) = \{0\}$$

*Par suite $H \in \mathcal{M}$ et $H$ est un majorant de $\mathcal{A}$ pour l'inclusion.*
*Ainsi $(\mathcal{M}, \subseteq)$ est un ensemble inductif, donc d'après le lemme de Zorn, $\mathcal{M}$ possède au moins un élément maximal, noté $G$.*
*Vérifions que $E = F \oplus G$. Pour cela, on sait que $G \in \mathcal{M}$, donc $F \cap G = \{0\}$ et de la même manière que dans le cas précédent, on montre que $F + G = E$.*

## 1.16 Espace vectoriel quotient

**Proposition 1.17.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $E/F$ le groupe quotient de $E$ par $F$. Alors $E/F$ est un $K$-espace vectoriel pour la loi externe :

$$\begin{array}{rcl} K \times E/F & \longrightarrow & E/F \\ (\lambda, \overline{x}) & \longmapsto & \lambda \cdot \overline{x} = \overline{\lambda \cdot x} \end{array}$$

appelé espace vectoriel quotient de $E$ par $F$.

**Preuve**

*Il suffit de vérifier les quatre axiomes de la définition d'un espace vectoriel :*

**i)** $\forall x \in E,\ 1 \cdot \overline{x} = \overline{1 \cdot x} = \overline{x}$.

**ii)** $\forall \alpha \in K, \forall x \in E, \forall y \in E,$ *on a*

$$\alpha \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = \alpha \cdot \overline{x+y} = \overline{\alpha \cdot (x+y)} = \overline{\alpha \cdot x + \alpha \cdot y} = \overline{\alpha \cdot x} + \overline{\alpha \cdot y} = \alpha \cdot \overline{x} + \alpha \cdot \overline{y}$$

**iii)** $\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in E,$ *on a*

$$(\alpha + \beta) \cdot \overline{x} = \overline{(\alpha+\beta) \cdot x} = \overline{\alpha \cdot x + \beta \cdot x} = \overline{\alpha \cdot x} + \overline{\beta \cdot x} = \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{x}$$

**iv)** $\forall \alpha \in K, \forall \alpha\beta \in K, \forall x \in E,$ *on a*

$$(\alpha \times \beta) \cdot \overline{x} = \overline{(\alpha \times \beta) \cdot x} = \overline{\alpha \cdot (\beta \cdot x)} = \alpha \cdot \overline{\beta \cdot x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{x})$$

## 1.18 Partie génératrice – Partie libre – Base

### 1.18.1 Combinaisons linéaires - Partie génératrice

**Définition 1.19.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $A$ une partie non vide de $E$. On dit qu'un élément $x$ de $E$ est une combinaison linéaire d'éléments de $A$, s'il existe $x_1, x_2, \dots, x_n$ éléments de $A$ et il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ éléments de $K$, tels que

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

**Proposition 1.20.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $A$ une partie non vide de $E$. Alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$, appelé sous-espace vectoriel engendré par $A$ et se note $Vect(A)$.

**Preuve**
*Soient $x \in Vect(A)$ et $y \in Vect(A)$, alors par définition, on a*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad et \quad y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j$$

*où $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\alpha_i \in K$, $x_i \in A$, $\beta_j \in K$ et $y_j \in A$.*
*Pour chaque $k \in \{1, 2, \ldots, n+m\}$, soient $\gamma_k \in K$ et $z_k \in A$ définis par,*

$$\gamma_k = \begin{cases} \alpha_k & si\ k \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ \beta_{k-n} & si\ k \in \{n+1, \ldots, n+m\} \end{cases} \quad et \quad z_k = \begin{cases} x_k & si\ k \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ y_{k-n} & si\ k \in \{n+1, \ldots, n+m\} \end{cases}$$

*Alors, on aura,*

$$x + y = \sum_{k=1}^{n+m} \gamma_k z_k$$

*donc $x+y$ est une combinaison linéaire d'éléments de $A$, par suite, $x+y \in Vect(A)$.*
*De la même manière, on montre que si $\lambda \in K$ et $x \in Vect(A)$, alors $\lambda \cdot x \in Vect(A)$.*

**Remarques 1.6**

1. *On vérifie facilement que $Vect(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $A$, c'est à dire, si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ qui contient $A$, alors $F$ contient aussi $Vect(A)$.*
2. *Puisque $\{0\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ contenant $\emptyset$, alors on peut écrire $Vect(\emptyset) = \{0\}$. C'est pour cela qu'on convient d'écrire,*

$$\sum_{i \in \emptyset} \alpha_i x_i = 0$$

**Définition 1.21.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $A$ une partie de $E$. On dit que $A$ est une partie génératrice de $E$, si $Vect(A) = E$.

**Exemples 1.3**

1. *$\emptyset$ est une partie génératrice de l'espace vectoriel nul $\{0\}$.*
2. *Pour tout $K$-rspace vectoriel $E$, $E$ est une partie génératrice de $E$.*
3. *$A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une partie génératrice de $K^n$, où*

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0 \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

4. *$A = \{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\}$ est une partie génératrice de $K[X]$.*
5. *$A = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une partie génératrice de $K_n[X]$.*

### 1.21.1 Partie libre

**Définition 1.22.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $L$ une partie non vide de $E$.

**i)** Si $L$ est **finie**, $L = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, on dit que $L$ est **libre**, si pour tout $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in K^n$, on a

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

**ii)** Si $L$ est **infinie**, on dit que $L$ est libre, si toute partie finie de $L$ est libre.

**iii)** Une partie de $E$ qui n'est pas libre est dite **liée**.

**Exemples 1.4**

1. *Toute partie contenant le vecteur nul est liée.*
2. *Par convention, $L = \emptyset$ est une partie libre.*
3. *Pour tout $x \neq 0$, $L = \{x\}$ est une partie libre.*
4. $L = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, *où* $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ *est une partie libre de $K^n$.*
5. $L = \{1, X, \ldots, X^n\}$ *est une partie libre de $K_n[X]$.*
6. $L = \{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\ldots\}$ *est une partie libre de $K[X]$.*
7. $L = \{x^{(m)} \; : \; m \in \mathbb{N}\}$, *où* $\forall m \in \mathbb{N}$, $x^{(m)} = (x_n^{(m)})_{n \geq 0}$ *est la suite de $K$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; x_n^{(m)} = \begin{cases} 1 & si \;\; n = m \\ 0 & si \;\; n \neq m \end{cases}$$

   *Alors $L$ est une partie libre de $K^{\mathbb{N}}$*

8. *Soit $I$ un ensemble non vide quelconque, alors $L = \{f_y \; : \; y \in K^*\}$ est une partie libre du $K$-espace vectoriel $K^I$ de toutes les applications de $I$ vers $K$.*

$$où \;\; \forall y \in K^*, \; \forall x \in K, \;\; f_y(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x = y \\ 0 & si \;\; x \neq y \end{cases}$$

### 1.22.1 Base

**Définition 1.23.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $B$ une partie quelconque de $E$. On dit que $B$ forme une **base** de $E$, si $B$ est à la fois une partie libre et génératrice.

**Remarques 1.7**

1. *En fait, une base de $E$ est une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $E$, telle que,*

   **i)** $\forall i \in I$, $\forall j \in I$, $\; i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$.

   **ii)** $B = \{x_i \; : \; i \in I\}$ *forme une partie libre de $E$.*

2. *Donc si une partie $B$ forme une base de $E$, alors le "nombre" de bases qu'on peut former à partir de $B$ est égal au nombre de permutation qu'on peut faire sur les éléments de $B$.*

3. *Par exemple si $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ forme une base de $E$, alors $(x_1, x_2, x_3)$, $(x_1, x_3, x_2)$, $(x_2, x_1, x_3)$, $(x_2, x_3, x_1)$, $(x_3, x_1, x_2)$ et $(x_3, x_2, x_1)$ sont six bases différentes de $E$.*

**Exemples 1.5**

1. *Par convention, $B = \emptyset$ est une base de l'espace vectoriel nul $\{0\}$.*
2. *$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ forme une base de $K^n$. Donc pour tout $\sigma \in S_n$, $(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ est une base de $K^n$. $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ s'appelle la base canonique de $K^n$*
3. *$B = \{1, X, \dots, X^n\}$ forme une base de $K_n[X]$.*
   *$(1, X, \dots, X^n)$ s'appelle la base canonique de $K_n[X]$*
4. *$B = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ forme une base de $K[X]$.*

**Lemme 1.24.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $L$ une partie **libre** de $E$ et $x \in E$, alors

$$x \notin Vect(L) \Longleftrightarrow L \cup \{x\} \ \text{ est libre}$$

**Preuve**

*Par contraposée, il suffit de montrer que*

$$x \in Vect(L) \Longleftrightarrow L \cup \{x\} \ \textit{ est liée}$$

($\Longrightarrow$) *Trivial.*

($\Longleftarrow$) *Supposons que $L \cup \{x\}$ est liée, donc par définition, il existe $x_1, x_2, \dots, x_n$ éléments de $L \cup \{x\}$ et il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ éléments de $K$ non tous nuls, tels que,*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

*Puisque $L$ est libre, alors il existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, tel que $x_{i_0} = x$ et pour la même raison, puisque $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, on aura $\alpha_{i_0} \neq 0$. Donc*

$$x = -\frac{1}{\alpha_{i_0}} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}} \alpha_i x_i$$

*Par suite, $x \in Vect(L)$.*

**Théorème 1.25** (Caractérisation d'une base)**.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $B$ une partie de $E$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

**i)** $B$ forme une **base** de $E$.

**ii)** $B$ est une partie **génératrice minimal** de $E$.

**iii)** $B$ est une partie **libre maximal** de $E$.

**Preuve**

**i) $\Longrightarrow$ ii)** *Supposons que $B$ forme une base de $E$. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble de toutes les parties génératrices de $E$. On doit montrer que $B$ est un élément minimal de $(\mathcal{G}, \subseteq)$.*
*Pour cela, soit $A$ un élément de $\mathcal{G}$, tel que $A \subseteq B$, a-t-on $A = B$ ?*
*Supposons, par absurde, que $A \neq B$, donc il existe $x \in E$, tel que $x \in B$ et $x \notin A$.*
*$A$ est une partie génératrice de $E$, donc il existe $x_1, x_2, \dots, x_n$ éléments de $A$ et il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ éléments de $K$, tels que*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

*Donc $\{x, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est liée avec $\{x, x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq B$, donc $B$ est liée, ce qui est absurde, car $B$ est libre. Ainsi $B$ est un élément minimal de $(\mathcal{G}, \subseteq)$.*

**ii) $\Longrightarrow$ iii)** *Supposons que $B$ est une partie génératrice minimal de $E$. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble de toutes les parties libres de $E$. On doit montrer que $B$ est un élément maximal de $(\mathcal{L}, \subseteq)$.*
*Pour cela, montrons d'abord que $B$ est libre. Supposons, par absurde, que $B$ n'est pas libre, donc il existe $x_1, x_2, \dots, x_n$ éléments de $B$ et il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ non tous nuls, tels que*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

$$\begin{aligned}
(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0) \quad &\Longrightarrow \quad \exists i_0 \in \{1, 2, \dots, n\} \ : \ \alpha_{i_0} \neq 0 \\
&\Longrightarrow \quad x_{i_0} = -\frac{1}{\alpha_{i_0}} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_{i_0}}} \alpha_i x_i \\
&\Longrightarrow \quad B \setminus \{x_{i_0}\} \ \textit{ est une partie génératrice de } E
\end{aligned}$$

*Ce qui est absurde, car $B \setminus \{x_{i_0}\} \nsubseteq B$ et $B$ génératrice minimal. Donc $B$ est libre.*
*Montrons maintenant que $B$ est un élément maximal de $\mathcal{L}$. Pour cela, soit $L$ un élément de $\mathcal{L}$, tel que $B \subseteq L$, a-t-on $B = L$ ?*
*Supposons, par absurde, que $B \neq L$, donc il existe $x \in E$, tel que $x \in L$ et $x \notin B$. Or $x \in Vect(B)$, car $B$ est une partie génératrice, donc, d'après le lemme précédent, $B \cup \{x\}$ est liée. Puisque $B \cup \{x\} \subseteq L$, alors $L$ est liée, ce qui est absurde, car $L$ est libre.*

**iii) $\Longrightarrow$ i)** *Supposons que $B$ est libre maximale et montrons que $B$ forme une base de $E$. Pour cela, il suffit de montrer que $Vect(B) = E$.*
*Supposons que, par absurde, que $Vect(B) \neq E$, soit $x \in E$, tel que $x \notin Vect(B)$, donc d'après le lemme précédent, on a*

$$[x \notin Vect(B) \ \ \textit{et} \ \ B \ \ \textit{libre} \ ] \Longrightarrow B \cup \{x\} \ \ \textit{libre}$$

*Ce qui est absurde, car $B \nsubseteq B \cup \{x\}$ et $B$ libre maximale.*

**Remarques 1.8**
*Le théorème précédent nous permet, en utisant le lemme de Zorn (voir annexe), de montrer que tout espace vectoriel admet au moins une base.*

# 1.26 Espaces vectoriels de dimension finie

## 1.26.1 Définition et exemples

**Définition 1.27.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel. On dit que $E$ est de **dimension finie** sur $K$, si $E$ possède au moins une partie génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que $E$ est de dimension infinie.

**Exemples 1.6**

1. *Soit $K$ un corps commutatif, alors pour tout entier $n \geq 1$, $K^n$ est de dimension finie sur $K$.*
   *En effet, soit $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, où $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$, alors $A$ est une partie génératrice finie de $K^n$.*
2. *Pour tout corps commutatif $K$ et pour tout entier $n \geq 1$, $K_n[X]$ est de dimension finie sur $K$.*
   $$K_n[X] = \{P \in K[X] \ : \ \deg(P) \leq n\}$$
   $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ *est une partie génératrice finie de $K_n[X]$.*
3. *Si $E$ est de dimension finie sur $K$, alors tout sous-espace vectoriel de $E$ est aussi de dimension finie sur $K$. (Voir Corollaire 1.30)*
4. *Si $E$ est de dimension finie sur $K$ et si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors l'espace vectoriel quotient $E/F$ est aussi de dimension finie sur $K$.*
   *En effet, soit $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ une partie génératrice finie de $E$, alors il est facile de voir que $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m\}$ est une partie génératrice de $E/F$.*
5. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Si $E/F$ et $F$ sont de dimension finie sur $K$, alors $E$ est aussi de dimension finie sur $K$.*
   *En effet, soient $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m\}$ une partie génératrice de $E/F$ et $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ une partie génératrice de $F$. Soit $x \in E$, alors il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ éléments de $K$, tels que*
   $$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{x}_i$$
   *Donc $\overline{x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i} = \overline{0}$, par suite, $x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in F$, donc il existe $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ éléments de $K$, tels que*
   $$x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j$$
   *Ainsi on aura*
   $$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j$$
   *On conclue que $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est une partie génératrice de $E$.*

### 1.27.1 Théorème de la dimension finie

**Lemme 1.28.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $A$ et $B$ deux parties de $E$ et $n$ un entier $\geq 0$, tels que

**i)** $Cardinal(A) = n$ et $Cardinal(B) = n+1$.

**ii)** Tout élément de $B$ est combinaison linéaire d'éléments de $A$, (c'est à dire, $B \subseteq Vect(A)$).
Alors $B$ est liée.

**Preuve**
*On procède par récurrence sur $n \geq 0$.*
*Pour $n = 0$, on a $A = \emptyset$ et $B = \{y\}$, donc $Vect(A) = \{0\}$ et puisque $B \subseteq Vect(A)$, alors $y = 0$, par suite, $B$ est liée.*
*Pour $n = 1$, on a $A = \{x_1\}$ et $B = \{y_1, y_2\}$ avec $y_1 = \alpha x_1$ et $y_2 = \beta x_1$, car $B \subseteq Vect(A)$. On constate que $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, car sinon, on aura $y_1 = y_2 = 0$, ce qui est absurde, car, $Cardinal(B) = 2$.*

$$\begin{aligned} y_1 = \alpha x_1 \quad et \quad y_2 = \beta x_1 &\Longrightarrow \beta y_1 - \alpha y_2 = 0 \\ &\Longrightarrow \{y_1, y_2\} \quad est\ lié \quad (car\ \ (\alpha,\beta) \neq (0,0)) \\ &\Longrightarrow B \quad est\ liée \end{aligned}$$

*H.R : "Supposons que $n \geq 1$ et que le lemme est vrai pour tout entier $m < n$".*
*Posons $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}\}$. Alors, par hypothèse, on a*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n, n+1\}, \ \ y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$$

*Si $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$, $\alpha_{in} = 0$, alors*

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subseteq Vect(\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$$

*Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est liée, par suite, $B$ est liée.*
*Si, maintenant, il existe $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$, tel que $\alpha_{i_0 n} \neq 0$, alors quitte à réordonner les éléments de $B$, on peut supposer que $\alpha_{n+1,n} \neq 0$, donc on aura*

$$\begin{aligned} y_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{n+1,j} x_j &\Longrightarrow x_n = \frac{1}{\alpha_{n+1,n}} \left( y_{n+1} - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{n+1,j} x_j \right) \\ &\Longrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ y_i = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_j + \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{n+1,n}} \left( y_{n+1} - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{n+1,j} x_j \right) \\ &\Longrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ y_i - \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{n+1,n}} y_{n+1} = \sum_{j=1}^{n-1} \left( \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{n+1,n}} \alpha_{n+1,j} \right) x_j \end{aligned}$$

*Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, posons $z_i = y_i - \dfrac{\alpha_{in}}{\alpha_{n+1,n}} y_{n+1}$*
*Donc tout élément de $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ est combinaison linéaire d'éléments de $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$.*

*Donc, d'après l'hypothèse de récurrence,* $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ *est liée, par suite, il existe* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ *éléments de* $K$ *avec* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$*, tels que*

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i z_i = 0$$

*Donc, on aura*

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \left( y_i - \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{n+1,n}} y_{n+1} \right) = 0$$

*Pour chaque* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*, posons*

$$\lambda_i = \gamma_i \quad et \quad \lambda_{n+1} = -\frac{1}{\alpha_{n+1,n}} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \alpha_{in}$$

*Alors* $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ *et on a*

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i y_i = 0$$

*Donc* $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}\}$ *est liée.*

**Corollaire 1.29.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $A$ une partie **génératrice finie** de $E$. Alors pour toute partie **libre** $L$ de $E$, on a

$$\boxed{Cardinal(L) \leq Cardinal(A)}$$

**Preuve**

*Posons* $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$*, puis supposons, par absurde, que* $L$ *est une partie libre de* $E$*, telle que* $Cardinal(L) > Cardinal(A)$*.*
*Soient* $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ $(n+1$ *éléments de* $L$ *deux à deux distints.*
*Puisque* $E = Vect(A)$*, alors on a*

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}\} \subseteq Vect(A)$$

*Donc, d'après le lemme précédent,* $\{y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}\}$ *est liée, par suite,* $L$ *est liée, ce qui est absurde, car* $L$ *est libre.*

**Corollaire 1.30.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel. Alors $E$ est de dimension infinie, si et seulement si, $E$ possède au moins une partie libre infinie.

**Preuve**

$(\Longrightarrow)$ *Supposons que* $E$ *est de dimension infinie. Soit* $x_1 \in E$ *avec* $x_1 \neq 0$*, puisque* $E$ *est de dimension infinie, alors* $Vect(x_1) \neq E$*.*
*Soit* $x_2 \in E$ *avec* $x_2 \notin Vect(x_1)$*, donc* $\{x_1, x_2\}$ *est libre. Puisque* $E$ *est de dimension infinie, alors* $Vect(\{x_1, x_2\}) \neq E$*.*
*Soit* $x_3 \in E$ *avec* $x_3 \notin Vect(\{x_1, x_2\})$*, donc* $\{x_1, x_2, x_3\}$ *est libre. Ainsi, par récurrence, on construit une suite* $(x_n)_{n \geq 1}$ *d'éléments de* $E$*, tels que*

$$\forall n \geq 1, \quad \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \quad est\ libre$$

*Donc* $L = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ *est une partie libre infinie de* $E$*.*

($\Longleftarrow$) *Supposons que $E$ possède une partie libre infinie $L$ et supposons, par absurde, que $E$ est de dimension finie. Soit $A$ une partie génératrice finie de $E$, alors d'après le lemme précédent, $Cardinal(L) \leq Cardinal(A)$, ce qui est absurde.*

**Exemples 1.7**

1. *Pour tout corps commutatif $K$, $K[X]$ est un $K$-espace vectoriel de dimension infinie, car $L = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ est une partie libre infinie de $K[X]$.*
2. *$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les suites réelles est de dimension infinie, car*
$$L = \{x^{(m)} \ : \ m \in \mathbb{N}\}$$
*est une partie libre infinie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, où pour tout entier $m \geq 0$, $x^{(m)} = (x_n^{(m)})_{n\geq 0}$ est la suite de $\mathbb{R}$ définie par*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ x_n^{(m)} = \begin{cases} 1 & si \ n = m \\ 0 & si \ n \neq m \end{cases}$$
3. *Si $E$ possède un sous-espace vectoriel de dimension infinie, alors $E$ est de dimension infinie. Par suite, si $E$ est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de $E$ est de dimension finie.*
4. *$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, donc $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'espace vectoriel de toutes les applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, est de dimension infinie.*
5. *Un élément $\alpha \in \mathbb{R}$ est dit **algèbrique**, s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Q}[X]$, tel que $P(\alpha) = 0$. Si $\alpha$ n'est pas algèbrique, on dit que $\alpha$ est **transcendant**. Il est facile de montrer, en utilisant le fait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable, que l'ensemble des nombres algèbriques est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est non dénombrable, alors l'ensemble des nombres transcendants n'est pas vide et possède le même cardinal que $\mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre transcendant, alors par définition,*
$$L = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots\}$$
*est une partie libre infinie de $\mathbb{R}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Donc $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.*

**Remarques 1.9**

*L'ensemble des nombres transcendants est infini non dénombrable, cependant on ne connaît que peu de nombres transcendants. Par exemple $\pi$ et $e$ sont des nombres transcendants et si $\alpha$ est un nombre algébrique, alors d'après le théorème de Hermite-Lindemann, $e^{\alpha}$ est un nombre transcendant.*

**Corollaire 1.31.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de $E$ est aussi de dimension finie.

**Preuve**

*Puisque $E$ est de dimension finie, alors d'après le corollaire 1.6.1, toute partie libre de $E$ est finie. Par suite, si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors toute partie libre de $F$ est finie, donc, d'après le corollaire précédent, $F$ est de dimension finie.*

**Corollaire 1.32.**

Tout espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base.

**Preuve**

*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $A$ une partie génératrice finie de $E$.*
*Si $E = \{0\}$, alors, par convention, $B = \emptyset$ est une base de $E$, donc dans la suite on peut supposer que $E \neq \{0\}$*
*D'après le théorème de caractérisation d'une base, il suffit de montrer que $E$ possède au moins une partie libre maximale. Pour cela, soit $\mathcal{L}$ l'ensemble de toutes les parties libres de $E$, alors $\mathcal{L} \neq \emptyset$, car*

$$\forall x \in E, \quad x \neq 0 \Longrightarrow \{x\} \in \mathcal{L}$$

*Soit $\Lambda = \{Cardinal(L) \ : \ L \in \mathcal{L}\}$, alors*

**i)** *$\Lambda \neq \emptyset$, car $1 \in \Lambda$.*

**ii)** *$\Lambda$ est majorée, car $\forall L \in \mathcal{L}$, $Cardinal(L) \leq Cardinal(A)$.*

*Ainsi, $\Lambda$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée, donc $\Lambda$ possède un plus grand élément noté $m$.*
*$m \in \Lambda$, donc il existe $B \in \mathcal{L}$, tel que $Cardinal(B) = m$. Puisque pour toute partie libre $L$ de $E$, on a*

$$Cardinal(L) \leq Cardinal(B)$$

*alors $B$ est une partie libre maximale de $E$, donc $B$ forme une base de $E$.*

**Théorème 1.33** (Théorème de la dimension finie)**.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, alors

**i)** Toute base de $E$ est de cardinal fini.

**ii)** Toutes les bases de $E$ ont même cardinal.

**Preuve**

**i)** *Soit $A$ une partie génératrice finie de $E$ et soit $B$ une base quelconque de $E$. Puisque $B$ est libre, alors $Cardinal(B) \leq Cardinal(A)$, puisque $A$ est finie alors $B$ est finie.*

**ii)** *Soient $B_1$ et $B_2$ deux bases de $E$. Puisque $B_1$ est génératrice et $B_2$ libre, alors*

$$Cardinal(B_2) \leq Cardinal(B_1)$$

*De la même manière on voit que $Cardinal(B_1) \leq Cardinal(B_2)$.*
*Donc $Cardinal(B_1) = Cardinal(B_2)$.*

**Définition 1.34.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal commun à toutes les bases de $E$, s'appelle la **dimension** de $E$ sur $K$ et se note $\dim_K(E)$ ou tout simplement $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguité.

**Remarques 1.10**

*La dimension d'un $K$-espace vectoriel dépend du corps $K$. Par exemple on a*

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1, \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2 \quad et \quad \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}) = \infty$$

**Corollaire 1.35.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, alors

**i)** Toute partie libre de $E$ est de cardinal $\leq n$.

$$\boxed{L \text{ libre} \Longrightarrow Cardinal(L) \leq n}$$

**ii)** Toute partie génératrice de $E$ est de cardinal $\geq n$.

$$\boxed{A \text{ gńératrice} \Longrightarrow Cardinal(A) \geq n}$$

**Preuve**

*Soit $B$ une base de $E$, puisque $\dim(E) = n$, alors $Cardinal(B) = n$.*

**i)** *Soit $L$ une partie libre de $E$, puisque $B$ est une partie génératrice, alors*

$$Cardinal(L) \leq Cardinal(B)$$

**ii)** *Soit $A$ une partie génératrice de $E$, puisque $B$ est une partie libre de $E$, alors*

$$Cardinal(B) \leq Cardinal(A)$$

**Corollaire 1.36.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, alors

**i)** Toute partie libre de cardinal $= n$ est une base de $E$.

$$\boxed{[(L \text{ libre}) \text{ et } (Cardinal(L) = n)] \Longrightarrow L \text{ base de } E}$$

**ii)** Toute partie génératrice de cardinal $= n$ est une base de $E$.

$$\boxed{[(A \text{ génératrice}) \text{ et } (Cardinal(A) = n)] \Longrightarrow A \text{ base de } E}$$

**Preuve**

**i)** *Si $L$ est une partie libre de cardinal $= n$, alors il est facile de voir que $L$ est une partie libre maximale.*

**ii)** *Si $A$ est une partie génératrice de cardinal $= n$, alors il est facile de voir que $A$ est une partie génératrice minimale.*

### 1.36.1 Théorème de la base incomplète

**Théorème 1.37.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $A$ une partie génératrice quelconque de $E$ et $L$ une partie libre de $E$, telle que $L \subseteq A$. Alors il existe une base $B$ de $E$, telle que

$$\boxed{L \subseteq B \subseteq A}$$

**Preuve**

*On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ de toutes les parties libres $G$ de $E$, telles que $L \subseteq G \subseteq A$. Or pour tout $G \in \mathcal{A}$, on a $Cardinal(G) \leq \dim(E)$, donc $\mathcal{A}$ possède au moins un élément $B$ dont le cardinal est maximal.*
*Supposons, par absurde, que $Vect(B) \neq E$, donc $A \nsubseteq Vect(B)$, car $E$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $A$. Soit $x \in A$, tel que $x \notin Vect(B)$, alors on a*

$$[x \notin Vect(B) \text{ et } B \text{ libre}] \Longrightarrow B \cup \{x\} \text{ libre}$$

*avec $B \cup \{x\} \in \mathcal{A}$ et $B \subsetneq B \cup \{x\}$, ce qui est absurde, car le cardinal de $B$ est maximal.*
*Donc $Vect(B) = E$ et par suite, $B$ est une base de $E$ vérifiant $L \subseteq B \subseteq A$.*

**Corollaire 1.38.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $\geq 1$. Alors

**i)** Toute partie libre de $E$ peut-être complétée en une base de $E$.

**ii)** De toute partie génératrice de $E$ on peut extraire une base de $E$.

**Preuve**

**i)** *Soit $L$ une partie libre de $E$. Puisque $E$ est une partie génératrice de $E$ qui contient $L$, alors d'après le théorème précédent, il existe une base $B$ de $E$, telle que,*

$$L \subseteq B \subseteq E$$

**ii)** *Soit $A$ une partie génératrice de $E$ et soit $x \in A$ avec $x \neq 0$. Alors $L = \{x\}$ est une partie libre de $E$, telle que $L \subseteq A$, donc d'après le théorème précédent, il existe une base $B$ de $E$, telle que,*

$$L \subseteq B \subseteq A$$

### 1.38.1 Identités remarquables concernant la dimension

**Proposition 1.39.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie. Alors

**i)** Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$, alors on a

$$\boxed{E = F \oplus G \Longrightarrow \dim(E) = \dim(F) + \dim(G)}$$

**ii)** Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$, alors on a

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)}$$

**iii)** Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors on a

$$\boxed{\dim(E/F) = \dim(E) - \dim(F)}$$

**Preuve**

**i)** *Soient* $B_1$ *une base de* $F$ *et* $B_2$ *une base de* $G$, *alors on a*

$B_1 \cap B_2 = \emptyset$, *car* $F \cap G = \{0\}$.

$B = B_1 \cup B_2$ *est une base de* $E$, *car* $F \cap G = \{0\}$ *et* $F + G = E$.

*Donc on a*

$$\dim(E) = Cardinal(B) = Cardinal(B_1) + Cardinal(B_2) = \dim(F) + \dim(G)$$

**ii)** *Soit* $H$ *un supplémentaire de* $F \cap G$ *dans* $F$, *alors, d'après ce qui précède, on a*

$$\dim(F) = \dim(H) + \dim(F \cap G)$$

*Or, on voit facilement que* $F + G = H \oplus G$, *donc on aura,*

$$\dim(F+G) = \dim(H \oplus G) = \dim(H) + \dim(G) = \dim(F) - \dim(F \cap G) + \dim(G)$$

**iii)** *Soit* $G$ *un supplémentaire de* $F$ *dans* $E$, *alors on a*

$$\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$$

*Soit* $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ *une base de* $G$.

*Nous allons vérifier que* $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m\}$ *est une base de* $E/F$.

*Soit* $x \in E$, *alors on a* $x = y + z$ *avec* $y \in F$ *et* $z \in G$, *donc* $\overline{x} = \overline{z}$, *car* $\overline{y} = \overline{0}$.

$z \in G$, *donc il existe* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *éléments de* $K$, *tels que* $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$. *Donc on aura*

$$\overline{x} = \overline{z} = \overline{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m} = \alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \cdots + \alpha_m \overline{x}_m$$

*Par suite,* $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m\}$ *est une partie génératrice de* $E/F$.

*Soit* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *éléments de* $K$, *tels que* $\alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \cdots + \alpha_m \overline{x}_m = \overline{0}$.

*a-t-on* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ *?*

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \cdots + \alpha_m \overline{x}_m = \overline{0} &\Longrightarrow \overline{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m} = \overline{0} \\
&\Longrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m \in F \\
&\Longrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = 0 \quad \textit{car } F \cap G = \{0\} \\
&\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0 \\
&\qquad\qquad \textit{car } \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \textit{ est libre}
\end{aligned}$$

*Ainsi* $\overline{B} = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m\}$ *est une base de* $E/F$ *et on a*

$$\dim(E/F) = Cardinal(\overline{B}) = \dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$$

**Corollaire 1.40.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Alors

$$E = F \oplus G \Longleftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \text{et} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$$

**Preuve**

($\Longrightarrow$) *D'après la proposition précédente.*

($\Longleftarrow$) *Puisque* $F \cap G = \{0\}$, *alors d'après la proposition précédente, on aura*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$

*Donc* $F + G = E$ *et par conséquent,* $E = F \oplus G$.

**Remarques 1.11**

*Soient* $E$ *un* $K$*-espace vectoriel de dimension finie,* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *des sous-espaces vectoriels de* $E$*. Alors on vérifie, par récurrence sur* $n$*, qu'on a toujours*

$$\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \cdots + \dim(F_n)$$

**Corollaire 1.41.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de $E$. Alors

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n \Longleftrightarrow \begin{cases} F_1 + F_2 + \cdots + F_n = E \\ \text{et} \\ \dim(F_1) + \dim(F_2) + \cdots + \dim(F_n) = \dim(E) \end{cases}$$

**Preuve**

($\Longrightarrow$) *Il suffit de montrer par récurrence sur* $n \geq 2$ *que*

$$\dim(F_1) + \dim(F_2) + \cdots + \dim(F_n) = \dim(E)$$

*D'après le corollaire précédent, la propriètè est vraie pour* $n = 2$
*Supposons que* $n > 2$ *et que la propriètè est vraie pour tout entier* $m < n$.
*Puisque* $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$, *alors* $(F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1}) \cap F_n = \{0\}$, *donc*

$$\dim((F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1}) + F_n) = \dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1}) + \dim(F_n)$$

*Or* $F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1}$ *est une somme directe, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, on a*

$$\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1}) = \dim(F_1) + \dim(F_2) + \cdots + \dim(F_{n-1})$$

*Puisque* $E = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ *alors on a le résultat.*

($\Longleftarrow$) *Il suffit de vérifier que*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \quad F_i \cap (F_{i+1} + \cdots + F_n) = \{0\}$$

*Pour cela, supposons, par absurde, qu'il existe* $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, *tel que*

$$F_i \cap (F_{i+1} + \cdots + F_n) \neq \{0\}$$

*Donc* $\dim(F_i \cap (F_{i+1} + \cdots + F_n)) \neq 0$, *par suite, on aura*

$$\dim(F_i + F_{i+1} + \cdots + F_n) < \dim(F_i) + \dim(F_i + F_{i+1} + \cdots + F_n)$$

*D'autre part, on a*

$$\begin{aligned}
\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) &\leq \dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_{i-1}) + \dim(F_i + \cdots + F_n) \quad \textit{pour } i \neq 1 \\
&< \dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_{i-1}) + \dim(F_i) + \dim(F_{i+1} + \cdots + F_n) \\
&< \dim(F_1) + \dim(F_2) + \cdots + \dim(F_n)
\end{aligned}$$

*Ce qui est absurde, car on a*

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = E \quad \textit{et} \quad \dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2) + \cdots + \dim(F_n)$$

## 1.42 Exercices

**Exercice 1.1**
On munit $\mathbb{R}_+^*$ de la loi interne notée $\oplus$ et définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \oplus y = xy$$

et d'une loi externe définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda \cdot x = x^\lambda$$

Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Exercice 1.2**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit $(E^2, +)$ de la loi externe suivante,

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} \times E^2 &\longrightarrow E^2 \\
(\lambda, (x, y)) &\longmapsto \lambda \cdot (x, y)
\end{aligned}$$

où pour $\lambda = a + ib$, on a $\lambda \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay)$.
Montrer que $(E^2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

**Exercice 1.3**
Soient $(E, +)$ un groupe commutatif et $p$ un nombre premier.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $E$ soit un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel.

**Exercice 1.4**
Parmi les ensembles suivants lequel est un sous-espace vectoriel ?

1. $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \ : \ f \text{ est croissante}\}$.
2. $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \ : \ f(0) = 1\}$.

3. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ : \ f(1) = 0\}$.
4. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ : \ f$ continue et $(f(1) = 0$ ou $f(5) = 0)\}$.
5. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ : \ \exists(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \alpha\cos(x + \varphi)\}$.
6. $\{P \in K[X] \ : \ P(X + 2) = 2P(X + 1) - P(X)\}$.
7. $\{P \in K[X] \ : \ P(0) \in \mathbb{Z}\}$.
8. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ : \ f(\mathbb{R})$ est fini$\}$

**Exercice 1.5**
On note $F$ l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$, $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, tels que

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz = 0$$

Est-ce que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ ?

**Exercice 1.6**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $F$, $G$ et $H$ trois sous-espaces vectoriels de $E$.

1. Montrer que
$$H \subseteq F \cup G \Longrightarrow H \subseteq F \text{ ou } H \subseteq G$$
2. Comparer les sous-espaces vectoriels suivants :
   **a)** $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.
   **b)** $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.
3. Montrer que
$$F \cap (G + F \cap H) = (F \cap G) + (F \cap H)$$
4. Montrer que
$$G \subseteq F \Longrightarrow [F \cap (G + H) = G + (F \cap H)]$$

**Exercice 1.7**
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n$ un entier $\geq 2$ et $F_1, F_2, \ldots, F_n$, des sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ est un sous-espace vectoriel de $E$, si et seulement si, il existe $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tel que

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad F_i \subseteq F_{i_0}$$

**Exercice 1.8**
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, soit $F_n = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ |x| \geq n \Longrightarrow f(x) = 0\}$.

**a)** Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

**b)** Déterminer $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

**c)** Montrer que $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Exercice 1.9**
Soit $E$ un $K$-espace vectoriel. On désigne par $\mathcal{V}$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de $E$ ordonné par inclusion.

**a)** Montrer que $\mathcal{V}$ possède un plus petit et un plus grand élément.

**b)** Soient $F$ et $G$ deux éléments de $\mathcal{V}$. Motrer que $\{F, G\}$ possède un majorant et un minorant dans $\mathcal{V}$, que l'on déterminera.

**Exercice 1.10**
Soient $F$, $G$, $H$ et $I$ les parties de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{aligned} F &= \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0\}, \\ G &= \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0\}, \\ H &= \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0\}, \\ \text{et } I &= \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n = 0\}. \end{aligned}$$

Déterminer $F \cap G$, $F \cap H$ et $F \cap L$.

**Exercice 1.11**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $F$, $G$ et $H$ trois sous-espaces vectoriels de $E$, tels que

$$F \cap G = F \cap H, \quad F + G = F + H \ \text{ et } \ G \subseteq H$$

Montrer que $G = H$. Sur des exemples bien choisis, montrer que cette égalité peut devenir fausse lorsque une au moins des trois hypothèses manque.
Si $F \oplus G = F \oplus H$ est-ce que $G = H$ ?

**Exercice 1.12**
Soient $A \in \mathbb{R}|X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ : \ A \text{ divise } P\}$. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer un supplémentaire de $F$ dans $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice 1.13**
Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts et soit $F$ la partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par

$$F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ : \ f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n) = 0\}$$

Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et déterminer un supplémentaire de $F$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

**Exercice 1.14**
Soient $F = \{(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$ et $G$ l'ensemble de toutes les suites constantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = F \oplus G$.

**Exercice 1.15**
Soit $K$ un corps commutatif. Pour chaque $a \in K$, on pose

$$E_a = \{P \in K[X] \ : \ P(a) = 0\}$$

Montrer que

$$\forall a \in K, \forall b \in K, \ a \neq b \Longrightarrow E_a + E_b = K[X]$$

La somme est-elle directe ?

**Exercice 1.16**
Soient $E$, $F$ et $G$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{aligned} E &= \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0\}, \\ F &= \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = 0\}, \\ \text{et } G &= \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 2u_n = 0\} \end{aligned}$$

Motrer que $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$ et que $E = F \oplus G$.

**Exercice 1.17**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de $E$, tels que $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n$. Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, soit $G_j$ un supplémentaire de $F_j$ dans $F_{j+1}$. Montrer que la somme $G_1 + G_2 + \cdots + G_{n-1}$ est directe et que $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_{n-1}$ est un supplémentaire de $F_1$ dans $E$.

**Exercice 1.18**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $A$ et $B$ deux parties quelconques de $E$. Comparer les parties de $E$ suivantes :

**a)** $Vect(A \cap B)$ et $Vect(A) \cap Vect(B)$.

**b)** $Vect(A \cup B)$ et $Vect(A) \cup Vect(B)$.

**c)** $Vect(A \cup B)$ et $Vect(A) + Vect(B)$.

**Exercice 1.19**
Soit $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque.

**a)** Soient $x$, $y$ et $z$ trois éléments de $E$. Montrer que

$$[Vect(x, y) = Vect(x, z)] \Longleftrightarrow [\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in K^3 \ : \ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \ \text{ et } \ \beta\gamma \neq 0]$$

**b)** Soient $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, $y$ et $z$ deux éléments de $E$. Montrer que

$$[F + Vect(y) = F + Vect(z)] \Longleftrightarrow [\exists x \in F, \ \exists(\alpha, \beta) \in K^2 \ : \ x + \alpha y + \beta z = 0 \ \text{ et } \ \alpha\beta \neq 0]$$

**Exercice 1.20**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient $L_1$ et $L_2$ les parties de $E$ définies par

$$L_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \ \text{ et } \ L_2 = \{x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n + x_1\}$$

Montrer que

**a)** Si $n$ est pair, alors $L_2$ est liée.

**b)** Si $n$ est impair, alors
$$L_1 \text{ est libre} \Longleftrightarrow L_2 \text{ est libre}$$

**Exercice 1.21**
Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on désigne par $f_a$ l'élément de $E$ défini par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_a(x) = |x - a|$$
Montrer que $\{f_a \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ est une partie libre de $E$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on désigne par $f_k$ l'élément de $E$ défini par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_k(x) = (\sin x)^k$$
Montrer que $\{f_k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ est une partie libre de $E$.
3. Pour $a \in \mathbb{R}$, on désigne par $f_a$ l'élément de $E$ défini par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_a(x) = e^{ax}$$
Montrer que $\{f_a \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ est une partie libre de $E$.

**Exercice 1.22**
Soient $K$ un corps commutatif et $P$ un polynôme de $K[X]$ avec $\deg(P) = n$. Montrer que $(P, P', \ldots, P^{(n)})$ est une base de $K_n[X]$.

**Exercice 1.23**
Soient $K$ un corps commutatif et $F$ un sous-espace vectoriel de $K_n[X]$, tel que

$$\forall P \in F \subseteq \{0\}, \forall Q \in F \subseteq \{0\}, \;\; \deg(P) = \deg(Q)$$

Montrer que $\dim(F) = 1$.

**Exercice 1.24**
Soient $K$ un corps commutatif et $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de polynômes de $K[X]$, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \deg(P) = n$$

Montrer que $\{P_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ forme une base de $K[X]$.

**Exercice 1.25**
Dans chacun des cas suivants, déterminer les dimensions des sous-espaces de $\mathbb{R}^4$, $F$, $G$, $F \cap G$ et $F + G$.

**i)**

$$\begin{aligned} F &= Vect(\{(2,2,1,0),(1,4,2,-1),(2,1,-1,0),(2,-5,4,2)\}) \\ G &= Vect(\{(2,1,4,5),(1,2,3,4)\}) \end{aligned}$$

**ii)**

$$\begin{aligned} F &= Vect(\{(1,2,0,1),(2,1,3,1),(1,-4,6,-1)\}) \\ G &= Vect(\{(1,2,1,0),(-1,1,1,1),(2,-1,0,1),(2,2,2,2)\}) \end{aligned}$$

**Exercice 1.26**
Soit $K$ un corps commutatif, $P$ un polynôme non nul de $K[X]$ et $(P)$ l'idéal engendré par $P$. Montrer que $K[X]/(P)$ est un $K$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

**Exercice 1.27**
Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$.

1. Si $H_1$ et $H_2$ sont deux hyperplans distincts de $E$. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.
2. Si $H$ est un hyperplan de $E$ et si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, tel que $F \nsubseteq H$.
   Déterminer la dimension de $F \cap H$.
3. Soient $H_1, H_2, \ldots, H_m$ des hyperplans de $E$. Montrer que

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_m) \geq n - m$$

**Exercice 1.28**
Dans chacun des cas suivant, montrer que $E$ est un espace vectoriel et déterminer une base de $E$.

1. $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \;:\; P(X^2) = X^2P(X)\}$.
2. $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \;:\; P(-1) = P(0)\}$.

3. $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ : \ P(\frac{1}{2}) = 2P(1)\}$.
4. $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y + z + t = 0 \ \text{ et } \ x + 2y - z - t = 0\}$.
5. $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0\}$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $E$ l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, telles que

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \ f \ \text{ est constante sur } \ ]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$$

**Exercice 1.29**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, tels que $\dim(F) = \dim(G)$. Motrer que $F$ et $G$ possèdent un supplémentaire commun dans $E$.

**Exercice 1.30**
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, on définit la partie $F_i$ de $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$P \in F_i \Longleftrightarrow [\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, \ j \neq i \Longrightarrow P(j) = 0]$$

Montrer que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $F_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et que

$$E = F_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$$

**Exercice 1.31**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $F_1, F_2, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{k} \dim(F_j) > n(k-1) \Longrightarrow \bigcap_{j=1}^{k} F_j \neq \{0\}$$

**Exercice 1.32**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $G$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de sous-espaces vectoriels de $E$.

**a)** On suppose $G$ de dimension finie. Montrer que

$$(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n) + G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F_n + G)$$

**b)** Montrer, par un contre exemple, que la propriètè précédente ne subsiste plus dans le cas où $G$ est de dimension infinie.

# 2 Applications linéaires – Matrices

## 2.1 Applications linéaires – Isomorphisme d'epaces vectoriels

### 2.1.1 Définition et propriètés de base

**Définition 2.2.**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur le même corps $K$. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire, (ou parfois $K$-linéaire), si

**i)** $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$,

**ii)** $\forall \alpha \in K,\ \forall x \in E,\quad f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$.

Si une application linéaire $f$ est bijective, on dit que $f$ est un **isomorphisme d'espaces vectoriels**

**Notations**

*On désigne par $L_K(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications $K$-linéaires de $E$ vers $F$*

**Exemples 2.1**

1. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. On appelle* **injection canonique** *de $F$ dans $E$, l'application $j : F \longrightarrow E$ définie par,*

$$\forall x \in F,\quad j(x) = x$$

   *Alors $j$ est une application linéaire.*

2. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. On appelle* **surjection canonique** *de $E$ vers $E/F$, l'application définie par,*

$$\begin{aligned} s : E &\longrightarrow E/F \\ x &\longmapsto s(x) = \overline{x} \end{aligned}$$

   *Alors $s$ est une application linéaire.*

3. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Alors l'application $f$ définie par,*

$$\begin{aligned} f : K^n &\longrightarrow E \\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &\longmapsto f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \end{aligned}$$

   *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*
   *Donc tout $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ est isomorphe à $K^n$.*

**Remarques 2.1**

1. *Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces vectoriels sur le même corps $K$. $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f$ est une application linéaire.*

2. *Soit $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels.*
3. *La relation $\mathcal{R}$ d'isomorphisme entre espaces vectoriels est une relation d'équivalence.*
4. *Deux espaces vectoriels de même dimension sont isomorphes.*

**Proposition 2.3.**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels. Pour $f$ et $g$ deux éléments de $L_K(E,F)$ et pour $\alpha$ élément de $K$, on définie $f+g$ et $\alpha \cdot f$, par

$$\forall x \in E, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

Alors $(L_K(E,F), +, \cdot)$ est un $K$-espace vectoriel.

**Preuve**
*Il suffit de vérifier que $L_K(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $F^E$ le $K$-espace vectoriel de toutes les applications de $E$ vers $F$.*

**Théorème 2.4.**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $L_K(E,F)$ est de dimension finie et on a

$$\boxed{\dim(L_K(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)}$$

**Preuve**
*Soient $m = \dim(E)$, $n = \dim(F)$, $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ une base de $E$ et $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ une base de $F$.*
*Pour $(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$, où $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_p = \{1, 2, \dots, p\}$, on définit l'application $f_{ij} : E \longrightarrow F$ par,*

$$\forall x \in E, \quad f_{ij}(x) = x_j e'_i \quad \text{où } x = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j$$

*Alors, $B = \{f_{ij} \ : \ (i,j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n\}$ forme une base de $L_K(E,F)$. En effet,*

— *Pour $f \in L_K(E,F)$, on pose,*

$$\forall j \in \mathbb{N}_m, \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e'_i$$

*Alors pour tout $x \in E$ avec $x = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j e_j$, on a*

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{m} x_j (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e'_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_j e'_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} f_{ij}(x)$$

*Donc $B$ est une partie génératrice finie de $L_K(E,F)$.*

— *Il est facile de vérifier que $B$ est une partie libre, en rmarquant que*

$$\forall k \in \mathbb{N}_m, \quad f_{ij}(e_k) = \begin{cases} e'_j & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

*$Cardinal(B) = Cardinal(\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n) = m \times n$, donc $\dim(L_K(E,F)) = m \times n$.*

### 2.4.1 Noyau et image d'une application linéaire

**Proposition 2.5.**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors,

**i)** L'image par $f$ d'un sous-espace vectoriel de $E$ est un sous-espace vectoriel de $F$. En particulier, $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de $F$, appelé **image** de $f$ et noté $Im(f)$.

**ii)** L'image réciproque par $f$ d'un sous-espace vectoriel de $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$. En particulier, $f^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace vectoriel de $E$, appelé **noyau** de $f$ et noté $\ker(f)$.

**Preuve**

**i)** *Soit $A$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors,*

- $f(A) \neq \emptyset$, *car* $0_F = f(0_E)$, *donc* $0_F \in f(A)$.
- *Si* $x \in A$, $y \in A$ *et* $\alpha \in K$, *on a*

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \quad et \quad \alpha \cdot f(x) = f(\alpha \cdot x)$$

*avec* $x + y \in A$ *et* $\alpha \cdot x \in A$, *donc* $f(x) + f(y) \in f(A)$ *et* $\alpha \cdot f(x) \in f(A)$.

**ii)** *Soit, maintenant, $A$ un sous-espace vectoriel de $F$. Alors*

- $f^{-1}(B) \neq \emptyset$, *car* $f(0_E) = 0_F$ *et* $0_F \in B$, *donc* $0_E \in f^{-1}(B)$.
- *Si* $x \in f^{-1}(B)$, $y \in f^{-1}(B)$ *et* $\alpha \in K$, *alors* $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *et* $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$, *donc* $x + y \in f^{-1}(B)$ *et* $\alpha \cdot x \in f^{-1}(B)$, *car $B$ est un sous-espace vectoriel de $F$.*

  *Rappelons que*

$$z \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(z) \in B$$

**Remarques 2.2**

*Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors*

*1.*

$$\ker(f) = \{x \in E \ : \ f(x) = 0_F\}$$

$$x \in \ker(f) \Longleftrightarrow f(x) = 0_F$$

*2.*

$$Im(f) = \{f(x) \ : \ x \in E\}$$

$$y \in Im(f) \Longleftrightarrow \exists x \in E \ : \ y = f(x)$$

**Théorème 2.6.**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors

**i)**

$$\boxed{f \text{ est injetive} \Longleftrightarrow \ker(f) = \{0_E\}}$$

**ii)**

$$\boxed{f \text{ est surjetive} \Longleftrightarrow Im(f) = F}$$

**Preuve**

**i)** **($\Longrightarrow$)** *Supposons que $f$ est injective et soit $x \in \ker(f)$. On a $f(x) = 0_F$ et comme $f$ est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$, donc $f(x) = f(0_E)$ et puisque $f$ est injective, alors $x = 0_E$. Ainsi, $\ker(f) = \{0_E\}$.*

**($\Longleftarrow$)** *Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$.*
*Soient $x \in E$ et $y \in E$, tels que $f(x) = f(y)$, a-t-on $x = y$ ?*

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Longrightarrow f(x) - fy) = 0_F \\ &\Longrightarrow f(x-y) = 0_F \quad \textit{car } f \textit{ est linéaire} \\ &\Longrightarrow x - y \in \ker(f) \\ &\Longrightarrow x = y \quad \textit{car } \ker(f) = \{0_E\} \end{aligned}$$

*Donc $f$ est injective.*

**ii)** *Trivial, car une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, si et seulement si, $f(E) = F$.*

**Proposition 2.7.**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une appligation linéaire. Alors

**a)** Pour tout sous-espace vectoriel $G$ de $E$, on a

$$\boxed{f^{-1}(f(G)) = G + \ker(f)}$$

**b)** $f$ est injective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel $G$ de $E$, on a

$$f^{-1}(f(G)) = G$$

**c)** Pour tout sous-espace vectoriel $H$ de $F$, on a

$$\boxed{f(f^{-1}(H)) = H \cap Im(f)}$$

**d)** $f$ est surjective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel $H$ de $F$, on a

$$f(f^{-1}(H)) = H$$

**Preuve**

**a)** *Soit $x \in E$, alors*

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(G)) &\Longleftrightarrow f(x) \in f(G) \\ &\Longleftrightarrow \exists a \in G \ : \ f(x) = f(a) \\ &\Longleftrightarrow \exists a \in G \ : \ f(x-a) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \exists a \in G \ : \ x - a \in \ker(f) \\ &\Longleftrightarrow \exists a \in G, \exists b \in \ker(f) \ : \ x = a + b \\ &\Longleftrightarrow x \in G + \ker(f). \end{aligned}$$

**b)** **($\Longrightarrow$)** *Si on suppose que $f$ est injective, alors $\ker(f) = \{0\}$, donc, d'après a), pour tout sous-espace vectoriel $G$ de $E$, $f^{-1}(f(G)) = G$.*

($\Longleftarrow$) *si on suppose que pour tout sous-espace vectoriel $G$ de $E$, $f^{-1}(f(G)) = G$, alors en particulier, on a $f^{-1}(f(\{0_E\})) = \{0_E\}$.*
*Or $f(\{0_E\} = \{f(0_E)\} = \{0_F\}$, donc $\ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{0_E\}$.*

**c)** *Soit $y \in f(f^{-1}(H))$, alors il existe $x \in f^{-1}(H)$, tel que $y = f(x)$.*
*Comme $x \in f^{-1}(H)$, alors $f(x) \in H$, donc $y \in H \cap Im(f)$.*

$$\begin{aligned} y \in H \cap Im(f) &\Longrightarrow y \in H \quad et \quad y \in Im(f) \\ &\Longrightarrow y \in H \quad et \quad \exists x \in E, \, : \, y = f(x) \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(H) \quad car \; f(x) \in H \\ &\Longrightarrow f(x) \in f(f^{-1}(H)) \\ &\Longrightarrow y \in f(f^{-1}(H)). \end{aligned}$$

**d)** ($\Longrightarrow$) *Supposons que $f$ est surjective, alors $Im(f) = F$, donc pour tout sous-espace $H$ de $E$, on a $f(f^{-1}(H)) = H \cap F = H$.*

($\Longleftarrow$) *Supposons que pour tout sous-espace vectoriel $H$ de $F$, on a $f(f^{-1}(H)) = H$, alors en particulier, on aura $f(f^{-1}(F)) = F$.*
*Or $f^{-1}(F) = E$, donc $f(E) = F$, par suite, $f$ est surjective.*

### 2.7.1 Décomposition canonique - Théorème du rang

**Théorème 2.8** (Décomposition canonique)**.**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels quelconques, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, $j : Im(f) \longrightarrow F$ l'injection canonique et $s : E \longrightarrow E/\ker(f)$ la surjection canonique. Alors il existe un isomorphisme canonique

$$\overline{f} : E/\ker(f) \longrightarrow f(E)$$

tel que $f = j \circ \overline{f} \circ s$,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & F \\ E/\ker(f) \arrow[r, "\overline{f}"] & Im(f) \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

**Preuve**
*Soit $\overline{f} : E/\ker(f) \longrightarrow Im(f)$ la correspondance définie par*

$$\forall x \in E, \;\; \overline{f}(\overline{x}) = f(x)$$

*Alors pour $x \in E$ et $y \in E$, on a*

$$\begin{aligned} \overline{x} = \overline{y} &\Longleftrightarrow \overline{x-y} = \overline{0}_E \\ &\Longleftrightarrow x - y \in \ker(f) \\ &\Longleftrightarrow f(x-y) = 0_F \\ &\Longleftrightarrow f(x) = f(y) \end{aligned}$$

*Ainsi, $\overline{f}$ est bien définie et $\overline{f}$ est injective. Puisque $\overline{f}$ est linéaire et surjective par construction, donc $\overline{f}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et on a*

$$\forall x \in E, \, (j \circ \overline{f} \circ s)(x) = (j \circ \overline{f})(s(x)) = (j \circ \overline{f})(\overline{x}) = j(\overline{f}(\overline{x})) = j(f(x)) = f(x)$$

**Corollaire 2.9** (Théorème du rang)**.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de **dimension finie**, $F$ un $K$-espace vectoriel quelconque et
$f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors

$$\boxed{\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(Im(f))}$$

**Preuve**
*D'après le théorème précédent, on sait que* $E/\ker(f)$ *et* $Im(f)$ *sont isomorphes, donc*

$$\dim(E/\ker(f)) = \dim(Im(f))$$

*Or, on sait que* $\dim(E/\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f))$*, par suite, on aura*

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(Im(f))$$

**Corollaire 2.10.**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels de **dimension finie** avec $\dim(E) = \dim(F)$. Soit
$f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

**i)** $f$ est injective.

**ii)** $f$ est surjective.

**iii)** $f$ est bijective.

**Preuve**
**i)** $\Longrightarrow$ **ii)** *Supposons que* $f$ *est injective.*

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\Longrightarrow \ker(f) = \{0_E\} \\ &\Longrightarrow \dim(\ker(f)) = 0 \\ &\Longrightarrow \dim(E) = \dim(Im(F)) \quad \textit{(d'après le corollaire précédent)} \\ &\Longrightarrow Im(f) = E \end{aligned}$$

**ii)** $\Longrightarrow$ **iii)** *Supposons que* $f$ *est surjective.*

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective} &\Longrightarrow Im(f) = E \\ &\Longrightarrow \dim(Im(f)) = \dim(E) \\ &\Longrightarrow \dim(\ker(f)) = 0 \quad \textit{(d'après le corollaire précédent)} \\ &\Longrightarrow \ker(f) = \{0_E\} \end{aligned}$$

*Donc* $f$ *est injective et par conséquent,* $f$ *est bijective.*

**iii)** $\Longrightarrow$ **i)** *Trivial.*

**Remarques 2.3**
*Les équivalences du corollaire précédent ne sont plus vraies dans le cas de la dimension infinie, comme le montre l'exemple suivant :*

**Exemples 2.2**
*Soient $K$ un corps commutatif et $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ un polynôme de $K[X]$. On définie le polynôme dérivé de $P$, qu'on note $P'$, par*

$$P' = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}$$

*Soit $f : K[X] \longrightarrow K[X]$ l'application qui à $P$ fait correspondre $P'$. Alors $f$ est une application linéaire surjective qui n'est pas injective.*

$$Im(f) = K[X] \quad et \quad \ker(f) = K$$

*Soit $g : K[X] \longrightarrow K[X]$ définie par*

$$\forall P \in K[X],\ P = \sum_{i=1}^{n} a_iX^i \Longrightarrow g(P) = \sum_{i=1}^{n} a_iX^{i+1}$$

*Alors $g$ est une application linéaire injective qui n'est pas surjective.*

$$\ker(g) = \{0\} \quad et \quad Im(g) = \{P \in K[X] \ : \ P(0) = 0\}$$

**Exemples 2.3 (Théorème d'interpolation de Lagrange)**
*Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts et $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres réels quelconques, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq n$, tel que*

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\},\ P(a_i) = \alpha_i$$

*De plus, si on pose*

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad L_i = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (X - a_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)}$$

*Alors on aura*

$$P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_iL_i$$

*En effet, soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ l'application définie par*

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n))$$

*Alors $\varphi$ est une application linéaire et on a*

$$P \in \ker(\varphi) \Longleftrightarrow P(a_0) = P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$$

*Donc $P$ possède $n + 1$ racines deux à deux distinctes, donc $P = 0$, car $\deg(P) \leq n$ et par suite, $P$ possède au plus $n$ racines deux à deux distinctes.*
*Ainsi, $\ker(\varphi) = \{0\}$, donc $\varphi$ est injective. Puisque $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n+1$, alors, d'après le corollaire précédent, $\varphi$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*
*Ainsi, pour $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que $\varphi(P) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, donc pour $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que*

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad P(a_i) = \alpha_i$$

*Soit $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour chaque $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, soit $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$, alors on aura*

$$\begin{cases} \forall j \in \{0, 1, \ldots, n\},\ j \neq i \Longrightarrow L_i(a_j) = 0 \\ L_i(a_i) = 1 \end{cases}$$

*Donc pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, avec $j \neq i$, $a_j$ est une racine de $L_i$, donc le polynôme $\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (X - a_j)$ divise $L_i$ avec $\deg(L_i) \leq n$, donc il existe $\alpha \in K$, tel que $L_i$ s'écrit sous la forme*

$$L_i = \alpha \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (X - a_j)$$

*Puisque $L_i(a_i) = 1$, alors $\alpha = (\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j))^{-1}$.*
*Soit maintenant $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres réels quelconque et soit $P$ l'unique polynôme de degré $\leq n$, tel que $\varphi(P) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, donc on aura*

$$P = \varphi^{-1}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \Longrightarrow \varphi^{-1}((\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi^{-1}(e_i)$$
$$\Longrightarrow P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i$$

## 2.11 Endomorphismes – Automorphismes

**Définition 2.12.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel.

**i)** Une application linéaire $u : E \longrightarrow E$ s'appelle un **endomorphisme** de $E$.

**ii)** Un endomorphime bijective s'appelle un **automorphisme** de $E$.

**Notations**
*On désigne par $L_K(E)$ l'ensemble de tous les endomorphismes de $E$ et par $GL_K(E)$ l'ensemble de tous les automorphismes de $E$.*

**Définition 2.13.**

Soient $(\mathcal{A}, +, \times)$ un anneau quelconque et $K$ un corps commutatif. On dit que $\mathcal{A}$ est une $K$-algèbre (ou une algèbre sur $K$), s'il existe une loi externe,

$$\begin{aligned} K \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

telle que,

**i)** $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un $K$-espace vectoriel.

**ii)** $\forall \lambda \in K,\ \forall x \in \mathcal{A},\ \forall y \in \mathcal{A},\ \ \lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$

**Exemples 2.4**
*Pour tout corps commutatif $K$, $(K[X], +, \times, \cdot)$ est une $K$-algèbre.*

**Proposition 2.14.**

Soit $E$ un $K$-eapace vectoriel. Alors

**i)** $(L_K(E), +, \circ, \cdot)$ est une $K$-algèbre, applée **algèbre des endomorphismes** de $E$.

**ii)** $(GL_K(E), \circ)$ est un groupe, appelé **groupe linéaire** de $E$.

**Preuve**
*Exercice.*

**Remarques 2.4**
*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$. Alors d'après le théorème du rang, on sait que*

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(Im(u))$$

*Mais attention, par contre on a pas toujours*

$$E = \ker(u) \oplus Im(u)$$

*Cependant, on a le théorème suivant,*

**Théorème 2.15.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de **dimension finie** et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

**i)** $E = \ker(u) \oplus Im(u)$.

**ii)** $Im(u) = Im(u^2)$.

**iii)** $\ker(u) = \ker(u^2)$.

**iv)** $\ker(u) \cap Im(u) = \{0\}$.

**Preuve**

**i) $\Longrightarrow$ ii)** *Supposons que $E = \ker(u) \oplus Im(u)$ et montrons que $Im(u) = Im(u^2)$. Pour cela, remarquons d'abord que $\forall u \in L_K(E)$, $Im(u^2) \subseteq Im(u)$. Donc, il suffit de montrer que $Im(u) \subseteq Im(u^2)$.*
*Soit $y \in Im(u)$, alors il existe $x \in E$, tel que $y = u(x)$.*
*Puisque $E = \ker(u) \oplus Im(u)$, alors $x = x_1 + u(x_2)$, avec $x_1 \in \ker(u)$, donc $y = u^2(x)$, par suite, $y \in Im(u^2)$.*

**ii) $\Longrightarrow$ iii)** *Supposons que $Im(u) = Im(u^2)$ et montrons que $\ker(u) = \ker(u^2)$. Pour cela, remarquons aussi que $\forall u \in L_K(E)$, $\ker(u) \subseteq \ker(u^2)$. Donc, il suffit de montrer que $\ker(u^2) \subseteq \ker(u)$.*
*D'après le théorème du rang, on a*

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(Im(u)) = \dim(\ker(u^2)) + \dim(Im(u^2))$$

*Puisque $Im(u) = Im(u^2)$ alors $\dim(\ker(u)) = \dim(\ker(u^2))$, par suite, on aura $\ker(u) = \ker(u^2)$.*

**iii) $\Longrightarrow$ iv)** *Supposons que* $\ker(u) = \ker(u^2)$ *et montrons que* $\ker(u) \cap Im(u) = \{0\}$.

$$\begin{aligned} y \in \ker(u) \cap Im(u) &\Longleftrightarrow u(y) = 0 \quad et \quad \exists x \in E \ : \ y = u(x) \\ &\Longrightarrow u^2(x) = u(y) = 0 \\ &\Longrightarrow x \in \ker(u^2) \\ &\Longrightarrow x \in \ker(u) \\ &\Longrightarrow u(x) = 0 \\ &\Longrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

**iv) $\Longrightarrow$ i)** *Trivial, car on sait que*

$$E = \ker(u) \oplus Im(u) \Longleftrightarrow \begin{cases} \dim(\ker(u)) + \dim(Im(u)) = \dim(E) \\ et \\ \ker(u) \cap Im(u) = \{0\} \end{cases}$$

**Théorème 2.16** (Noyaux et images itérés)**.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de **dimension finie** et $u$ un endomorphisme de $E$. Alors il existe un entier $p \geq 1$, tel que

**i)**

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq p \Longrightarrow \ker(u^k) = \ker(u^p) \\ \text{et} \\ \ker(u^{p-1}) \subsetneq \ker(u^p) \end{cases}$$

**ii)**

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq p \Longrightarrow Im(u^k) = Im(u^p) \\ \text{et} \\ Im(u^p) \subsetneq Im(u^{p-1}) \end{cases}$$

**iii)**

$$\boxed{E = \ker(u^p) \oplus Im(u^p)}$$

**Preuve**

**i)** *Soit* $\mathcal{A} = \{\dim(\ker(u^k)) \ : \ k \in \mathbb{N}^*\}$. *Puisque* $\forall k \in \mathbb{N}, \ \dim(\ker(u^k)) \leq \dim(E)$, *alors* $\mathcal{A}$ *est une partie de* $\mathbb{N}$, *non vide et majorée, donc* $\mathcal{A}$ *possède un plus grand élément, noté d. D'autre part, soit* $\Lambda = \{k \in \mathbb{N}^* \ : \ \dim(\ker(u^k)) = d\}$, *alors* $\Lambda$ *est une partie de* $\mathbb{N}$ *non vide, donc* $\Lambda$ *possède un plus petit élément noté p.*

— *Pour* $k \geq p$, *on sait que* $\ker(u^p) \subseteq \ker(u^k)$ *et d'après ce qui précède, on sait que* $\dim(\ker(u^k)) \leq \dim(\ker(u^p))$, *donc* $\ker(u^k) = \ker(u^p)$.

— *p est le plus petit élément de* $\Lambda$, *donc* $p - 1 \notin \Lambda$, *par conséquent, on aura* $\dim(\ker(u^{p-1})) < \dim(\ker(u^p))$, *donc* $\ker(u^{p-1}) \subsetneq \ker(u^p)$.

**ii)** *Posons* $\Delta = \{\dim(Im(u^k)) \ : \ k \in \mathbb{N}^*\}$, *alors* $\Delta$ *est une partie non vide de* $\mathbb{N}$, *par suite,* $\Delta$ *possède un plus petit élément noté* $r$.
*Soit* $\beta = \{k \in \mathbb{N}^* \ : \ \dim(Im(u^k)) = r\}$, *alors* $\beta$ *est une partie non vide de* $\mathbb{N}$, *donc* $\beta$ *possède un plus petit élément noté* $q$.

— *Pour* $k \geq q$, *on sait que* $Im(u^k) \subseteq Im(u^q)$ *et d'après ce qui précède, on sait que* $\dim(Im(u^q)) \leq \dim(Im(u^k))$, *donc* $Im(u^k) = Im(u^q)$.

— *$q$ est le plus petit élément de $\beta$, donc $q-1 \notin \beta$, par suite, on aura* $\dim(Im(u^{q-1})) > \dim(Im(u^q))$, *donc* $Im(u^q) \subsetneq Im(u^{q-1})$.

— *Vérifions maintenant que $q = p$. Pour cela, supposons, par absurde, que $q > p$, donc d'après ce qui précède, on a*

$$\ker(u^q) = \ker(u^p) \quad et \quad Im(u^q) \subsetneq Im(u^p)$$

*Or d'après le théorème du rang, on a*

$$\dim(E) = \dim(\ker(u^p)) + \dim(Im(u^p)) = \dim(\ker(u^q)) + \dim(Im(u^q))$$

*Donc* $\dim(Im(u^q)) = \dim(Im(u^p))$, *ce qui est absurde, car* $Im(u^q) \subsetneq Im(u^p)$, *donc* $q \leq p$.
*De la même manière, on montre que* $p \leq q$.

**iii)** *On sait que*

$$E = \ker(u^p) \oplus Im(u^p) \Longleftrightarrow \begin{cases} \dim(\ker(u^p)) + \dim(Im(u^p)) = \dim(E) \\ et \\ \ker(u^p) \cap Im(u^p) = \{0\} \end{cases}$$

*Puisque, on a toujours* $\dim(\ker(u^p)) + \dim(Im(u^p)) = \dim(E)$, *alors il suffit de montrer que* $\ker(u^p) \cap Im(u^p) = \{0\}$.

$$\begin{aligned} y \in \ker(u^p) \cap Im(u^p) &\Longleftrightarrow u^p(y) = 0 \quad et \quad \exists x \in E \ : \ y = u^p(x) \\ &\Longrightarrow u^{2p}(x) = 0 \\ &\Longrightarrow x \in \ker(u^{2p}) \\ &\Longrightarrow x \in \ker(u^p) \quad (car\ 2p \geq p) \\ &\Longrightarrow u^p(x) = 0 \\ &\Longrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

**Remarques 2.5**
*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ un endomorphisme de $E$, $N$ et $I$ les parties de $E$ définies par*

$$N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker(u^k) \quad et \quad I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} Im(u^k)$$

*Alors, d'après le théorème précédent, $N$ et $I$ sont deux sous-espaces supplémentaires :*

$$E = N \oplus I$$

## 2.17 Exemples d'endomorphismes remarquables

### 2.17.1 Projection sur un sous-espace vectoriel - Projecteurs

**Définition 2.18.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $G$ un supplémentaire de $F$ dans $E$.

**i)** On appelle **projection** sur $F$ parallèlement à $G$, (ou de direction $G$), l'application $p_F$ définie par

$$\begin{aligned} p_F : E = F \oplus G &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto p_F(x) = x_1 \end{aligned}$$

**ii)** On appelle **projecteur** de $E$, tout endomrphisme $u$ de $E$, vérifiant $u \circ u = u$.

**Remarques 2.6**
*Soit $p_F$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$, alors*

**i)** *$p_F$ est un endomorphisme de $E$.*

**ii)** *$Im(p_F) = F$ et $\ker(p_F) = G$.*

**iii)** *$p_F \circ p_F = p_F$, donc $p_F$ est un projecteur de $E$.*

*Réciproquement, on a le théorème suivant,*

**Théorème 2.19.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $u$ un projecteur de $E$, alors on a

**i)** $E = Im(u) \oplus \ker(u)$.

**ii)** $\forall x \in E, \quad x \in Im(u) \Longleftrightarrow u(x) = x$

**iii)** Si on pose $F = Im(u)$ et $G = \ker(u)$, alors $u$ est la projection sur $F$ parallèlement à $G$.

**Preuve**

**i)** *La dimension de $E$ est quelconque, donc*

$$E = Im(u) \oplus \ker(u) \Longleftrightarrow \begin{cases} Im(u) + \ker(u) = E \\ et \\ Im(u) \cap \ker(u) = \{0\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y \in Im(u) \cap \ker(u) &\Longleftrightarrow \exists x \in E \ : \ y = u(x) \quad et \quad u(y) = 0 \\ &\Longrightarrow u^2(x) = 0 \\ &\Longrightarrow u(x) = 0 \quad (car\ u^2 = u) \\ &\Longrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

*Pour $x \in E$, on a $x = (x - u(x)) + u(x)$ avec $u(x) \in Im(u)$ et $x - u(x) \in \ker(u)$, (car $u(x - u(x)) = u(x) - u^2(x) = 0$), donc $E = Im(u) + \ker(u)$.*

**ii)**

$$\begin{aligned} x \in Im(u) &\Longrightarrow x - u(x) \in Im(u) \\ &\Longrightarrow x - u(x) \in Im(u) \cap \ker(u) \quad (car\ u(x - u(x)) = u(x) - u^2(x) = 0) \\ &\Longrightarrow u(x) = x \quad (car\ Im(u) \cap \ker(u) = \{0\}) \end{aligned}$$

*Réciproquement, si $u(x) = x$, alors $x \in Im(u)$.*

**iii)** *On a $E = Im(u) \oplus \ker(u)$, donc, pour $x \in E$ avec $x = x_1 + x_2$, on a $u(x) = u(x_1) + u(x_2) = x_1$, (car $x_1 \in Im(u)$, donc $u(x_1) = x_1$ et $x_2 \in \ker(u)$). Donc $u$ est la projection sur $Im(u)$ parallèlement à $\ker(u)$.*

### 2.19.1 Symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel - Symétries vectorielles

**Définition 2.20.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $G$ un supplémentaire de $F$ dans $E$.

**i)** On appelle symétrie par rapport à $F$ parallélement à $G$, (ou de direction $G$), l'application $s_F$ définie par,

$$\begin{aligned} s_F : E = F \oplus G &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto s_F(x) = x_1 - x_2 \end{aligned}$$

**ii)** On appelle symétrie vectorielle, tout endomorphisme $u$ de $E$, vérifiant $u \circ u = Id_E$.

**Remarques 2.7**

1. *Soit $s_F$ la symétrie par rapport à $F$ parallélement à $G$, alors*
   **i)** *$s_F$ est un endomorphisme.*
   **ii)** $\ker(u - Id_E) = F$ *et* $\ker(u + Id_E) = G$.
   **iii)** *$s_F^2 = Id_E$, donc $s_F$ est une symétrie vectorielle.*
   *Réciproquement, on a le théorème suivant :*
2. *Soit $p_F$ la projection sur $F$ parallélement à $G$, alors $s_F = 2p_F - Id_E$.*

**Théorème 2.21.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $u$ une symétrie vectorielle de $E$. Alors,

**i)** $E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E)$.

**ii)** Si on pose $F = \ker(u - Id_E)$ et $G = \ker(u + Id_E)$, alors $u$ est la symétrie vectorielle par rapport à $F$ parallélement à $G$.

**Preuve**

**i)**

$$\begin{aligned} x \in \ker(u - Id_E) \cap \ker(u + Id_E) &\Longrightarrow u(x) = x \quad et \quad u(x) = -x \\ &\Longrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

*Donc* $\ker(u - Id_E) \cap \ker(u + Id_E) = \{0\}$.
*Pour* $x \in E$, *on pose* $x_1 = \dfrac{x + u(x)}{2}$ *et* $x_2 = \dfrac{x - u(x)}{2}$, *alors* $x_1 \in \ker(u - Id_E)$, $x_2 \in \ker(u + Id_E)$ *et* $x = x_1 + x_2$. *Donc* $E = \ker(u - Id_E) + \ker(u + Id_E)$.

**ii)** *Pour* $x \in E$, *avec* $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \ker(u - Id_E)$ *et* $x_2 \in \ker(u + Id_E)$, *on a*

$$u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = x_1 - x_2$$

*Donc* $u$ *est la symétrie par rapport à* $\ker(u - Id_E)$ *parallélement à* $\ker(u + Id_E)$.

### 2.21.1 Affinités - Dilatations - Transvections

**Définition 2.22.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, $G$ un supplémentaire de $F$ dans $E$ et $\lambda \in K$. On appelle **affinité** de base $F$, de direction $G$ et de rapport $\lambda$, l'application $u$ définie par,

$$\begin{aligned} u : E = F \oplus G &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto u(x) = x_1 + \lambda x_2 \end{aligned}$$

**Remarques 2.8**
*Soit* $u$ *une affinité de base* $F$, *de direction* $G$ *et de rapport* $\lambda$. *Alors,*

1. $u$ *est un endomorphisme de* $E$.
2. *Si* $\lambda = 1$, *alors* $u = Id_E$.
3. *Si* $\lambda = 0$, *alors* $u$ *est la projection sur* $F$ *de direction* $G$.
4. *Si* $\lambda = -1$, *alors* $u$ *est la symétrie par rapport à* $F$ *de direction* $G$.
5. *Si* $\lambda \neq 0$, *alors* $u \in GL(E)$.
6. *Si* $\lambda \neq 0$ *et* $\dim(G) = 1$,
   *on dit que* $u$ *est une* ***dilatation*** *de base* $F$, *de direction* $G$ *et de rapport* $\lambda$.

**Définition 2.23.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque. On appelle **hyperplan** de $E$, tout sous-espace vectoriel $H$, tel que

$$\dim(E/H) = 1$$

**Remarques 2.9**
*Soit* $E$ *un* $K$*-espace vectoriel quelconque.*

1. *Un hyperplan de* $E$ *est un sous-espace vectoriel maximal de* $E$, *c'est à dire, si* $H$ *est un hyperplan de* $E$ *et si* $F$ *est un sous-espace vectoriel de* $E$, *tel que* $F \neq E$ *et* $H \subseteq F$, *alors* $H = F$.
2. *Soit* $H$ *un sous-espace vectoriel de* $E$. *Alors* $H$ *est un hyperplan de* $E$, *si et seulement si, tout supplémentaire de* $H$ *dans* $E$ *est de dimension* 1.

3. *Si $E$ est de dimension finie $= n$ et si $H_1$ et $H_2$ deux **hyperplans distints** de $E$, alors*
$$\boxed{\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2}$$
*En effet, puisque $H_1 \neq H_2$ alors $H_1 + H_2 = E$, donc $\dim(H_1 + H_2) = n$, par suite on a*
$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) = (n-1) + (n-1) - n = n-2$$

**Proposition 2.24.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque et $u$ un endomorphisme de $E$, avec $u \neq Id_E$. Alors $u$ est une dilatation de $E$, si et seulement si,

**i)** $\ker(u - Id_E)$ est un hyperplan de $E$.

**ii)** $E = \ker(u - Id_E) \oplus Im(u - Id_E)$.

**Preuve**

($\Longrightarrow$) *Supposons que $u$ est une dilatation de base $F$, de direction $G$ et de rapport $\lambda$. Alors $E = F \oplus G$, $\dim(G) = 1$ et on a*
$$\forall x \in E, \;\; x = x_1 + x_2 \Longrightarrow u(x) = x_1 + \lambda x_2$$
*Puisque $u \neq Id_E$, alors $\ker(u - Id_E) = F$ et $Im(u - Id_E) = G$.*

($\Longleftarrow$) *Supposons que $\ker(u - Id_E)$ est un hyperplan et que*
$$E = \ker(u - Id_E) \oplus Im(u - Id_E)$$
*donc $\dim(Im(u - Id_E)) = 1$. Soit $y_0 \in Im(u - Id_E)$ avec $y_0 \neq 0$, donc il existe $\lambda \in K$, tel que $u(y_0) = \lambda y_0$. Soit $x \in E$, avec $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in \ker(u - Id_E)$ et $x_2 \in Im(u - Id_E)$, donc $x_2 = \alpha y_0$, par suite, on a*
$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1) + u(x_2) = x_1 + u(\alpha y_0) = x_1 + \alpha u(y_0) \\ &= x_1 + \alpha(\lambda y_0) = x_1 + \lambda(\alpha y_0) = x_1 + \lambda x_2 \end{aligned}$$
*On voit donc que $u$ est la dilatation de base $\ker(u - Id_E)$, de direction $Im(u - Id_E)$ et de rapport $\lambda$.*

**Définition 2.25.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque et $u$ un endomorphisme de $E$. On dit que $u$ est une **transvection** de $E$, s'il existe un hyperplan $H$ de $E$, tel que,

**i)** $\forall x \in H, \; u(x) = x$.

**ii)** $\forall x \in E, \; u(x) - x \in H$.

**Remarques 2.10**

*Soit $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque. Alors toute transvection de $E$ est inversible. En effet, si $u$ est une transvection de $E$, alors par définition, pour tout $x \in E$, on a $u(u(x) - x) = u(x) - x$, donc pour tout $x \in E$, on a $u^2(x) - 2u(x) + x = 0$. On en déduit, donc, que $u^2 - 2u + Id_E = 0$, donc on a*
$$u(2Id_E - u) = (2Id_E - u)u = Id_E$$
*Ainsi, $u$ est inversible et on a $u^{-1} = 2Id_E - u$.*

**Proposition 2.26.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque et $u$ un endomorphisme de $E$ avec $u \neq Id_E$. Alors $u$ est une transvection de $E$, si et seulement si,

**i)** $\ker(u - Id_E)$ est un hyperplan de $E$.

**ii)** $(u - Id_E)^2 = 0$.

**Preuve**

($\Longrightarrow$) *Par définition, il existe un hyperplan $H$, tel que $H \subseteq \ker(u - Id_E)$, puisque $\ker(u - Id_E) \neq E$, alors $\ker(u - Id_E) = H$, donc $\ker(u - Id_E)$ est un hyperplan de $E$ et puisque pour tout $x \in E$, on a $u(x) - x \in H$, alors $(u - Id_E)^2 = 0$.*

($\Longleftarrow$) *Si on pose $H = \ker(u - Id_E)$, alors on aurra*

- *Pour tout $x \in H$, $u(x) = x$.*
- *Pour tout $x \in H$, on a $u(x) - x \in H$, car $(u - Id_E)^2(x) = 0$, donc $(u - Id_E)(u(x) - x) = 0$.*

**Proposition 2.27.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque et $u$ une transvection de $E$. Alors $u^{-1}$ est aussi une transvection de $E$.

**Preuve**

*Nous avons déjà vu que si $u$ est une transvection, alors $u$ est inversible et on a $u^{-1} = 2Id_E - u$. Donc $u^{-1} - Id_E = Id_E - u$, ainsi, on a*

$$\ker(u^{-1} - Id_E) = \ker(u - Id_E) \quad et \quad (u^{-1} - Id_E)^2 = (u - Id_E)^2$$

*Donc, d'après la proposition précédente, $u^{-1}$ est une transvection.*

## 2.28 Matrices

### 2.28.1 Opérations sur les matrices

**Définition 2.29.**

Soit $K$ un corps commutatif. Une matrice à coefficients dans $K$ est une **suite double finie**

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

d'éléments de $K$.

**Remarques 2.11**

*Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est représentée par un tableau de la manière suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

— *Ce tableau est constitué de $m$ lignes et $n$ colonnes. On dit, alors, que $A$ est une matrice à $m$ lignes et $n$ colonnes ou que $A$ est une $(m, n)$-matrice.*
— *Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et pour chaque $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i$ indique la $i^{ieme}$ ligne et $j$ indique la $j^{ieme}$ colonne de la matrice $A$.*
— *Si $m = n$, on dit que $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$.*

**Exemples 2.5**
*Pour tout corps commutatif $K$, les éléments de $K^n$ peuvent être considérés comme des $(n, 1)$-matrices ou comme des $(1, n)$-matrices. Ainsi, tout $X \in K^n$ s'écrit, selon les situations, sous l'une des formes suivantes :*

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{ou} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

**Notations**
*On désigne par $M_{m,n}(K)$ l'ensemble de toutes les $(m, n)$-matrices à coefficients dans $K$ et par $M_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $K$.*
*On munit $M_{m,n}(K)$ et $M_n(K)$ des opérations suivantes :*

**i)** ***Addition*** *: Pour $A \in M_{m,n}(K)$ et $B \in M_{m,n}(K)$, avec $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$, on définit $A + B$ par,*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$$

**ii)** ***Multiplication externe*** *: Pour $A \in M_{m,n}(K)$ et $\lambda \in K$, avec $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$, on définit $\lambda \cdot A$ par,*

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$$

**iii)** ***Produit matriciel*** *: Pour $A \in M_{m,n}(K)$ et $B \in M_{n,p}(K)$, avec $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$, on définit le produit $A \times B$, qu'on note $AB$, par $AB = (c_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq p}$,*

$$\text{où} \;\; \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \ldots, p\}, \;\; c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

**Remarques 2.12**

1. *Le produit $AB$ de deux matrices $A$ et $B$ est bien défini, lorsque le nombre de colonnes de $A$ est égal au nombre de lignes de $B$.*

$$A \in M_{m,n}(K) \;\; \text{et} \;\; B \in M_{n,p}(K) \Longrightarrow AB \in M_{m,p}(K)$$

2. *La multiplication est une loi interne sur $M_n(K)$.*

**Proposition 2.30.**

Soit $K$ un corps commutatif quelconque, $n$ et $m$ deux entiers quelconques. Alors,

**i)** $(M_{m,n}(K), +, \cdot)$ est un $K$-espace vectoriel.

**ii)** $(M_n(K), +, \times, \cdot)$ est une $K$-algèbre.

**Preuve**

**i)** *Il est facile de vérifier que $(M_{m,n}(K),+,\cdot)$ est un $K$-espace vectoriel et que l'élément neutre de l'addition est la matrice nulle dont tous les coefficients sont nuls.*

**ii)** *Il suffit de vérifier que la multiplication est associative. Pour cela, soient $A$, $B$ et $C$ trois éléments de $M_n(K)$, on pose $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, $B=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $C=(c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. On pose*

$$AB=(p_{ij})_{1\leq i,j\leq n},\quad BA=(q_{ij})_{1\leq i,j\leq n},\quad A(BC)=(\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\ \text{ et }\ (AB)C=(\beta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$$

*Alors on a :*

$$\alpha_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}q_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{n}b_{kl}c_{lj}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj}$$

$$\beta_{ij}=\sum_{l=1}^{n}p_{il}c_{lj}=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj}$$

*On constate, donc, que $\forall(i,j)\in\{1,2,\ldots,n\}^2$, $\alpha_{ij}=\beta_{ij}$, donc la multiplication est associative.*

*L'élément neutre de la multiplication est la matrice identité $I$ définie par,*

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&\ldots&0\\0&1&0&\ldots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&1&0\\0&0&\ldots&0&1\end{pmatrix}$$

**Remarques 2.13**

*On dit que $P\in M_n(K)$ est inversible, s'il existe $Q\in M_n(K)$, tel que $PQ=QP=I$. On note $GL_n(K)$ l'ensemble de toutes les matrices inversibles de $M_n(K)$, alors $GL_n(K)$ muni de la multiplication des matrices est un groupe.*

### 2.30.1 Matrices élémentaires

Soit $K$ un corps commutatif. Pour $i\in\{1,2,\ldots,m\}$ et pour $j\in\{1,2,\ldots,n\}$, on désigne par $E_{ij}$ la matrice de $M_{m,n}(K)$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la $i^{\text{ieme}}$ ligne et la $j^{\text{ieme}}$ colonne qui est égal à 1.

**Définition 2.31.**

Les matrices $E_{ij}$ sont appelées les matrices élémentaires de $M_{m,n}(K)$.

**Remarques 2.14**

*Soit $M_n(K)$ l'algèbre des matrices carrées à coefficients dans un corps commutatif $K$. Alors, il est facile de vérifier que*

$$\forall(i,j,k,l)\in\{1,2,\ldots,n\}^4,\quad E_{ij}E_{kl}=\begin{cases}0 & si\ \ j\neq k\\ E_{il} & si\ \ j=k\end{cases}$$

*Donc, en particulier, on a*

$$\forall(i,j)\in\{1,2,\ldots,n\}^2,\quad E_{ij}^2=\begin{cases}0 & si\ \ i\neq j\\ E_{ii} & si\ \ i=j\end{cases}$$

**Proposition 2.32.**

Soit $K$ un corps commutatif. Alors $\{E_{ij} \ : \ (i,j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n\}$ forme une base de $M_{m,n}(K)$, appelée base canonique de $M_{m,n}(K)$.
(où $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \ \mathbb{N}_p = \{1, 2, \ldots, p\}$).

**Preuve**

— *Pour $A \in M_{m,n}(K)$ avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$, on a*

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$$

*Donc $\{E_{ij} \ : \ (i,j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n\}$ est une partie génératrice de $M_{m,n}(K)$.*

— *On a*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$$

*donc, si*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} = 0$$

*alors $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n, \ a_{ij} = 0$.*
*Ainsi $\{E_{ij} \ : \ (i,j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n\}$ est une partie libre de $M_{m,n}(K)$.*

### 2.32.1 Trace d'une matrice carrée

**Définition 2.33.**

Soit $K$ un corps commutatif. Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, une matrice carrée à coefficients dans $K$, on définit la **trace** de $A$, qu'on note $tr(A)$, par

$$\boxed{tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

**Proposition 2.34.**

Soit $K$ un corps commutatif. Alors

**i)** $\forall A \in M_n(K), \forall B \in M_n(K), \ \ tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

**ii)** $\forall \lambda \in K, \forall A \in M_n(K), \ \ tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$.

**iii)** $\forall A \in M_n(K), \forall B \in M_n(K), \ \ tr(AB) = tr(BA)$.

**Preuve**

**i)** *On sait que $A + B = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, où $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Donc on a*

$$tr(A + B) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = tr(A) + tr(B)$$

**ii)** *On sait aussi que* $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, *donc on aura,*

$$tr(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda tr(A)$$

**iii)** *On pose* $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ $AB = (c_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ *et* $BA = (d_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. *Alors on sait que,*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad et \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

*Donc on aura,*

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} d_{kk} \\ &= tr(BA) \end{aligned}$$

**Définition 2.35.**

Deux matrices $A$ et $B$ de $M_n(K)$ sont dites **semblables**, s'il existe une matrice **inversible** $P$ de $M_n(K)$, telle que $B = P^{-1}AP$.

**Remarques 2.15**
*La relation* $\mathcal{R}$ *définie sur* $M_n(K)$, *par*

$$A \,\mathcal{R}\, B \iff A \text{ et } B \text{ sont semblables}$$

*est une relation d'équivalence.*
*La classe d'équivalence d'une matrice* $A$, *s'appelle la classe de similitude de* $A$.

***Corollaire 2.36.***

*Deux matrices semblables de* $M_n(K)$ *ont même trace.*

**Preuve**
*Soient* $A$ *et* $B$ *deux matrices semblables de* $M_n(K)$. *Alors, il existe une matrice inversible* $P$, *telle que* $B = P^{-1}AP$. *Donc on aura,*

$$tr(B) = tr(P^{-1}AP) = tr(P^{-1}(AP)) = tr((AP)P^{-1}) = tr(A(PP^{-1})) = tr(A)$$

## 2.37 Matrices et applications linéaires

### 2.37.1 Matrice d'une application linéaire

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels de dimension finie, $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $\beta' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ une base de $F$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, il existe un unique $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \in K^m$, tel que

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i$$

On obtient, donc une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, où pour chaque $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la $j^{\text{ieme}}$ colonne de $A$ est formée par les composantes de $f(e_j)$ dans la base $\beta'$,

$$A = \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \ldots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

**Définition 2.38.**

La matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ s'appelle la matrice de $f$ par rapport aux bases $\beta$ et $\beta'$. On écrit $A = Mat(f, \beta, \beta')$.

**Remarques 2.16**

1. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $u$ un endomorphisme de $E$. Dans ce cas, on parle seulement de la matrice de $u$ par rapport à la base $\beta$ et on a*

$$Mat(u, \beta) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \ldots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

2. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $= n$, $F$ un $K$-espace vectoriel de dimension $= m$, $\beta$ une base de $E$ et $\beta'$ une base de $F$. Alors l'application,*

$$\begin{aligned} L(E, F) &\longrightarrow M_{m,n}(K) \\ f &\longmapsto Mat(f, \beta, \beta') \end{aligned}$$

*est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

3. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $= n$ et $\beta$ une base de $E$. Alors l'application,*

$$\begin{aligned} L(E) &\longrightarrow M_n(K) \\ u &\longmapsto Mat(u, \beta) \end{aligned}$$

*est un isomorphisme d'algèbres.*
*En effet, on vérifie facilement que,*

**i)** $\forall u \in L(E), \forall v \in L(E), \quad Mat(u+v, \beta) = Mat(u, \beta) + Mat(v, \beta)$.

**ii)** $\forall \lambda \in K, \forall u \in L(E), \quad Mat(\lambda u, \beta) = \lambda Mat(u, \beta)$.

**iii)** $\forall u \in L(E), \forall v \in L(E), \quad Mat(u \circ v, \beta) = Mat(u, \beta) \times Mat(v, \beta)$.

**Proposition 2.39.**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels de dimension finie, $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $\beta' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_m)$ une base de $F$. Soient $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ la matrice de $f$ par rapport aux bases $\beta$ et $\beta'$.
Soit $x \in E$ avec $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ et soit $y = f(x)$ avec $y = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i e'_i$, alors

$$\boxed{\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}$$

**Preuve**
*Supposons que* $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ *et* $y = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i e'_i$. *Comme* $y = f(x)$, *alors on a*

$$\begin{aligned}
y = f(x) \Longleftrightarrow y &= f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) \\
\Longleftrightarrow y &= \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) \\
\Longleftrightarrow y &= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i\right) \\
\Longleftrightarrow y &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j e'_i \\
\Longleftrightarrow y &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) e'_i
\end{aligned}$$

*On en déduit donc que pour tout* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *on a* $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$

**Remarques 2.17**

1. *Si on pose,*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad et \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

*alors on aura,*

$$\boxed{y = f(x) \Longleftrightarrow Y = AX}$$

*où* $AX$ *est le produit des matrices* $A$ *et* $X$ *qui est bien défini, car le nombre de colonnes de* $A$ *est égal au nombre de lignes de* $X$.

2. *Soit $K$ un corps commutatif et soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ une matrice à coefficients dans $K$. Alors $A$ peut-être considérée comme une application linéaire de $K^n$ vers $K^m$,*

$$\begin{aligned} M : K^n &\longrightarrow K^m \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

*Dans ce cas, les éléments de $K^n$ et $K^m$ sont considérés comme des matrices colonnes.*

### 2.39.1 Matrice de passage – Changement de base

#### Matrice de passage

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et soient $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\beta' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ deux bases de $E$, alors on a,

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$$

Donc, on obtient une matrice carrée $P = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, où pour chaque $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la $j^{\text{ieme}}$ colonne est formée par les composantes de $e'_j$ dans la base $\beta$.

$$P = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \ldots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

**Définition 2.40.**

$P = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ s'appelle la matrice de passage de la base $\beta$ à la base $\beta'$.

**Remarques 2.18**

1. *Par définition, on voit que la matrice de passage $P$ de la base $\beta$ à la base $\beta'$ est la matrice de l'endomorphisme $p$ défini par*

$$\forall j \in \{1, 2 \ldots, n\}, \quad p(e_j) = e'_j$$

*$p$ transforme une base de $E$ en une base de $E$, donc $p$ est un automorphisme de $E$ et par suite, la matrice $P$ est inversible.*

2. *Soient $P$ la matrice de passage de la base $\beta$ à la base $\beta'$ et $Q$ la matrice de passage de la base $\beta'$ à la base $\beta$. Alors $QP = PQ = I$.*

3. *Soit $E$ un $K$ espace vectoriel de dimension $= n$, muni de deux bases $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\beta' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$.*
*Soit $x \in E$, alors $x$ se décompose de deux manières différentes :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad et \quad x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$$

*Soient $P = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de passage de la base $\beta$ à la base $\beta'$, $X$ et $X'$ les matrices colonnes définies par,*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ 'x_n \end{pmatrix}$$

*Cherchons une relation entre $P$, $X$ et $X'$. Pour cela on a*

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} x'_j \left( \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) e_i \end{aligned}$$

*Donc, d'après l'unicité de la décomposition, on a*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j$$

*Ainsi, on obtient la relation suivante,*

$$\boxed{X = PX'}$$

**Formule de changement de base**

**Théorème 2.41.**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soient $\beta$ et $\gamma$ deux bases de $E$, $\beta'$ et $\gamma'$ deux bases de $F$, $P$ la matrice de passage de $\beta$ à $\gamma$ et $Q$ la matrice de passage de $\beta'$ à $\gamma'$. Soient $A = Mat(f, \beta, \beta')$ et $B = Mat(f, \gamma, \gamma')$, alors

$$\boxed{B = Q^{-1}AP}$$

**Preuve**
*On pose $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $\beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ et $\gamma' = (v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$.*
*$\beta$ et $\gamma$ sont deux bases de $E$, donc tout $x \in E$, s'écrit sous la forme,*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad et \quad x = \sum_{i=1}^{n} x'_i v_i$$

*$\beta'$ et $\gamma'$ sont deux bases de $F$, donc pour tout $x \in E$, $f(x)$ s'écrit sous la forme,*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i e'_i \quad et \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} y'_i v'_i$$

*Donc, si on pose*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad et \quad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

*alors, d'après ce qui précède, on sait que*

$$X = PX', \;\; Y = QY', \;\; Y = AX \;\; et \;\; Y' = BX'$$

*Donc, en remplaçant $X$ et $Y$ dans $Y = AX$, on obtient,*

$$\forall X' \in \mathbb{R}^n, \;\; Y' = (Q^{-1}AP)X' \;\; et \;\; Y' = BX'$$

*ceci n'est possible que si $B = Q^{-1}AP$.*

**Corollaire 2.42.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$. Soient $\beta$ et $\gamma$ deux bases de $E$, $A = Mat(u, \beta)$, $B = Mat(u, \gamma)$ et $P$ la matrice de passage de la base $\beta$ à la base $\gamma$. Alors on a

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

**Preuve**

*Exercice*

**Remarques 2.19**

*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$. Soient $\beta$ et $\gamma$ deux bases de $E$, $A = Mat(u, \beta)$, $B = Mat(u, \gamma)$. Alors, d'après le corollaire précédent, les matrices $A$ et $B$ sont semblables, donc elles ont la même trace. Ainsi, la trace de la matrice de $u$, par rapport à une base de $E$, ne dépend pas de la base choisie.*

*Ce qui justifie la définition suivante :*

**Définition 2.43.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ un endomorphisme de $E$, $\beta$ une base de $E$ et $A = Mat(u, \beta)$. On définit la trace de $u$, qu'on note $tr(u)$, par

$$\boxed{tr(u) = tr(A)}$$

# 2.44 Rang d'une application linéaire - Rang d'une matrice

## 2.44.1 Définition et propriétés de base

Rappelons que si $K$ est un corps commutatif, alors toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n}$, peut-être considérée comme une application linéaire, notée encore $A$, de $K^n$ vers $K^m$, définie par,

$$\forall X \in K^n, \;\; A(X) = AX$$

où $AX$ est le produit matriciel de la matrice $A$ par la matrice colonne $X$.

**Définition 2.45.**

**i)** Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ un système de vecteurs de $E$. On définit le rang de $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, qu'on note $rg(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, par

$$\boxed{rg(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \dim(Vect\{v_1, v_2, \ldots, v_n\})}$$

**ii)** Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels de dimension finie et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On définit le rang de $f$, qu'on note $rg(f)$, par

$$\boxed{rg(f) = \dim(Im(f))}$$

**iii)** Soit $A$ une matrice de $M_{m,n}(K)$, alors par définition, le rang de $A$ est égal au rang de l'application linéaire définie par $A$,

$$\boxed{rg(A) = \dim(Im(A))}$$

**Remarques 2.20**

1. *Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels de dimension finie, $n$ et $m$ respectivement. Soient $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Alors on sait que*

$$Im(f) = Vect(\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\})$$

*Donc*

$$\boxed{rg(f) = \dim(Vect(\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}))}$$

2. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le i \le n}$ une matrice de $M_{m,n}(K)$. Pour chaque $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, soit $v_j$ le vecteur de $K^m$ défini par,*

$$v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

*Alors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont appelés les vecteurs colonnes de la matrice $A$.*
*Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $K^n$, alors on a*

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad Ae_j = v_j$$

*Donc, on en déduit que*

$$\boxed{rg(A) = rg(v_1, v_2, \ldots, v_n)}$$

3. *Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels de dimension finie, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, $\beta$ une base de $E$, $\beta'$ une base de $F$ et $A = Mat(f, \beta, \beta')$. Alors*

$$\boxed{rg(f) = rg(A)}$$

4. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $F$ un $K$-espace vectoriel quelconque et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors d'après le théorème du rang, on a*

$$\boxed{rg(f) = \dim(E) - \dim(\ker(f))}$$

### 2.45.1 Quelques applications du theorème du rang

**Proposition 2.46.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de **dimension finie**, $F$ un $K$-espace vectoriel quelconque et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors

**i)** Pour tout sous-espace vectoriel $G$ de $E$, on a

$$\boxed{\dim(G) = \dim(f(G)) + \dim(G \cap \ker(f))}$$

**ii)** Pour tout sous-espace vectoriel $H$ de $F$, on a

$$\boxed{\dim(f^{-1}(H)) = \dim(H \cap Im(f)) + \dim(\ker(f))}$$

**Preuve**

**i)** *Soit $g$ la restriction de $f$ à $G$, alors $g : G \longrightarrow F$ est une application linéaire et on a*

$$\ker(g) = G \cap \ker(f) \quad et \quad Im(g) = f(G)$$

*donc, d'après le théorème du rang, on a*

$$\dim(G) = \dim(f(G)) + \dim(G \cap \ker(f))$$

**ii)** *Soit $h$ la restriction de $f$ à $f^{-1}(H)$, alors $h : f^{-1}(H) \longrightarrow F$ est une application linéaire et on a*

$$\ker(h) = \ker(f) \cap f^{-1}(H) = \ker(f) \quad et \quad Im(h) = f(f^{-1}(H)) = H \cap Im(f)$$

*donc, d'après le théorème du rang, on a*

$$\dim(f^{-1}(H)) = \dim(H \cap Im(f)) + \dim(\ker(f))$$

**Remarques 2.21**

*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $F$ un $K$-espace vectoriel quelconque et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors pour tout sous-espace vectoriel $G$ de $E$, on a*

$$\boxed{\dim(f(G)) \leq \dim(G)}$$

**Proposition 2.47.**

Soient $E$, $F$ et $G$ trois $K$-espaces vectoriels de dimension finie, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Alors

$$\boxed{rg(f) + rg(g) - \dim(F) \leq rg(g \circ f) \leq \inf(rg(f), rg(g))}$$

**Preuve**

*On sait que pour tout sous-espace vectoriel $H$ de $F$, on a*

$$\dim(g(H)) = \dim(H) - \dim(H \cap \ker(g))$$

*Donc, en particulier, on a*

$$\dim((g \circ f)(E)) = \dim(g(f(E))) = \dim(f(E)) - \dim(\ker(g) \cap f(E))$$

*Ainsi, on aura,*

$$\begin{aligned} rg(g \circ f) &= \dim((g \circ f)(E)) \\ &= \dim(f(E)) - \dim(\ker(g) \cap f(E)) \\ &\geq \dim(f(E)) - \dim(\ker(g)) \\ &= \dim(f(E)) - (\dim(F) - \dim(g(F))) \\ &= \dim(f(E)) + \dim(g(F)) - \dim(F) \\ &= rg(f) + rg(g) - \dim(F). \end{aligned}$$

*On sait que pour tout sous-espace vectoriel $H$ de $F$, on a* $\dim(g(H)) \leq \dim(H)$, *donc, en particulier,*

$$\dim(g(f(E))) \leq \dim(f(E))$$

*Donc $rg(g \circ f) \leq rg(f)$.*
*D'autre part, on a $f(E) \subseteq F$, donc $g(f(E)) \subseteq g(F)$, donc*

$$\dim(g(f(E))) \leq \dim(g(F))$$

*par suite, $rg(g \circ f) \leq rg(g)$.*

**Proposition 2.48.**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires. Alors

$$\boxed{|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)}$$

**Preuve**
*Il est facile de voir que $(f+g)(E) \subseteq f(E) + g(E)$, donc on aura,*

$$\dim((f+g)(E)) \leq \dim(f(E) + g(E)) \leq \dim(f(E)) + \dim(g(E))$$

*Par conséquent, on a*

$$rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$$

$$\begin{aligned} f = (f+g) - g &\Longrightarrow rg(f) = rg((f+g) - g) \\ &\Longrightarrow rg(f) \leq rg(f+g) + rg(-g) \\ &\Longrightarrow rg(f) \leq rg(f+g) + rg(g) \quad \textit{car } rg(-g) = rg(g) \\ &\Longrightarrow rg(f) - rg(g) \leq rg(f+g) \end{aligned}$$

*De la même manière, en remarquant que $g = (f+g) - f$, on montre que $rg(g) - rg(f) \leq rg(f+g)$. Donc*

$$|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g)$$

**Proposition 2.49.**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires. Alors

$$rg(f+g) = rg(f) + rg(g) \Longleftrightarrow \begin{cases} Im(f) \cap Im(g) = \{0\} \\ E = \ker(f) + \ker(g) \end{cases}$$

**Preuve**

($\Longrightarrow$) *On suppose que* $rg(f+g) = rg(f)+rg(g)$, *donc* $\dim((f+g)(E)) = \dim(f(E))+\dim(g(E))$. *Or, on sait que*

$$\dim(f(E)+g(E)) = \dim(f(E)) + \dim(g(E)) - \dim(f(E) \cap g(E))$$

*donc* $\dim((f+g)(E)) \geq \dim(f(E)+g(E))$.
*Puisque* $(f+g)(E) \subseteq f(E)+g(E)$, *alors* $\dim((f+g)(E)) = \dim(f(E)+g(E))$.
*Ainsi, on aura* $\dim(f(E)+g(E)) = \dim(f(E))+\dim(g(E))$, *donc* $\dim(f(E)\cap g(E)) = 0$, *par suite* $Im(f) \cap Im(g) = \{0\}$.
*Puisque* $Im(f) \cap Im(g) = \{0\}$, *alors* $\ker(f+g) = \ker(f) \cap \ker(g)$. *Ainsi, on aura*

$$\begin{aligned}
\dim(ker(f) + \ker(g)) &= \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) - \dim(\ker(f) \cap \ker(g)) \\
&= \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) - \dim(\ker(f+g)) \\
&= \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) - [\dim(E) - \dim(Im(f+g))] \\
&= \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) - [\dim(E) - \dim(Im(f)) - \dim(Im(g))] \\
&= (\dim(\ker(f)) + \dim(Im(f))) + (\dim(\ker(g)) + \dim(Im(g))) - \dim(E) \\
&= \dim(E) + \dim(E) - \dim(E) \\
&= \dim(E)
\end{aligned}$$

*Donc* $E = \ker(f) + \ker(g)$.

($\Longleftarrow$) *On suppose* $E = \ker(f) + \ker(g)$ *et* $Im(f) \cap Im(g) = \{0\}$, *donc on aura*

$$\dim(\ker(f) + \ker(g)) = n \quad et \quad \ker(f+g) = \ker(f) \cap \ker(g)$$

*Ainsi, d'après le théorème du rang, on a*

$$\begin{aligned}
\dim(Im(f)) + \dim(Im(g)) &= 2n - (\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g))) \\
&= 2n - (\dim(\ker(f) + \ker(g)) + \dim(\ker(f) \cap \ker(g))) \\
&= 2n - (n - \dim(\ker(f+g))) \\
&= n - \dim(\ker(f+g)) \\
&= \dim(Im(f+g))
\end{aligned}$$

*Donc* $rg(f) + rg(g) = rg(f+g)$.

### 2.49.1 Rang et matrices équivalentes

**Définition 2.50.**

Soit $K$ un corps commutatif. Deux matrices $A$ et $B$ de $M_{m,n}(K)$ sont dites **équivalentes**, s'il existe deux matrices **inversibles** $P \in M_n(K)$ et $Q \in M_m(K)$, tel que

$$\boxed{B = QAP}$$

**Remarques 2.22**

1. *La relation $\mathcal{R}$ définie sur $M_{m,n}(K)$ par*

$$A \,\mathcal{R}\, B \Longleftrightarrow A \textit{ est équivalente à } B$$

*est une relation d'équivalence sur $M_{m,n}(K)$.*

2. *Si deux matrices $A$ et $B$ de $M_{m,n}(K)$ sont équivalentes, alors $rg(A) = rg(B)$. En effet, on sait que $A : K^n \longrightarrow K^m$ et $B : K^n \longrightarrow K^m$ sont considérées comme des applications linéaires et que*

$$rg(A) = \dim(A(K^n)) \quad \textit{et} \quad rg(B) = \dim(B(K^n))$$

*Soient $P$ et $Q$ deux matrices inversibles, telles que $B = QAP$, donc on a*

$$\begin{aligned} B(K^n) &= (QAP)(K^n) \\ &= (QA)(P(K^n)) \\ &= (QA)(K^n) \quad \textit{car } P \textit{ inversible, donc } P(K^n) = K^n \\ &= Q(A(K^n)) \end{aligned}$$

*$Q$ est une matrice inversible, donc $Q : K^m \longrightarrow K^m$ est un automorphisme, par suite, pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $K^m$, on a $\dim(F) = \dim(Q(F))$, donc, en particulier, on a*

$$rg(B) = \dim(B(K^n)) = \dim(Q(A(K^n)) = \dim(A(K^n)) = rg(A)$$

*Réciproquement, nous allons montré que si $rg(A) = rg(B)$, alors $A$ et $B$ sont équivalentes.*

**Lemme 2.51.**

Soient $K$ un corps commutatif, $A$ une matrice non nul de $M_{m,n}(K)$ et $r$ un entier $\geq 1$. Alors $A$ est de rang $r$, si et seulement si, $A$ est équivalente à la matrice en blocs $I(m,n,r)$ de $M_{m,n}(K)$, définie par,

$$I(m,n,r) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $I_r$ est la matrice identité d'ordre $r$.

**Preuve**

($\Longrightarrow$) *Supposons que $A$ est de rang $r$.*

*Soient $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $K^n$ et $\beta' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_m)$ celle de $K^m$.*

*Soit $f : K^n \longrightarrow K^m$ l'application linéaire de matrice $A$ par rapport aux bases $\beta$ et $\beta'$, donc $rg(f) = rg(A) = r$, par suite $\dim(Im(f)) = r$. Soit $(v'_1, v'_2, \ldots, v'_r)$ une base de $Im(f)$ et soient $v'_{r+1}, \ldots, v'_m$ des vecteurs de $K^m$, tels que $\gamma' = (v'_1, v'_2, \ldots, v'_r, v'_{r+1}, \ldots, v'_m)$ soit une base de $K^m$.*

*Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, soit $v_i \in K^n$, tel que $v'_i = f(v_i)$, alors il est facile de vérifier que,*

*$(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ est libre et que $Vect(\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}) \cap \ker(f) = \{0\}$.*

*Par conséquent, on a*

$$E = Vect(\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}) \oplus \ker(f)$$

*Soit $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ une base de $\ker(f)$, donc $\gamma = (v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ est une base de $K^n$ et on a*

$$f(v_i) = \begin{cases} v'_i & si \;\; i \in \{1, 2, \ldots, r\} \\ 0 & si \;\; i \in \{r+1, \ldots, n\} \end{cases}$$

*Donc*

$$Mat(f, \gamma, \gamma') = \begin{array}{c} \\ v'_1 \\ \vdots \\ v'_r \\ v'_{r+1} \\ \vdots \\ v'_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(v_1) & \ldots & f(v_r) & f(v_{r+1} & \ldots & f(v_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array} = I(m, n, r)$$

*Soit $P$ la matrice de passage de la base $\beta$ à la base $\gamma$ et $Q$ la matrice de passage de la base $\beta'$ à la base $\gamma'$. Puisque $A = Mat(f, \beta, \beta')$ et $I(m, n, r) = Mat(f, \gamma, \gamma')$, alors d'après la formule de changement de base, on a*

$$I(m, n, r) = Q^{-1}AP$$

*Donc $A$ et $I(m, n, r)$ sont équivalentes.*

($\Longleftarrow$) *Trivial, d'après la remarque précédente.*

**Théorème 2.52.**

Soient $K$ un corps commutatif, $A$ et $B$ deux matrices de $M_{m,n}(K)$. Alors

$$\boxed{rg(A) = rg(B) \Longleftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont équivalentes}}$$

**Preuve**

($\Longrightarrow$) *Supposons que $rg(A) = rg(B) = r$, alors, d'après le lemme précédent, $A$ et $B$ sont équivalentes à $I(m, n, r)$, donc, par transitivité, $A$ et $B$ sont équivalentes.*

($\Longleftarrow$) *Trivial, d'après la remarque précédente.*

## 2.53 Exercices

### 2.53.1 Noyau, image, isomorphisme, automorphisme, théorème du rang

**Exercice 2.1**
On considère le corps $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**a)** Trouver une base de $\mathbb{C}$.

**b)** Montrer que pour tout endomorphisme $f$ de $\mathbb{C}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, tel que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + a\overline{z}$$

**c)** Trouver une condition necessaire et suffisante sur $a$ et $b$ pour que $f$ soit un automorphisme de $\mathbb{C}$.

**Exercice 2.2**
Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$, tel que $u^2 = -Id_E$.
Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $\lambda = \alpha + i\beta$ et pour $x \in E$, on pose

$$\lambda \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot u(x)$$

**a)** Montrer qu'on définit ainsi une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur $E$.

**b)** Montrer que si $E$ est de dimension finie, alors $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ est paire.

**Exercice 2.3**
Soient $E$, $F$ deux $K$-espace vectoriels et $f \in L(E, F)$.

1. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de $E$.
   **a)** Montrer que $f(E_1 + E_2 + \cdots + E_n) = f(E_1) + f(E_2) + \cdots + f(E_n)$.
   **b)** On suppose que la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est directe.
   La somme $f(E_1) + f(E_2) + \cdots + f(E_n)$ l'est-t-elle aussi ? Sinon, quelle condition necessaire et suffisante doit vérifier $f$ pour que la somme $f(E_1) + f(E_2) + \cdots + f(E_n)$ soit directe ?
2. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de $F$.
   **a)** Montrer que $f^{-1}(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) = f^{-1}(F_1) + f^{-1}(F_2) + \cdots + f^{-1}(F_n)$.
   **b)** On suppose que la somme $E_1 + E_2 + \cdots + E_n$ est directe.
   La somme $f^{-1}(F_1) + f^{-1}(F_2) + \cdots + f^{-1}(F_n)$ l'est-t-elle aussi ? Sinon, quelle condition necessaire et suffisante doit vérifier $f$ pour que la somme $f(E_1) + f(E_2) + \cdots + f(E_n)$ soit directe ?

**Exercice 2.4**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$, tel que $u^2 = -Id_E$. Pour chaque $x \in E$, avec $x \neq 0$, on pose $E_x = Vect(\{x, u(x)\}$.

1. Déterminer $\dim(E_x)$.
2. Soit $F$ un sous-espace stable par $u$. Montrer que
   **a)** $E_x \cap F = \{0\} \Longrightarrow E_x \subseteq F$.
   **b)** Si $x \notin F$ alors la somme $E_x + F$ est directe.
3. Montrer qu'il existe $x_1, x_2, \ldots, x_m$ éléments de $E$, tels que

$$E = E_{x_1} \oplus E_{x_2} \oplus \cdots \oplus E_{x_m}$$

4. En déduire que la dimension de $E$ est paire et qu'il existe une base $\beta$ de $E$ dans laquelle la matrice $A$ de $u$ s'écrit sous la forme diagonale en blocks,

$$A = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

5. Réciproquement, montrer que si $\dim(E)$ est paire, alors $E$ possède au moins un endomorphisme $u$, tel que $u^2 = -Id_E$.
6. On suppose $K = \mathbb{R}$ et $u$ un endomorphisme de $E$, tel que $u^2 = -Id_E$. Soit $L$ la partie de $L(E)$ définie par $L = \{P(u) \ : \ P \in \mathbb{R}[X]\}$
   **a)** Montrer que $L$ est un corps commutatif isomorphe à $\mathbb{C}$ et que

$$\forall v \in L(E), \quad v \in L \Longleftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ v = au + bId_E$$

   **b)** On munit $E$ de la loi externe suivante :

$$\begin{aligned} K \times E &\longrightarrow E \\ (v, x) &\longmapsto v \cdot x = v(x) \end{aligned}$$

   Montrer que $E$ muni de cette loi externe est un $L$-espace vectoriel, qu'on note $\widehat{E}$.

   **c)** Montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2 \dim_L(\widehat{E})$.

**Exercice 2.5**
Soit $\mathbb{C}[x, y]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions polynômes à deux variables sur $\mathbb{C}$ et soit $E$ la partie de $\mathbb{C}[x, y]$ définie par

$$E = \{P \in \mathbb{C}[x, y] \ : \ \deg_x(P) \leq 2 \text{ et } \deg_y(P) \leq 2\}$$

1. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[x, y]$. Quelle est la dimension de $E$ ?
2. Soit $u$ l'application définie sur $E$ par

$$\forall P \in E, \quad u(P) = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}$$

   Montrer que $u$ est un endomorphisme de $E$ et déterminer les dimensions de $\ker(u)$ et $Im(u)$.

**Exercice 2.6**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.

1. A quelle condition nécessaire et suffisante existe-t-il un endomorphisme $u$ de $E$, tel que
   $\ker(u) = F$ et $Im(u) = G$ ?

2. On pose $\mathcal{G} = \{u \in L(E) \ : \ Im(u) = F \ \text{ et } \ \ker(u) = G\}$. Montrer que

$$(\mathcal{G}, \circ) \text{ est un groupe} \Longleftrightarrow E = F \oplus G$$

**Exercice 2.7**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$. Montrer que

1. $\dim(\ker(u+v) \leq \dim(\ker(u) \cap \ker(v)) + \dim(Im(u) \cap Im(v))$.
2. $\dim(\ker(u \circ v) \leq \dim(\ker(u)) + \dim(\ker(v))$.
3. $u(\ker(u \circ v)) = \ker(u) \cap Im(v)$.

**Exercice 2.8**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ et $v$ deux endomorphismes non nuls de $E$, tel que

$$u^2 = v^2 = 0 \ \text{ et } \ \ker(u) \cap \ker(v) = \{0\}$$

Montrer que

**a)** $\dim(\ker(u) = \dim(\ker(v))$.

**b)** $u+v$, $u-v$, $uv+vu$ et $uv-vu$ sont des automorphismes de $E$.

**c)** $E = \ker(u) \oplus \ker(v)$.

**d)** $u$ et $v$ sont semblables.

**Exercice 2.9**
Soient $E$, $F$ et $G$ trois $K$-espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Montrer que

$$f(\ker(g \circ f)) = Im(f) \cap \ker(g)$$

et

$$g^{-1}(Im(g \circ f)) = Im(f) + \ker(g)$$

**Exercice 2.10**
Soient $E$, $F$ et $G$ trois $K$-espace vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Montrer que si $F/Im(u)$ et $G/Im(g)$ sont de dimension finie, alors $G/Im(g \circ f)$ est de dimension finie.

**Exercice 2.11**
Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels. $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $\mathcal{E}$ la partie de $L(F, E)$ définie par

$$g \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow f \circ g \circ f = 0$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $L(F, E)$ et que

$$\forall g \in L(F, E), \ \ g \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow g(Im(f)) \subseteq \ker(f)$$

2. Montrer que

$$\mathcal{E} = \{0\} \Longleftrightarrow f \text{ est bijective}$$

3. On suppose $\dim(E) = n$, $\dim(F) = p$ et $rg(f) = r$. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$ ?

**Exercice 2.12**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque. Pour tout $u \in L(E)$ et pour tout entier $k \geq 0$, on pose

$$N_k = \ker(u^k)$$

1. Montrer que pour tout $k \geq 0$, $N_k \subseteq N_{k+1}$ et $u(N_{k+1}) \subseteq N_k$.
2. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie. Montrer que
   **a)** $\forall k \geq 0$, $N_k \cap F$ et $u^k(F)$ sont de dimension finie.
   **b)** $\dim(F) = \dim(u^k(F)) + \dim(N_k \cap F)$.
3. Dans cette partie, on suppose que $u$ n'est pas injectif et que $N_1$ est de dimension finie.
   Pour tout $k \geq 0$, on pose $n_k = \dim(N_k)$.
   **a)** Montrer que pour tout $k \geq 0$, $N_k$ est de dimension finie.
   **b)** Montrer que pour tout $k \geq 0$, $n_k \geq kn_1$.
   **c)** On suppose que pour tout $k \geq 0$, $N_k \neq N_{k+1}$ et qu'il existe $k_0 \geq 1$, tel que $n_{k_0} = k_0$. Montrer que
   $$\forall k \geq 0, \quad n_k = k$$

**Exercice 2.13**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, où $K$ est un corps de caractéristique différente de 2. Dans cet exercice, on se propose de montrer que tout endomorphisme $f$ de $E$ vérifie la propriété $(P)$ suivante :
$(P)$ : “$f$ est la différence de deux automorphismes de $E$“

1. Montrer que si $f$ est un automorphisme de $E$, alors $2f$ est un automorphisme de $E$. En déduire que tout automorphisme de $E$ vérifie la propriété $(P)$.
2. On suppose que $f$ est un endomorphisme de $E$, non nul et non injectif et que
   $$E = \ker(f) \oplus Im(f)$$
   **a)** Soit $\widetilde{f} : Im(f) \longrightarrow Im(f)$ l'application qui à $x$ fait correspondre $f(x)$. Montrer que $\widetilde{f}$ est un automorphisme de $Im(f)$ et en déduire qu'il existe deux automorphismes $f_1$ et $f_2$ de $Im(f)$, tels que $\widetilde{f} = f_1 - f_2$.
   **b)** Montrer que l'on peut prolonger $f_1$ et $f_2$ en deux automorphismes de $E$, $g_1$ et $g_2$ respectivement, lels que les réstrictions de $g_1$ et $g_2$ à $\ker(f)$ coïncident.
   **c)** En déduire que $f$ possède la propriètè $(P)$.
3. Soit maintenant $f$ un endomorphisme de $E$, non nul et non inversible. $F$ un supplémentaire de $Im(f)$ dans $E$.
   **a)** Justifier que $F \neq \{0\}$.
   **b)** Montrer qu'il existe un isomorphisme $h_1$ de $F$ dans $\ker(f)$.
   **c)** Montrer que l'on peut prolonger $h_1$ en un automorphisme $h$ de $E$.
   **d)** Montrer que $\ker(f \circ h) = F$ et $Im(f \circ h) = Im(f)$.
   **e)** En déduire que l'endomorphisme $f \circ h$ vérifie la propriètè $(P)$.
   **f)** Déduire, de ce qui précède, que $f$ vérifie la propriètè $(P)$.

### 2.53.2 Rang, décomposition d'une application linéaire

**Exercice 2.14**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$, tels que
$$E = \ker(u) + \ker(v) = Im(u) + Im(v)$$
Montrer que

**a)** $E = \ker(u) \oplus \ker(v) = Im(u) \oplus Im(v)$.

**b)** $E = Im(u+v)$ et $rg(u+v) = rg(u) + rg(v)$.

**Exercice 2.15**
Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,E)$, tel que
$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g$$
Montrer que

**a)** $E = \ker(f) \oplus Im(g)$ et $E = Im(f) \oplus \ker(g)$

**b)** $f$, $g$, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont même rang.

**Exercice 2.16**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$, tel que $u^3 = 0$.

**a)** Montrer que $rg(u) + rg(u^2) \leq \dim(E)$.

**b)** Montrer que $2rg(u^2) \leq rg(u)$.

**Exercice 2.17**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$, tels que
$$u \circ v = 0 \quad \text{et} \quad u + v \in GL(E)$$
Montrer que $rg(u) + rg(v) = \dim(E)$.

**Exercice 2.18**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$. Montrer que

**a)** $rg(v \circ u) = rg(v) \Longleftrightarrow E = Im(u) + \ker(v)$.

**b)** $rg(v \circ u) = rg(u) \Longleftrightarrow Im(u) \cap \ker(v) = \{0\}$.

**Exercice 2.19**
Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
   **i)** $Im(g) \subseteq Im(f)$.
   **ii)** Il existe $h \in L(E)$, tel que $g = f \circ h$.
2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
   **i)** $\ker(g) \subseteq \ker(f)$.
   **ii)** Il existe $h \in L(F)$, tel que $f = h \circ g$.
3. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
   **i)** $rg(g) \leq rg(f)$.
   **ii)** Il existe $h \in L(E)$ et il existe $k \in L(F)$, tels que $f \circ h = k \circ g$.
   **iii)** Il existe $u \in L(E)$ et il existe $v \in L(F)$, tels que $g \circ u = v \circ f$.

### 2.53.3 Projecteurs

**Exercice 2.20**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque et $u$ un projecteur de $E$.

1. Montrer que
   **a)** $Id_E - u$ est aussi un projecteur de $E$.
   **b)** $Im(u) = \ker(u - Id_E)$.
   **c)** $E = \ker(u) \oplus Im(u)$.
   **d)** Si $E$ est de dimension finie, alors $rg(u) = tr(u)$.
2. Soit $v$ un endomorphisme quelconque de $E$. Montrer que
$$u \circ v = v \circ u \iff v(\ker(u)) \subseteq \ker(u) \text{ et } v(Im(u)) \subseteq Im(u)$$
3. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Montrer que
   **a)** $u^{-1}(F) = \ker(u) \oplus (F \cap Im(u))$.
   **b)** $F$ est stable par $u$, si et seulement si, $F = (F \cap \ker(u)) \oplus (F \cap Im(u))$.
4. Soit $v$ un autre projecteur de $E$, tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que
   **a)** $u \circ v$ et $u + v - u \circ v$ sont deux projecteurs de $E$.
   **b)** $Im(u \circ v) = Im(u) \cap Im(v)$.
   **c)** $Im(u + v - u \circ v) = Im(u) + Im(v)$.

**Exercice 2.21**
Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$. On suppose qu'il existe un projecteur $p$ de $E$, tel que
$$p \circ u - u \circ p = u$$
**a)** Montrer que $u(\ker(p)) \subseteq Im(p)$ et $Im(p) \subseteq \ker(u)$.
**b)** En déduire que $u^2 = 0$.
**c)** Etudier la réciproque.

**Exercice 2.22**
Soit un $K$-espace vectoriel.

1. Soient $u$ et $v$ deux projecteurs quelconques de $E$.
   **a)** Trouver une condition necessaire et suffisante pour que $u + v$ soit un projecteur de $E$.
   **b)** Dans le cas où $u + v$ est un projecteur de $E$, montrer que
      **i)** $Im(u) \cap Im(v) = \{0\}$.
      **ii)** $\ker(u + v) = \ker(u) \cap \ker(v)$.
      **iii)** $Im(u + v) = Im(u) \oplus Im(v)$.
2. On suppose $K$ de caractéristique nulle, (par exemple $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $E$ de dimension finie. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$, $n \geq 2$, des projecteurs de $E$. Montrer que
   **a)** Si $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ est un projecteur, alors
$$Im(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = Im(u_1) \oplus Im(u_2) \oplus \cdots \oplus Im(u_n)$$

**b)** $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ est un projecteur de $E$, si et seulement si,

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2,\ \ i \neq j \Longrightarrow u_i \circ u_j = 0$$

**Exercice 2.23**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque, $u$ et $v$ deux projecteurs de $E$, tels que $Im(u) = Im(v)$.
Montrer que $\forall \lambda \in K,\ (1-\lambda)u + \lambda v$ est un projecteur de $E$.

**Exercice 2.24**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque, $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$, tel que $u \circ v = Id_E$. Montrer que

**a)** $v \circ u$ est un projecteur de $E$.

**b)** $Im(v \circ u) = Im(v)$ et $\ker(v \circ u) = \ker(u)$.

**Exercice 2.25**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ et $v$ deux projecteurs de $E$, tels que $u + v - Id_E$ soit inversible. Montrer que $rg(u) = rg(v)$.

**Exercice 2.26**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $f$ un endomorphisme non nul de $E$. On pose

$$E_f = \{u \circ f\ :\ u \in L(E)\}$$

**a)** Vérifier que $E_f$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**b)** Soit $g$ un endomorphisme de $E$. Montrer que

$$g \in E_f \Longleftrightarrow \ker(f) \subseteq \ker(g)$$

**c)** Montrer qu'il existe un projecteur non nul appartenant à $E_f$.

**Exercice 2.27**
Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$.

**a)** Montrer qu'il existe un projecteur $p$ et un automorphisme $f$ de $E$, tels que $u = p \circ f$.

**b)** Montrer qu'il existe un projecteur $q$ et un automorphisme $g$ de $E$, tels que $u = g \circ q$.

**Exercice 2.28**
Soit $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque.

1. Soient $p$ un projecteur de $E$ et $u$ un endomorphisme quelconque de $E$. Montrer que

   **a)** $\ker(u \circ p) = (\ker(u) \cap Im(p)) \oplus \ker(p)$.

   **b)** $Im(p \circ u) = (\ker(p) + Im(u)) \cap Im(p)$.

2. Soient $p$ et $q$ deux projecteurs de $E$. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de $E$, si et seulement si,

$$Im(p) \cap (Im(q) + \ker(p)) \subseteq Im(q) \oplus (\ker(p) \cap \ker(q))$$

3. On suppose que $\dim(E) = 3$ et soient $p$ et $q$ deux projecteurs de $E$, tels que $rg(p) = rg(q) = 1$.

**a)** A quelles conditions nécessaires et suffisantes, portant sur les images et les noyaux de $p$ et $q$, $p \circ q$ est un projecteur de $E$.

**b)** Déterminer, dans ces conditions, le noyau et l'image de $p \circ q$ et $q \circ p$.

**Exercice 2.29**
Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$.

1. On suppose qu'il existe un projecteur $p$ de $E$, tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

   **a)** Montrer que $u \circ p = 0$.

   **b)** En déduire que $u \circ u = 0$.

2. Réciproquement, on suppose que $u \circ u = 0$.

   **a)** Montrer que $Im(u) \subseteq \ker(u)$.

   **b)** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, tel que $Im(u) \subseteq F \subseteq \ker(u)$ et soit $G$ un supplémentaire de $F$ dans $E$. Soit $q$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$, calculer $q \circ u - u \circ q$.

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un projecteur $p$ de $E$, tel que

$$p \circ u - u \circ p$$

   Cette condition étant supposée remplie, y-a-t-il toujours unicité du projecteur $p$ ?

4. On prend $E = \mathbb{R}^2$ et $u$ l'endomorphisme de $E$ défini par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x, y) = (-2x + 4y, -x + 2y)$$

   **a)** Vérifier que $u \circ u = 0$.

   **b)** Déterminer un projecteur $p$ de $E$, tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

### 2.53.4 Matrices, applications linéaires de matrices

**Exercice 2.30**
Soient $K$ un corps commutatif et $\mathcal{H} = Vect(\{AB - BA \ : \ (A, B) \in M_n(K)^2\})$.

1. Montrer que $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \quad i \neq j \Longrightarrow E_{ij} \in \mathcal{H}$.
2. Montrer que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad E_{ii} - E_{nn} \in \mathcal{H}$.
3. En déduire que $\mathcal{H}$ est un hyperplan de $M_n(K)$ et que $\ker(tr) = \mathcal{H}$.

**Exercice 2.31**

1. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, telle que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

   Montrer que $A$ est inversible.

2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, telle que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1$$

   Montrer que pour tout $B \in M_n(\mathbb{C})$, l'équation $AX + B = 0$ possède une solution unique.

3. Une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de $M_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique, si

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2,\ \ a_{ij} \geq 0 \ \text{ et } \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

   **a)** Montrer que si $A$ est une matrice stochastique, alors

$$\sup\{\lambda \in \mathbb{R}\ :\ \lambda I - A \text{ n'est pas inversible}\} = 1$$

   et que ce sup est atteint.

   **b)** Montrer que si $A$ est une matrice stochastique, alors pour tout entier $m \geq 0$, $A^m$ est une matrice stochastique.

**Exercice 2.32**
Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ avec $tr(A) \neq 0$ et $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ \ f(M) = tr(A)M - tr(M)A$$

1. Montrer que $f$ est endomorphisme de $E$.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $Im(f)$.

**Exercice 2.33**
Soient $A$ une matrice non nulle de $M_n(\mathbb{C})$ et $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ \ f(M) = M + tr(M)A$$

1. Vérifier que $f$ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.
2. Déterminer, en fonction de $A$, le noyau et l'image de $f$.
3. Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$, résoudre l'équation $X + tr(X)A = B$.

**Exercice 2.34**
Soit $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ une application linéaire non constante, telle que

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{C})^2,\ \ f(AB) = f(A)f(B)$$

Montrer que

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ \ M \text{ est inversible} \Longleftrightarrow f(M) \neq 0$$

**Exercice 2.35**
Une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de $M_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), est dite magique, s'il existe une constante notée $s(A)$, telle que

$$\forall i \in \{1,2,\dots,n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s(A) \ \text{ et } \ \forall j \in \{1,2,\dots,n\},\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = s(A)$$

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble de toutes les matrices magiques de $M_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ et que l'application

$$\begin{aligned} s : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto s(A) \end{aligned}$$

   est un homomorphisme d'algèbres.

2. Montrer que si $A$ est une matrice magique inversible, alors $A^{-1}$ est aussi magique.
3. Montrer que $\mathcal{M}$ est la somme directe du sous-espace vectoriel des matrices magiques symétriques et celui des matrices magiques antisymétriques.
4. Pour chaque $A \in M_n(\mathbb{K})$, on note $f_A$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice $A$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On désigne par $G$ et $H$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ définis par

   $$G = Vect((1,1,\ldots,1)) \text{ et } H = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n \ : \ x_1+x_2+\cdots+x_n = 0\}$$

   **a)** Montrer que
   $$A \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow G \text{ et } H \text{ sont stables par } f_A$$

   **b)** En déduire la dimension de $\mathcal{M}$.

**Exercice 2.36**

On dit qu'une partie $\mathcal{G}$ de $M_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), est un S-groupe, si $\mathcal{G}$ muni de la multiplication des matrices est un groupe (attention : $\mathcal{G}$ n'est pas nécessairement un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$). Dans ce cas, on appelle l'élément neutre de $\mathcal{G}$, qu'on note $J$, la S-unité de $\mathcal{G}$ et l'inverse d'un élément $A \in \mathcal{G}$, qu'on note $\widehat{A}$, le S-inverse de $A$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $A(\lambda)$ est l'élément de $\mathbb{K}$ dont tous les coefficients sont égaux à $\lambda$.
   Montrer que $\mathcal{G} = \{A(\lambda) \ : \ \lambda \in \mathbb{K}^*\}$ est un S-groupe dont on déterminera la S-unité et le
   S-inverse d'un élément.
2. Soit $\mathcal{G}$ un S-groupe quelconque de $M_n(\mathbb{K})$.

   **a)** Montrer que tous les éléments de $\mathcal{G}$ ont le même noyau et la même image.

   **b)** En déduire que si $\mathcal{G} \cap M_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{G}$ est un sous-groure de $GL_n(\mathbb{K})$ au sens ordinaire.

   **c)** Montrer que pour tout $A \in \mathcal{G}$, on a
   $$\mathbb{K}^n = \ker(A) \oplus Im(A)$$
3. Réciproquement, soient $F$ et $G$ deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{K}^n$. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{K})$, telles que $F$ et $G$ sont stables par $A$, la restriction de $A$ à $F$ est inversible et celle à $G$ est nulle. Montrer que $\mathcal{G}$ est un S-groupe.

**Exercice 2.37**

Soient $K$ un corps commutatif, $M_2(K)$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $K$ et $J$ la matrice définie par,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Pour $T \in M_2(K)$, avec $T \neq 0$ et $T \neq I$, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes,

   **i)** $T^2 = T$

   **ii)** Il existe $P \in GL_2(K)$, telle que $T = PJP^{-1}$

   **iii)** $tr(T) = 1$ et $\det(T) = 0$.

2. On suppose que $K$ est fini de cardinal $q$.
   **a)** Soit $\beta$ l'ensemble de toutes les bases de $K^2$ et soit $(e_1, e_2)$ la base canonique de $K^2$. Montrer que l'application,
   $$\begin{aligned} GL_2(K) &\longrightarrow \beta \\ T &\longmapsto (Te_1, Te_2) \end{aligned}$$
   est bijective
   **b)** Sur $K^2 \setminus \{(0,0)\}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par,
   $$\forall x \in K^2 \setminus \{(0,0)\},\ \forall y \in K^2 \setminus \{(0,0)\},\quad x\,\mathcal{R}\,y \Longleftrightarrow \exists \alpha \in K\ :\ y = \alpha x$$
   **i)** Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   **ii)** Pour $x \in K^2 \setminus \{(0,0)\}$, déterminer le cardinal de la classe de $x$ modulo la relation $\mathcal{R}$.
   **iii)** Quel est le nombre des classes d'équivalence modulo la relation $\mathcal{R}$ ?
   **c)** Déduire, de ce qui précède, le cardinal de $GL_2(K)$.
3. On pose $\mathcal{G} = \{P \in GL_2(K)\ :\ PJP^{-1} = J\}$
   **a)** Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $GL_2(K)$.
   **b)** Montrer que
   $$P \in \mathcal{G} \Longleftrightarrow P \text{ est une matrice diagonale}$$
   **c)** Quel est le cardinal de $\mathcal{G}$ ?
   **d)** Déduire, de ce qui précède, le cardinal de l'ensemble suivant
   $$\{T \in M_2(K)\ :\ T^2 = T\}$$

**Exercice 2.38**
Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ de $M_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique, si
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$
On désigne par $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de $M_n(\mathbb{R})$, par $\mathfrak{S}_n^+$ les éléments de $\mathfrak{S}_n$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et par $J$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. **a)** Montrer que
   $$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ \ A \in \mathfrak{S}_n \Longleftrightarrow AJ = J$$
   **b)** Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est stable pour la multiplication des matrices.
   **c)** Montrer que si $A \in \mathfrak{S}_n$ est inversible, alors $A^{-1} \in \mathfrak{S}_n$.
   **d)** Montrer que $\mathfrak{S}_n^+$ est stable pour la multiplication des matrices.
   **e)** Si $A \in \mathfrak{S}_n$ est inversible, a-t-on $A^{-1} \in \mathfrak{S}_n^+$ ?
2. Soient $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\sigma$ une permutation de $S_n$ et $u_\sigma$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par,
   $$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \ u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$
   **a)** Déterminer la matrice $M_\sigma$ de $u_\sigma$ par rapport à la base $\beta$ et vérifier que $M_\sigma \in \mathfrak{S}_n^+$.

**b)** Justifier que $M_\sigma$ est inversible et déterminer $M_\sigma^{-1}$ en fonction de $\sigma$. Vérifier que $M_\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n^+$.

3. Soit $A$ une matrice inversible, telle que $A^{-1} \in \mathfrak{S}_n^+$. On pose $A^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

**a)** Montrer que

$$\forall (i,j,k) \in \{1, 2, \ldots, n\}^3, \quad i \neq j \Longrightarrow a_{ik}b_{kj} = 0$$

**b)** En déduire que chaque colonne de $A$ contient un unique élément non nul.

**c)** En déduire qu'il existe $\sigma \in S_n$, tel que $A = M_\sigma$.

# 3 Formes linéaires – Dualité

## 3.1 Formes linéaires et hyperplans

**Définition 3.2.**

Une **forme linéaire** sur $E$ est une application linéaire de $E$ vers $K$.

**Remarques 3.1**
*Rappelons que si $E$ est un $K$-espace vectoriel, on dit que $H$ est un hyperplan de $E$, si* $\dim(E/H) = 1$.
*Donc si $E$ est de dimension finie, alors*

$$H \textit{ est un hyperplan de } E \Longleftrightarrow \dim(H) = \dim(E) - 1$$

**Proposition 3.3.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque. Alors

**i)** Le noyau d'une forme linéaire non nulle sur $E$ est un hyperplan de $E$.

**ii)** Tout hyperplan de $E$ est le noyau d'au moins une forme linéaire non nulle de $E$.

**iii)** Si $\varphi$ et $\psi$ sont deux formes linéaires non nulles de $E$. Alors

$$\boxed{\ker(\varphi) = \ker(\psi) \Longleftrightarrow \exists \lambda \in K \ : \ \psi = \lambda\varphi}$$

**Preuve**

**i)** *Soit $\varphi$ une forme linéaire non nul sur $E$, alors on sait que $E/\ker(\varphi)$ est isomorphe à $Im(\varphi)$. Puisque $\varphi \neq 0$, alors $Im(\varphi) \neq \{0_K\}$, donc $Im(\varphi) = K$. Par suite, $E/\ker(\varphi)$ est isomorphe à $K$, donc $\dim(E/\ker(\varphi)) = 1$. Ainsi, $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de $E$.*

**ii)** ($\Longrightarrow$) *Supposons que $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$ et soit $x_0 \in E$, tel que $x_0 \notin \ker(\varphi)$, donc on aura*

$$E = \ker(\varphi) \oplus Vect(x_0)$$

*Soit $x \in E$ avec $x = y_0 + \alpha x_0$, alors $\varphi(x) = \alpha\varphi(x_0)$ et $\psi(x) = \alpha\psi(x_0)$. Puisque $\varphi(x_0) \neq 0$, donc on voit que $\psi(x) = \frac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}\varphi(x)$ et ceci pour tout $x \in E$, donc on aura*

$$\psi = \frac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}\varphi$$

($\Longleftarrow$) *Trivial.*

**Remarques 3.2**
*Le résultat ii) de la proposition précédente se généralise de la manière suivante :*

**Proposition 3.4.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque, $\varphi$ et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires non nulles sur $E$. Alors

$$\boxed{\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi) \Longleftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in K^n \text{ tel que } \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i}$$

**Preuve**

($\Longrightarrow$) *Supposons que* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi)$ *et montrons que* $\varphi \in Vect(\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\})$.

*Pour cela, on procède par récurrence sur* $n \geq 1$.

*Pour* $n = 1$, *le résultat est vrai d'après la proposition précédente.*

*Supposons que* $n > 1$ *et la propriété vraie pour tout entier* $m < n$.

**Première méthode :** *Pour chaque* $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, *soit* $\psi_i$ *la réstriction de* $\varphi_i$ *à* $\ker(\varphi_n)$ *et soit* $\psi$ *la restriction de* $\varphi$ *à* $\ker(\varphi_n)$, *alors* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ *et* $\psi$ *sont des formes linéaires de* $\ker(\varphi_n)$ *et on a*

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker(\psi_i) \subseteq \ker(\psi)$$

*Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe* $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) \in K^{n-1}$, *tel que*

$$\psi = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \psi_i$$

*Soit* $\beta$ *la forme linéaire de* $E$ *définie par*

$$\beta = \varphi - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \varphi_i$$

*Alors pour* $x \in \ker(\varphi_n)$, *on a*

$$\beta(x) = \varphi(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \varphi_i(x) = \psi(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \psi_i(x) = 0$$

*Donc* $\ker(\varphi_n) \subseteq \ker(\beta)$, *donc d'après la proposition précédente, il existe* $\lambda_n \in K$, *tel que*
$\beta = \lambda_n \varphi_n$, *par suite, on aura*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$$

**Deuxième méthode :** *On peut supposer que* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *sont linéairement indépendants, car sinon, il existe* $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\varphi_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \varphi i_0}}^{n} \alpha_i \varphi_i$$

*Donc quitte à réordonner les éléments, on peut supposer que* $i_0 = n$, *donc on aura*

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varphi_i$$

*Ainsi, on aura* $\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi_n)$ *donc* $\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi)$, *par suite d'après l'hypothèse de récurrence, il existe* $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) \in K^{n-1}$, *tel que*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \varphi_i$$

*Donc on aura le résultat.*
*Supposons, donc, que* $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ *est libre, donc, d'après l'hypothèse,*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \ker(\varphi_j) \nsubseteq \ker(\varphi_i)$$

*Donc pour tout* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *il existe* $y_i \in E$, *tel que* $y_i \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \ker(\varphi_j)$ *et* $y_i \notin \ker(\varphi_i)$
*Si on pose* $x_i = \dfrac{y_i}{\varphi_i(y_i)}$, *alors* $\varphi_i(x_i) = 1$ *et* $\forall j,\ j \neq i \Longrightarrow \varphi_j(x_i) = 0$.
*Donc pour tout* $x \in E$, *on a*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \varphi_i(x - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) x_j) = \varphi_i(x) - \varphi_i(x) = 0$$

*Donc*

$$x - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) x_j \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i)$$

*Par suite,*

$$\forall x \in E, \quad x - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) x_j \in \ker(\varphi)$$

*Donc*

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j) \varphi_j(x)$$

*Donc, si on pose pour tout* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\lambda_j = \varphi(x_j)$, *on aura*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j$$

$(\Longleftarrow)$ *Trivial.*

## 3.5 Espace vectoriel dual

**Définition 3.6.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel. On appelle **espace vectoriel dual** de $E$, qu'on note $E^*$, l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires sur $E$.

$$\boxed{E^* = L(E, K)}$$

**Notations**
*Pour $x \in E$ et pour $\varphi \in E^*$, on pose*

$$\varphi(x) =< x, \varphi >$$

**Remarques 3.3**
*Si $E$ est de dimension finie, alors on sait que $L(E, K)$ est aussi de dimension finie et on a*

$$\dim(L(E, K)) = \dim(E) \times \dim(K) = \dim(E)$$

*Donc si $E$ est de dimension finie, alors $E^*$ est aussi de dimension finie et on a*

$$\boxed{\dim(E^*) = \dim(E)}$$

*Donc, en particulier, si $E$ est de dimension finie, alors $E$ et $E^*$ sont isomorphes. Cependant, si $E$ n'est pas de dimension finie, $E^*$ peut ne pas être isomorphe à $E$. (Voir remarque 3.6.2 ci-dessous).*

**Exemples 3.1**

1. *Soit $K$ un corps commutatif, pour tout $a \in K^n$ avec $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, soit $\varphi_a$ l'application définie par,*

$$\forall x \in K^n,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \Longrightarrow \varphi_a(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

   *Alors $\varphi_a$ est une forme linéaire sur $K^n$.*
   *Réciproquement, soit $\varphi$ une forme linéaire sur $K^n$, alors il existe un unique $a \in K^n$, tel que $\varphi = \varphi_a$.*
   *En effet, soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $K^n$ et pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, soit $a_i = \varphi(e_i)$, alors pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on a*

$$\varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \varphi_a(x)$$

2. *Soit $K$ un corps commutatif, pour chaque $x = (x_n)_{n\geq 0}$ élément de $K^{\mathbb{N}}$, soit $\varphi_x$ l'application définie sur $K[X]$ par,*

$$\forall P \in K[X],\ \ P = \sum_{i=1}^{p} a_i X^i \Longrightarrow \varphi_x(P) = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i$$

   *Alors pour tout $x \in K^{\mathbb{N}}$, $\varphi_x$ définit une forme linéaire sur $K[X]$.*
   *Réciproquement, soit $\varphi$ une forme linéaire sur $K[X]$, alors il existe un unique $x = (x_n)_{n\geq 0}$ élément de $K^{\mathbb{N}}$, tel que $\varphi = \varphi_x$.*
   *En effet, soit $(1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$ la base canonique de $K[X]$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n = \varphi(X^n)$, alors pour $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$, on a*

$$\varphi(P) = \varphi(\sum_{i=1}^{p} a_i X^i) = \sum_{i=1}^{p} a_i \varphi(X^i) = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i = \varphi_x(P)$$

   *Ainsi, l'application*

$$\begin{aligned} f : K^{\mathbb{N}} &\longrightarrow (K[X])^* \\ x &\longmapsto \varphi_x \end{aligned}$$

   *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

3. *Soient $K$ un corps commutatif et $E = M_n(K)$, le $K$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $K$. Pour $M \in M_n(K)$, avec $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, on sait que la trace de $M$, notée $tr(M)$, est définie par $tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}$. Alors*

$$\begin{aligned} \varphi : M_n(K) &\longrightarrow K \\ M &\longmapsto tr(M) \end{aligned}$$

*est une forme linéaire sur $M_n(K)$.*
*Réciproquent, soit $\varphi$ une forme linéaire sur $M_n(K)$, alors il existe un unique $A \in M_n(K)$, tel que*

$$\forall M \in M_n(K),\ \varphi(M) = tr(AM)$$

*En effet, pour chaque $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, soit $E_{ij}$ la mtrice de $M_n(K)$, dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne qui est égal à 1. Alors pour chaque $M \in M_n(K)$, avec $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, on a*

$$M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}E_{ij}$$

*Soit $\varphi$ une forme linéaire sur $M_n(K)$.*
*Pour $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, soit $a_{ij} = \varphi(E_{ji})$, alors on a*

$$\begin{aligned} \forall M \in M_n(K),\ \varphi(M) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}E_{ij}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\varphi(E_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}a_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij}a_{ji}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \quad \text{où } MA = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \\ &= tr(MA) = tr(AM) \end{aligned}$$

**Remarques 3.4**
*Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}[X]$ n'est pas isomorphe à son dual $(\mathbb{Q}[X])^*$.*
*En effet, pour chaque entier $n \geq 0$, soit $E_n = \{P \in \mathbb{Q}[X] \ :\ \deg(P) \leq n\}$, alors on sait que $E_n$ est un $\mathbb{Q}$-espace espace vectoriel de dimension finie $= n+1$, donc $E_n$ est isomorphe à $\mathbb{Q}^{n+1}$. Or on sait que pour tout entier $m \geq 1$, $\mathbb{Q}^m$ est dénombrable, donc pour tout $n \geq 0$, $E_n$ est dénombrable.*
*Puisque $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ et puisque une réunion dénombrables d'ensembles dénombrables est dénombrable, alors $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.*
*D'après l'exemple précédent, on sait que $(\mathbb{Q}[X])^*$ est isomorphe à $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, donc si on suppose que $\mathbb{Q}[X]$ est isomorphe à son dual, alors $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ serait dénombrable. Ce qui est absurde, car on sait que $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. (Pour les questions de dénombrabilité, voir annexe).*

## 3.7 Base duale

**Proposition 3.8.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $= n$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base quelconque de $E$. Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on définit $e_i^* \in E^*$, par

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \;\; < e_j, e_i^* >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Alors $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de $E^*$, appelée base duale de $E$.

**Preuve**

*Comme* $\dim(E^*) = n$, *alors il suffit de montrer que* $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ *est libre.*
*Pour cela, soit* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in K^n$, *tel que* $\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \cdots + \alpha_n e_n^* = 0$. *A-t-on* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ *?*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* = 0 &\Longrightarrow \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; < e_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* >= 0 \\ &\Longrightarrow \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < e_j, e_i^* >= 0 \\ &\Longrightarrow \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; \alpha_j = 0 \quad (car \;\; < e_j, e_i^* >= \delta_{ij}) \end{aligned}$$

**Proposition 3.9.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale, alors

**i)**

$$\boxed{\forall x \in E, \;\; x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i^* > e_i}$$

**ii)**

$$\boxed{\forall \varphi \in E^*, \;\; \varphi = \sum_{i=1}^{n} < e_i, \varphi > e_i^*}$$

**Preuve**

**i)** *Soit* $x \in E$ *avec* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, *alors pour tout* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *on a*

$$< x, e_j^* >= \sum_{i=1}^{n} x_i < e_i, e_j^* >= x_j \quad (car \;\; < e_i, e_j^* >= \delta_{ij})$$

**ii)** *Soit* $\varphi \in E^*$ *avec* $\varphi = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^*$, *alors pour tout* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *on a*

$$< e_j, \varphi >= \sum_{i=1}^{n} y_i < e_j, e_i^* >= y_j \quad (car \;\; < e_i, e_j^* >= \delta_{ij})$$

**Exemples 3.2**

1. *Soient $K$ un corps commutatif et $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $K^n$. Alors la base duale $\beta^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est définie par*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\},\ \forall x \in K^n,\ \ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Longrightarrow e_i^*(x) = x_i$$

*Donc pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $e_i^*$ est la $i^{\text{ième}}$ projection de $K^n$ sur $K$.*

2. *Soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose $e_i^* = dx_i$, donc $dx_i$ est la $i^{\text{ième}}$ projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ :*

$$\forall x \in K^n,\ \ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Longrightarrow dx_i(x) = x_i$$

*Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable au point $x_0 \in \Omega$. Alors on sait que la différentielle $f'(x_0)$ au point $x_0$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et on a*

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ \ f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)(h) + o(\|h\|)$$

*D'après la proposition précédente, on a*

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} < e_i, f'(x_0) > dx_i$$

*Or, on sait que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ f(x_0 + te_i) - f(x_0) = t < e_i, f'(x_0) > +to(1)$$

*Donc*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} =< e_i, f'(x_0) > +o(1)$$

*Ainsi, on aura*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} =< e_i, f'(x_0) >$$

*On sait que la $i^{\text{ième}}$ dérivée partielle au point $x_0$ est définie par*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

*Ainsi, on retrouve l'écriture canonique de $f'(x_0)$,*

$$\boxed{f'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) dx_i}$$

3. *Soient $K$ un corps commutatif et $\beta = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $K_n[X]$. Alors la base duale $\beta^* = (e_0^*, e_1^*, \dots, e_n^*)$ est définie par,*

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\},\ \forall P \in K_n[X],\ \ P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k \Longrightarrow e_i^*(P) = a_i$$

*Pour chaque $a \in K$, soit $\varphi_a$ la forme linéaire définie sur $K_n[X]$ par,*

$$\forall P \in K_n[X],\ \ \varphi_a(P) = P(a)$$

*Alors, d'après la proposition précédente, on a*

$$\varphi_a = \sum_{i=0}^{n} < X^i, \varphi_a > e_i^* = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i^*$$

**Proposition 3.10.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. Soit $u$ un endomorphisme de $E$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de $u$ par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors

$$\boxed{\forall (i,j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \ \ a_{ij} =< u(e_j), e_i^* >}$$

**Preuve**
*D'après la proposition précédente, on a*

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \ \ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} < u(e_j), e_i^* > e_i$$

*Donc, si* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *la matrice de* $u$ *par rapport à la base* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$*, alors*

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \ \ a_{ij} =< u(e_j), e_i^* >$$

**Proposition 3.11.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. pour chaque $(i,j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on désigne par $e_i \otimes e_j^*$ l'endomorphisme de $E$ défini par,

$$\forall x \in E, \ \ (e_i \otimes e_j^*)(x) =< x, e_j^* > e_i$$

Alors $\mathcal{A} = \{e_i \otimes e_j^* \ : \ (i,j)) \in \{1, 2, \dots, n\}^2\}$ forme une base de $L(E)$ et on a

$$\forall (i,j)) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \ \ Mat(e_i \otimes e_j^*, (e_1, e_2, \dots, e_n)) = E_{ij}$$

où les $E_{ij}$ sont les matrices élémentaires de $M_n(K)$.

**Preuve**
*Puisque* $\dim(L(E)) = n^2$*, alors il suffit de montrer que* $\mathcal{A}$ *est une partie génératrice de* $L(E)$*. Pour cela, soit* $u \in L(E)$ *et soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *la matrice de* $u$ *par rapport à la base* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$*. Pour* $x$ *élément quelconque de* $E$*, on sait que*

$$x = \sum_{j=1}^{n} < x, e_j^* > e_j$$

*Donc, on aura*

$$\begin{aligned}
x = \sum_{j=1}^{n} < x, e_j^* > e_j &\Longrightarrow u(x) = \sum_{j=1}^{n} < x, e_j^* > u(e_j) \\
&\Longrightarrow u(x) = \sum_{j=1}^{n} < x, e_j^* > \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i\right) \\
&\Longrightarrow u(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < x, e_j^* > e_i \\
&\Longrightarrow u(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (e_i \otimes e_j^*)(x) \quad \textit{(ceci pour tout } x \in E\textit{)} \\
&\Longrightarrow u = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_i \otimes e_j^*
\end{aligned}$$

*Ainsi, $\mathcal{A}$ est une partie génératrice de $L(E)$.*
*Soit $M = (m_{kl})_{1\leq k,l\leq n}$ la matrice de $e_i \otimes e_j^*$ par rapport à la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, alors, d'après la proposition préédente, on a*

$$\forall (k,l)) \in \{1,2,\ldots,n\}^2, \;\; m_{kl} =< (e_i \otimes e_j^*)(e_l), e_k^* >=< e_l, e_j^* >< e_i, e_k^* >$$

*Donc on voit que*

$$m_{kl} = \begin{cases} 1 & si\ k = i\ \ et\ l = j \\ 0 & si\ k \neq i\ \ ou\ l \neq j \end{cases}$$

*Donc $M = E_{ij}$.*

## 3.12 Base préduale

**Lemme 3.13.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\gamma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ deux bases de $E$, $\beta^* = (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ et $\gamma^* = (v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*)$ leurs bases duales.
Soit $P$ la matrice de passage de $\beta$ à $\gamma$ et $Q$ celle de $\beta^*$ à $\gamma^*$. Alors

$$\boxed{Q = {}^t(P^{-1}) = ({}^tP)^{-1}}$$

**Preuve**
*On pose $P^{-1} = (\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n\alpha}$ et $Q = (q_{ij})_{1\leq i,j\leq n\alpha}$. Alors, d'après la proposition 3.9, on a*

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2, \;\; q_{ij} =< e_i, v_j^* >$$

*D'autre part, on a*

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \;\; e_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} v_k$$

*Ainsi, on aura*

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2, \;\; q_{ij} &=< e_i, v_j^* > \\ &=< \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} v_k, v_j^* > \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} < v_k, v_j^* > \\ &= \alpha_{ji} \end{aligned}$$

**Théorème 3.14.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ une base de $E^*$ et $Q$ la matrice de passage de la base $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ à la base duale $\beta^*$. Alors

**i)** Il existe une unique base $\gamma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $E$, appelée base préduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, telle que $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad v_j^* = \varphi_j$.

**ii)** Si $P$ est la matrice de passage de la base $\beta$ à la base $\gamma$, alors $P = ({}^tQ)^{-1} = {}^t(Q^{-1})$.

**Preuve**

**i)** $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ *est libre, donc d'après la proposition 3.4, on a*

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \ker(\varphi_i) \not\subseteq \ker(\varphi_j)$$

*Donc, pour tout* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*, il existe* $x_j \in E$*, tel que* $x_j \in \bigcap\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \ker(\varphi_i)$ *et* $x_j \notin \ker(\varphi_j)$.

*Pour chaque* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*, soit* $v_j = \dfrac{x_j}{\varphi_j(x_j)}$*, donc on aura*

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = 0 &\Longrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \varphi_i(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j) = 0\\ &\Longrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad a_i = 0 \quad \textit{car } \varphi_i(v_j) = \delta_{ij}\end{aligned}$$

*Donc* $\gamma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *est une base de* $E$ *et on a* $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ v_j^* = \varphi_j$.

**ii)** *Conséquence du lemme précédent.*

## 3.15 Prolongement des formes linéaires

**Théorème 3.16.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors toute forme linéaire sur $F$ se prolonge en une forme linéaire de $E$.

**Preuve**

*Soit* $\psi$ *une forme linéaire sur* $F$ *et soit* $G$ *un supplémentaire de* $F$ *dans* $E$.
*Soit* $\varphi$ *la forme linéaire définie sur* $E$*, par*

$$\begin{aligned}\varphi : E = F \oplus G &\longrightarrow K\\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto \varphi(x) = \psi(x_1)\end{aligned}$$

*Alors* $\varphi$ *est un prolongement de* $\psi$ *à* $E$

**Corollaire 3.17.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque. Alors pour tout $x \in E$, avec $x \neq 0$, il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$, tel que $< x, \varphi >= 1$.

**Preuve**
*Soit* $F = Vect(x)$ *et soit* $\psi$ *la forme linéaire définie sur* $F$ *par,*

$$\forall y \in F, \;\; y = \alpha x \Longrightarrow \psi(y) = \alpha$$

*D'après le théorème précédent,* $\psi$ *se prolonge en une forme linéaire* $\varphi$ *sur* $E$*. Donc on a*

$$\varphi(x) = \psi(x) = 1$$

## 3.18 Orthogonalité

**Définition 3.19.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel.

**i)** Pour toute partie non vide $A$ de $E$, l'orthogonal de $A$, qu'on note $A^{\perp}$, est la partie de $E^*$ définie par

$$\boxed{\forall \varphi \in E^*, \;\; \varphi \in A^{\perp} \Longleftrightarrow \forall x \in A, \; < x, \varphi >= 0}$$

**ii)** Pour toute partie non vide $B$ de $E$, le pré-orthogonal de $B$, qu'on note $B^{\circ}$, est la partie de $E$ définie par

$$\boxed{\forall x \in E, \;\; x \in B^{\circ} \Longleftrightarrow \forall \varphi \in B, \; < x, \varphi >= 0}$$

**Remarques 3.5**

$$A^{\perp} = \{\varphi \in E^* \;\; : \;\; \forall x \in A, \; \varphi(x) = 0\}$$
$$B^{\circ} = \{x \in E \;\; : \;\; \forall \varphi \in B, \; \varphi(x) = 0\}$$

**Proposition 3.20.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel. Alors

**a)** Pour toute partie $A$ de $E$ et Pour toute partie $B$ de $E$, on a

$$A \subseteq B \Longrightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$$

**b)** Pour toute partie $A$ de $E$, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de $E^*$.

**c)** Pour toute partie $A$ de $E$, $A^{\perp} = (Vect(A))^{\perp}$.

**d)** Pour toute partie $B$ de $E^*$, $B^{\circ}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**e)** Pour toute partie $B$ de $E^*$, $B^{\circ} = (Vect(B))^{\circ}$.

**f)** $E^{\perp} = \{0_{E^*}\}$ et $E^{*\circ} = \{0_E\}$

**Preuve**
**a)** *Supposons que* $A \subseteq B$ *et soit* $\varphi \in E^*$*, alors on a*

$$\begin{aligned} \varphi \in B^{\perp} &\Longrightarrow \forall x \in B, \; \varphi(x) = 0 \\ &\Longrightarrow \forall x \in A, \; \varphi(x) = 0 \quad \textit{car } A \subseteq B \\ &\Longrightarrow \varphi \in A^{\perp} \end{aligned}$$

**b)** *Pour chaque $x \in E$, soit $\widetilde{x} : E^* \longrightarrow K$ l'application définie par*

$$\forall \varphi \in E^*, \quad \widetilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$$

*Alors $\widetilde{x}$ est une forme linéaire sur $E^*$ et on a*

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} \ker(\widetilde{x})$$

*Donc $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

**c)** *$A \subseteq Vect(A)$, donc d'après a), $Vect(A)^\perp \subseteq A^\perp$.*
*Soit $\varphi \in A^\perp$ et soit $x \in Vect(A)$ avec $x = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$, où $x_i \in A$, alors on a $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi(x_i) = 0$. Donc $\varphi \in (Vect(A)^\perp$.*

**d)** *On remarque que si $B$ est une partie de $E^*$, alors*

$$B^\circ = \bigcap_{\varphi \in B} \ker(\varphi)$$

*Donc $B^\circ$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

**e)** *Se démontre de la même manière que c).*

**f)** *Si $\varphi \in E^\perp$, alors $\forall x \in E$, $\varphi(x) = 0$, donc $\varphi = 0$.*
*Supposons, par absurde que $E^{*\circ} \neq \{0_E\}$, donc il existe $x \neq 0$, tel que*

$$\forall \varphi \in E^*, \ \varphi(x) = 0$$

*ce qui est absurde, car on sait que si $x \neq 0$, alors il existe $\varphi \in E^*$, telle que $\varphi(x) = 1$.*

**Proposition 3.21.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors

**i)** $F^*$ est canoniquement isomorphe à $E^*/F^\perp$.

**ii)** $(E/F)^*$ est canoniquement isomorphe à $F^\perp$.

**Preuve**

**i)** *Soit $\Phi : E^* \longrightarrow F^*$ l'application qui à chaque $\varphi \in E^*$ fait correspondre sa réstriction à $F$.*
*Alors $\Phi$ est linéaire et d'après le théorème de prolongement, $\Phi$ est surjective.*

$$\begin{aligned} \varphi \in \ker(\Phi) &\Longleftrightarrow \forall x \in F, \ \varphi(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \varphi \in F^\perp \end{aligned}$$

*Donc, $\ker(\Phi) = F^\perp$. On sait que $E^*/\ker(\Phi)$ est isomorphe à $Im(\Phi)$, d'où le résultat.*

**ii)** *Soit $s : E \longrightarrow E/F$ la surjection canonique et soit $\Psi : (E/F)^* \longrightarrow E^*$ l'application définie par*

$$\forall \varphi \in (E/F)^*, \quad \Psi(\varphi) = \varphi \circ s$$

*Alors, il est clair que $\Psi$ est linéaire et que $\Psi$ est injective.*
*Pour conclure, montrons que $Im(\Psi) = F^{\perp}$.*

$$\begin{aligned} \psi \in Im(\Psi) &\Longrightarrow \exists \varphi \in (E/F)^* \;:\; \psi = \varphi \circ s \\ &\Longrightarrow \forall x \in F,\;\; \psi(x) = \varphi(s(x)) = 0 \quad car\ \forall x \in F,\; s(x) = 0 \\ &\Longrightarrow \psi \in F^{\perp} \end{aligned}$$

*Réciproquement, soit $\psi \in F^{\perp}$ et soit $\varphi : (E/F) \longrightarrow K$ définie par*

$$\forall x \in E,\;\; \varphi(s(x)) = \psi(x)$$

*Alors $\varphi$ est bien définie, car si $s(x) = s(y)$, alors $x - y \in F$, donc $\psi(x-y) = 0$ et par suite, $\psi(x) = \psi(y)$, donc $\varphi(s(x)) = \varphi(s(y))$.*
*Ainsi, $\varphi \in (E/F)^*$ et on a $\psi = \varphi \circ s$.*
*Donc $\psi \in Im(\Psi)$ et par suite, $(E/F)^*$ est isomorphe à $F^{\perp}$.*

**Corollaire 3.22.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie. Alors pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$, on a

$$\boxed{\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E)}$$

**Preuve**
*Conséquence directe du théorème précédent.*

**Lemme 3.23.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $x \in E$ avec $x \notin F$. Aloes, il existe une forme linéaire $\varphi$ sur $E$, telle que

$$< x, \varphi >= 1 \;\text{ et }\; \forall y \in F,\; < y, \varphi >= 0$$

**Preuve**
*Soit $G$ un supplémentaire de $Vect(x) + F$ dans $E$ et soit $H = F + G$, alors $E = Vect(x) \oplus H$ et $F \subseteq H$. Soit $\varphi$ la forme linéaire définie par*

$$\begin{aligned} \varphi : E = Vect(x) \oplus H &\longrightarrow K \\ z = \alpha x + y &\longmapsto \varphi(x) = \alpha \end{aligned}$$

*Alors $\varphi(x) = 1$ et $\forall y \in F,\; \varphi(y) = 0$.*

**Théorème 3.24.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel. Alors,

**i)** Pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$, on a

$$\boxed{(F^{\perp})^{\circ} = F}$$

**ii)** Si $E$ est de **dimension finie**, alors pour tout sous-espace vectoriel $G$ de $E$, on a

$$\boxed{(G^{\circ})^{\perp} = G}$$

**Preuve**

**i)** *Par définition de l'orthogonalité, on voit facilement que* $F \subseteq (F^{\perp})^{\circ}$*, donc il suffit de montrer que* $(F^{\perp})^{\circ} \subseteq F$.

*Pour cela, supposons, par absurde, qu'il existe* $x \in E$*, tel que* $x \in (F^{\perp})^{\circ}$ *et* $x \notin F$*. Donc d'après le lemme précédent, il existe* $\varphi \in E^*$*, telle que* $\varphi(x) = 1$ *et* $\forall y \in F,\ \varphi(y) = 0$.

*Ainsi,* $\varphi \in F^{\perp}$ *et puisque* $x \in (F^{\perp})^{\circ}$*, alors, par définition de l'orthogonal, on a* $\varphi(x) = 0$*, ce qui est absurde, car* $\varphi(x) = 1$.

**ii)** *On voit facilement que* $G \subseteq (G^{\circ})^{\perp}$*, donc il suffit de montrer que* $(G^{\circ})^{\perp} \subseteq G$.

*Pour cela, nous allons utiliser le fait que* $G$ *est de dimension finie, donc il existe* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$*, tels que* $G = Vect(\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\})$.

*Soit, maintenant,* $\varphi \in (G^{\circ})^{\perp}$ *et soit* $x \in E$*, tel que*

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \cdots = \varphi_m(x) = 0$$

*Puisque* $G = Vect(\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\})$*, alors* $\forall \psi \in G, \quad \psi(x) = 0$*, par suite* $x \in G^{\circ}$ *et puisque* $\varphi \in (G^{\circ})^{\perp}$*, alors* $\varphi(x) = 0$*. Ainsi, nous avons montré que* $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi)$*, donc d'après la proposition 3.4,* $\varphi \in Vect(\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\})$.

**Corollaire 3.25.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $F$ un sous-espace vectoriel de codimension $p$, $p = \dim(E) - \dim(F)$, alors il existe $p$ formes linéaires, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, linéairement indépendantes, telles que

$$\boxed{F = \bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i)}$$

**Preuve**

*$F$ est de codimension $p$, donc* $\dim(F^{\perp}) = p$*. Soit* $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ *une base de* $F^{\perp}$*, alors on aura,*

$$(F^{\perp})^{\circ} = Vect(\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p\})^{\circ} = \bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i)$$

*D'aute part, d'après le théorème précédent, on a* $(F^{\perp})^{\circ} = F$*. D'où le résultat.*

**Remarques 3.6**

*Soient $E$ un $K$-espace vectorie de dimension finie $= n$,* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *une base de $E$, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de codimension $p$ et* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ *les formes linéaires linéairement indépendantes, telles que* $F = \bigcap\limits_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i)$.

*Pour chaque* $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ *et chaque* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*, on pose* $a_{ij} = \varphi_i(e_j)$*, alors*

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \Longrightarrow \varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

*Donc* $x \in F$*, si et seulement si, les composantes,* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, de $x$ dans la base* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$*, vérifient le système $(S)$ suivant, de $p$ équations à $n$ inconnues,*

$$(S) \ : \ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

*Ce système qui est de rang $p$, car $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ est de rang $p$, s'appelle une représentation cartésienne du sous-espace vectoriel $F$.*

**Exemples 3.3**
*$E$ un $K$-espace vectorie de dimension finie $= n$.*

1. *Une droite vectorielle de $E$ possède une représentation cartésienne sous forme d'un système de rang $n-1$ et de $n-1$ équations.*
2. *Un hyperplan de $E$ possède une représentation cartésienne sous-forme d'une seule équation sous la forme :*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \quad \textit{avec} \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

## 3.26 Bidual

**Définition 3.27.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel, on appelle **bidual** de $E$, qu'on note $E^{**}$, le dual de $E^*$.

$$\boxed{E^{**} = (E^*)^* = L(E^*, K)}$$

**Remarques 3.7**
*Considèrons l'application $j : E \longrightarrow E^{**}$ définie par,*

$$\forall x \in E, \ \forall \varphi \in E^*, \ \ < \varphi, j(x) >=< x, \varphi >$$

*Alors, il est facile de voir que $j$ est linéaire injective. Donc $E$ s'identifie canoniquement à un sous-espace vectoriel de $E^{**}$.*
*En particulier, si $E$ est de dimension finie, alors $j$ est un isomorphisme, donc, dans ce cas, $E$ s'identifie canoniquement à $E^{**}$.*

**Proposition 3.28.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $j : E \longrightarrow E^{**}$ l'isomorphisme canonique entre $E$ et $E^{**}$. Alors

**i)** Pour toute base $\beta$ de $E$, on a $j(\beta) = \beta^{**}$, où $\beta^{**} = (\beta^*)^*$ est la base duale de $\beta^*$ dans $E^{**}$.

**ii)** Si $\gamma$ est une base de $E^*$, $\gamma^*$ sa base duale dans $E^{**}$ et $\beta$ est sa base préduale dans $E$, alors

$$\beta = j^{-1}(\gamma^*)$$

**Preuve**
**i)** *Soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $E$, alors on a*

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \ \forall l \in \{1, 2, \dots, n\}, \ \ < e_l^*, j(e_k) >=< e_k, e_l^* >= \delta_{kl}$$

*Donc $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j(e_k) = (e_l^*)^*$.*

**ii)** *Puisque $\beta^* = \gamma$, alors, d'après i), $j(\beta) = \gamma^*$, donc $\beta = j^{-1}(\gamma^*)$.*

## 3.29 Transposée d'une application linéaire

**Définition 3.30.**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle **application transposée** de $f$, qu'on note ${}^tf$, l'application linéaire de $F^*$ dans $E^*$ définie par,

$$\forall \varphi \in F^*, \ \ {}^tf(\varphi) = \varphi \circ f$$

**Remarques 3.8**
*Par définition de l'application transposée d'une application linéaire $f$, on a*

$$\boxed{\forall x \in E, \ \forall \varphi \in F^*, \ \ < x, {}^tf(\varphi) >=< f(x), \varphi >}$$

*De plus, ${}^tf$ est l'unique application linéaire de $F^*$ vers $E^*$ vérifiant cette relation.*
*En effet, soit $g : F^* \longrightarrow E^*$ une application linéaire telle que*

$$\forall x \in E, \ \forall \varphi \in F^*, \ \ < x, g(\varphi) >=< f(x), \varphi >$$

*Alors, il est clair que $\forall \varphi \in F^*, \ g(\varphi) = \varphi \circ f$, donc $g = {}^tf$.*

**Proposition 3.31.**

Soient $E$, $F$ et $G$ trois $K$-espaces vectoriels. Alors

a) $\forall f \in L(E,F), \ \forall g \in L(E,F), \ \ {}^t(f+g) = {}^tf + {}^tg$.
b) $\forall \lambda \in K, \ \forall f \in L(E,F), \ \ {}^t(\lambda f) = \lambda\, {}^tf$.
c) $\forall f \in L(E,F), \ \forall g \in L(F,G), \ \ {}^t(g \circ f) = {}^tf \circ {}^tg$.

**Preuve**

*a)*

$$\forall \varphi \in F^*, \ \ {}^t(f+g)(\varphi) = \varphi \circ (f+g) = \varphi \circ f + \varphi \circ g = {}^tf(\varphi) + {}^tg(\varphi)$$

*Donc* ${}^t(f+g) = {}^tf + {}^tg$.

*b)*

$$\forall \varphi \in F^*, \ \ {}^t(\lambda f)(\varphi) = \varphi \circ (\lambda f) = \lambda(\varphi \circ f) = \lambda\, {}^tf(\varphi)$$

*Donc* ${}^t(\lambda f) = \lambda\, {}^tf$.

*c)*

$$\forall \varphi \in G^*, \ \ {}^t(g \circ f)(\varphi) = \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = {}^tg(\varphi) \circ f = {}^tf({}^tg(\varphi)) = ({}^tf \circ {}^tg)(\varphi)$$

*Donc* ${}^t(g \circ f) = {}^tf \circ {}^tg$.

**Théorème 3.32.**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors,

**i)** $\ker({}^tf) = (Im(f))^{\perp}$.

**ii)** $Im({}^tf) = (\ker(f))^{\perp}$.

**Preuve**
**i)**

$$\begin{aligned}\varphi \in \ker({}^t f) &\iff {}^t f(\varphi) = 0 \\ &\iff \varphi \circ f = 0 \\ &\iff \forall x \in E,\ < f(x), \varphi >= 0 \\ &\iff \varphi \in (Im(f))^{\perp}\end{aligned}$$

**ii)** *Soit $\psi \in Im({}^t f)$, alors il existe $\varphi \in F^*$, telle que $\psi = {}^t f(\varphi)$, donc on aura,*

$$\forall x \in \ker(f),\ < x, \psi >=< x, {}^t f(\varphi) >=< f(x), \varphi >= 0$$

*donc $\psi \in (\ker(f))^{\perp}$, par suite, $Im({}^t f) \subseteq (\ker(f))^{\perp}$.*
*Réciproquement, soit $\psi \in (\ker(f))^{\perp}$ et soit $G$ un supplémentaire de $Im(f)$ dans $F$.*
*Soit $\varphi : F \longrightarrow K$ la correspondance définie par,*

$$\begin{aligned}\varphi : F = Im(f) \oplus G &\longrightarrow K \\ y = f(x) + z &\longmapsto \psi(x)\end{aligned}$$

*Alors $\psi$ définit bien une application, car si $y = f(x) + z = f(x') + z$, alors $x - x' \in \ker(f)$, donc $\psi(x - x') = 0$ et ainsi $\psi(x) = \psi(x')$, et on a*

$$\forall x \in E,\ \varphi(f(x)) = \psi(x)$$

*Donc $\psi = \varphi \circ f = {}^t f(\varphi)$.*

**Théorème 3.33.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $\beta^*$ sa base duale. Alors pour tout endomorphisme $u$ de $E$, on a

$$\boxed{Mat({}^t u, \beta^*) = {}^t Mat(u, \beta)}$$

**Preuve**
*Soient $A = Mat(u, \beta)$ et $B = Mat({}^t u, \beta^*)$ avec $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, alors on sait que*

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2,\ \ a_{ij} =< u(e_j), e_i^* >$$

*D'autre part, on a*

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\},\ \ {}^t u(e_j^*) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} e_k^*$$

*Donc,*

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2,\ \ a_{ji} =< u(e_i), e_j^* >=< e_i, {}^t u(e_j^*) >= \sum_{k=1}^{n} b_{kj} < e_i, e_k^* >= b_{ij}$$

*Donc $B = {}^t A$.*

**Proposition 3.34** (Dualité et stabilité).

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $u$ un endomorphisme de $E$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors,

$$\boxed{F \text{ est stable par } u \Longleftrightarrow F^{\perp} \text{ est stable par } {}^t u}$$

**Preuve**

($\Longrightarrow$) *Supposons que $F$ est stable par $u$. Alors pour $\varphi \in F^{\perp}$, on a*

$$\forall x \in F, \; < x, {}^t u(\varphi) >=< u(x), \varphi >= 0 \quad (\textit{car } u(x) \in F \textit{ et } \varphi \in F^{\perp})$$

*Donc ${}^t u(\varphi) \in F^{\perp}$ et par suite, $F^{\perp}$ est stable par ${}^t u$.*

($\Longleftarrow$) *Supposons que $F^{\perp}$ est stable par ${}^t u$. Alors pour $x \in F$, on a*

$$\begin{aligned} x \in F &\Longrightarrow \forall \varphi \in F^{\perp}, \; < x, {}^t u(\varphi) >= 0 \quad (\textit{car } {}^t u(\varphi) \in F^{\perp}) \\ &\Longrightarrow \forall \varphi \in F^{\perp}, \; < u(x), \varphi >= 0 \\ &\Longrightarrow u(x) \in (F^{\perp})^{\circ} \\ &\Longrightarrow u(x) \in F \quad (\textit{car, d'après le théorème 3.24, } (F^{\perp})^{\circ}) \end{aligned}$$

*Donc $F$ est stable par $u$.*

## 3.35 Exercices

**Exercice 3.1**

Pour chaque entier $n \geq 1$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$. Soit $\varphi$ l'application définie par,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \textstyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que $\varphi$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Pour chaque $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, soit $\varphi_i$ l'application définie par,

$$\begin{aligned} \varphi_i : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto P(\tfrac{i}{n}) \end{aligned}$$

   Montrer que $\forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $\varphi_i$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et que $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $(\mathbb{R}[X])^*$.
4. En déduire qu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$, tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} a_i P(\frac{i}{n})$$

**Exercice 3.2**

$E = \mathbb{R}_3[X]$ est muni de sa base canonique $(e_0, e_1, e_2, e_3)$, où $e_0 = 1$, $e_1 = X$, $e_2 = X^2$ et $e_3 = X^3$. Soit $F$ la partie de $E$ définie par,

$$P \in F \Longleftrightarrow P(1) = 0 \;\text{ et }\; P''(0) = 0$$

**a)** Vérifier que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et déterminer une base de $F$.

**b)** Quelle est la dimension de $F$ ?

**c)** Montrer que
$$\forall \varphi \in E^*,\;\; \varphi \in F^{\perp} \Longleftrightarrow \varphi(e_0) = \varphi(e_1) = \varphi(e_3)$$

**d)** Soient $\varphi_0$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ et $\varphi_3$ les formes linéaires définies sur $E$ par,

$$\begin{cases} \varphi_0 = e_2^* \\ \varphi_1 = e_0^* + e_1^* + e_3^* \\ \varphi_2 = e_1^* - e_2^* \\ \varphi_3 = e_2^* - e_3^* \end{cases}$$

Vérifier que $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $E^*$ et déterminer sa base préduale $(v_0, v_1, v_2, v_3)$.

**Exercice 3.3**
On considère les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ définies sur $\mathbb{R}_3[X]$ par,

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\;\; \varphi_1(P) = P(0),\;\; \varphi_2(P) = P(1),\;\; \varphi_3(P) = P'(0) \;\text{ et }\; \varphi_4(P) = P'(1)$$

où $P'$ désigne le polynôme dérivé de $P$.

**a)** Montrer que $\gamma = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de $(\mathbb{R}_3[X])^*$.

**b)** Déterminer la base préduale $\beta$ de $\gamma$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

**c)** Soit $\varphi$ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par,

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\;\; \varphi(P) = \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$$

Déterminer les composantes de $\varphi$ dans la base $\gamma$.

**Exercice 3.4**
On désigne par $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$. Rappelons que

$$e_0 = 1,\; e_1 = X \text{ et } e_2 = X^2$$

a) Déterminer $(e_0^*, e_1^*, e_2^*)$ la base duale de $(e_0, e_1, e_2)$.

b) Soient $a$, $b$ et $c$ trois points deux à deux distincts de $\mathbb{C}$. On pose

$$P_1 = (X-b)(X-c),\;\; P_2 = (X-a)(X-c) \;\text{ et }\; P_3 = (X-a)(X-b)$$

Montrer $(P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$ et trouver les coordonnées d'un polynôme $P$ dans cette base.

c) Déterminer la base duale $(P_1^*, P_2^*, P_3^*)$ de $(P_1, P_2, P_3)$.

d) Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$ défini par ;

$$\forall P \in \mathbb{C}_2[X],\;\; u(P) = XP' + P$$

Déterminer ${}^t u$.

**Exercice 3.5**
Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Dans chacun des cas suivants, montrer que $\beta = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est une base de $E^*$ et déterminer sa base préduale :

a)
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \forall P \in E,\ \varphi_i(P) = P(x_i)$$
$x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

b)
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \forall P \in E,\ \varphi_i(P) = P^{(i)}(0)$$

c)
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \forall P \in E,\ \varphi_i(P) = P^{(i)}(x_i)$$
$x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

**Exercice 3.6**
$E = \mathbb{K}_n[X]$ et $\varphi$ une forme linéaire sur $E$.

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{K}$, tel que
$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \ \varphi((X-a)P) = 0$$
Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$, tel que $\forall P \in E,\ \ \varphi(P) = \alpha P(a)$.
2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{K}$, tel que
$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \ \varphi((X-a)^2 P) = 0$$
Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, tels que $\ \forall P \in E,\ \ \varphi(P) = \alpha P(a) + \beta P'(a)$.

**Exercice 3.7**
Soient $K$ un corps commutatif et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, $n \geq 2$, les formes linéaires de $K^n$ définies par :
$$\forall x \in K^n,\ \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \Longrightarrow \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\},\ \varphi_i(x) = x_i + x_{i+1} \\ \varphi_n(x) = x_1 + x_n \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de $n$, $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ forme une base de $(K^n)^*$ ?
2. Dans le cas où $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ forme une base de $(K^n)^*$, déterminer sa base préduale.

**Exercice 3.8**
Pour chaque $a\mathbb{R}$, on considère la forme linéaire $\varphi_a$ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$, par :
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \ \varphi_a(P) = P(a)$$

1. Montrer que $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$ est une base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.
2. En déduire qu'il existe des constantes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ ; tels que,
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \ \int_{-1}^{1} P(t)dt = \alpha P(-1) + \beta P(0) + \gamma P(1) \quad \text{(Formule des trois niveaux)}$$
3. Déterminer la base préduale de $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$.
4. Calculer les constantes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.

**Exercice 3.9**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $\varphi$ et $\psi$ deux formes linéaires non nulles sur $E$. Montrer qu'il existe $x \in E$, tel que $\varphi(x)\psi(x) \neq 0$.

**Exercice 3.10**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ un système de vecteurs de $E$, tels que,

$$\forall \varphi \in E^*, \quad \varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \cdots = \varphi(e_n) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0$$

Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $E$.

**Exercice 3.11**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur $E$.
On suppose qu'il existe $x \in E$, tel que $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0$.
Montrer que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est liée.

**Exercice 3.12**
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie. Montrer que si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont des formes linéaires sur $E$, alors

i) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \neq \{0\}$.

ii) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i)$ est de codimension finie.

**Exercice 3.13**
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et $p$ un entier $\geq 1$. On suppose qu'il existe $p$ formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, telles que

$$\forall x \in E, \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \cdots = \varphi_p(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Montrer que $E$ est de dimension finie $\leq p$.

**Exercice 3.14**
Soient $\beta_1$ et $\beta_2$ deux bases d'un $K$-espace vectoriel $E$ et soit $P$ la matrice de passage de $\beta_1$ à $\beta_2$. Déterminer la matrice de passage $Q$ de $\beta_1^*$ à $\beta_2^*$.

**Exercice 3.15**
Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels, $V$ un sous-espace de $E$ et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que

$$f(V)^{\perp} = ({}^t f)^{-1}(V^{\perp})$$

**Exercice 3.16**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $F$ et $G$ deux sous-espace vectoriels de $E$, tels que $E = F \oplus G$.
Montrer que

$$E^* = F^{\perp} \oplus G^{\perp}$$

# 4 Formes multilinéaires – Déterminants

## 4.1 Formes multilinéaires

### 4.1.1 Définitions et propriètés de base

**Définition 4.2.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque et $p$ un entier $\geq 1$, une forme $p$-linéaire sur $E$ est une application,

$$\begin{aligned} f : E^p &\longrightarrow K \\ (x_1, x_2, \ldots, x_p) &\longmapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_p) \end{aligned}$$

telle que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, l'application $f_i : E \longrightarrow K$ défnie par

$$\forall x \in E, \; f_i(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

soit une forme linéaire sur $E$.

**Remarques 4.1**

1. *Soit $f$ une forme $p$-linéaire sur $E$. On suppose qu'il existe $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, tel que $x_i = 0$, alors $f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$.*
2. *Une forme $1$-linéaire sur $E$ est tout simplement une forme linéaire sur $E$.*
3. *Une forme $2$-linéaire sur $E$ s'appelle une forme bilinéaire sur $E$.*
4. *Si on note $L_p(E)$ l'ensemble de toutes les formes $p$-linéaire sur $E$, alors $L_p(E)$ est un $K$-espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les applications de $E^p$ vers $K$.*

**Notations**

*Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ et on note $\mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)$ l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}_p$ vers $\mathbb{N}_n$.*
*On rappelle que toute application de $\mathbb{N}_p$ vers $\mathbb{N}_n$ est déterminé par un unique $p$-uplet de $\mathbb{N}_n^p$, autrement dit, l'application suivante :*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n) &\longrightarrow \mathbb{N}_n^p \\ \varphi &\longmapsto (\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(p)) \end{aligned}$$

*est une bijection.*
*Rappelons aussi, qu'on appelle permutation toute bijection de $\mathbb{N}_n$ vers $\mathbb{N}_n$, que l'ensemble de toutes les permutations de $\mathbb{N}_n$ vers $\mathbb{N}_n$ se note $S_n$ et que $S_n$ muni de la composition des applications est un groupe, appelé groupe symétrique.*

**Règles de calcul**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$, $p$ un entier $\geq 1$ et $f : E^p \longrightarrow K$ une forme $p$-linéaire.

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ un élément de $E^p$, tel que,

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, p\}, \ \ x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

Donc on aura,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f\left( \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2} e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_p=1}^{n} a_{i_p n} e_{i_p} \right) \\ &= \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_p) \in \mathbb{N}_n^p} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}) \end{aligned}$$

Pour chaque $(i_1, i_2, \ldots, i_p) \in \mathbb{N}_n^p$, soit $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)$ définie par :

$$\varphi(1) = i_1, \ \varphi(2) = i_2, \ \ldots, \ \varphi(p) = i_p$$

alors on aura,

$$\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)} a_{\varphi(1),1} a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(p),p} f(e_{\varphi(1)}, e_{\varphi(2)}, \ldots, e_{\varphi(p)})}$$

### 4.2.1 Formes multilinéaires alternées

**Définition 4.3.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $p$ un entier $n \geq 1$ et $f : E^p \longrightarrow K$ une forme $p$-linéaire sur $E$.

i) On dit que $f$ est **symétrique** si pour tout $\sigma \in S_p$, on a

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E^p, \ \ f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

ii) On dit que $f$ est **antisymétrique** si pour tout $\sigma \in S_p$, on a

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E^p, \ \ f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

iii) On dit que $f$ est **alterné** si pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E^p$, on a

$$\forall i \in \mathbb{N}_p, \ \forall j \in \mathbb{N}_p, \ \ [i \neq j \text{ et } x_i = x_j] \Longrightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$$

**Remarques 4.2**

*Soit $f$ une forme bilinéaire sur $E$, alors*

*i) $f$ est symétrique, si, et seulement si,*

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \ f(x, y) = f(y, x)$$

*ii) $f$ est anfisymétrique, si, et seulement si,*

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \ f(x, y) = -f(y, x)$$

*iii) $f$ est alternée, si, et seulement si,*

$$\forall x \in E, \ \ f(x, x) = 0$$

**Théorème 4.4.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, où $K$ est un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$, et $f$ une forme $p$-linéaire sur $E$. Alors $f$ est antisymétrique, si, et seulement si, $f$ est alternée.

**Preuve**

*($\Longrightarrow$) Supposons que $f$ est antisymétrique.*
*Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E^p$, tel qu'il existe $i \in \mathbb{N}_p$ et $j \in \mathbb{N}_p$ avec $i \neq j$ et $x_i = x_j$. Montrons que $f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$.*
*Comme $i \neq j$, alors on peut supposer que $i < j$. Soit $\tau$ la transposition qui échange $i$ et $j$, rappelons que $\tau$ est la permutation de $\mathbb{N}_p$ définie par :*

$$\tau(i) = j, \ \tau(j) = i \ \text{ et } \ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{i, j\}, \ \ \tau(k) = k$$

*Puisque $f$ est antisymétrique, alors on aura,*

$$\begin{aligned} f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(i)}, \ldots, x_{\tau(j)}, \ldots, x_{\tau(p)}) &= \varepsilon(\tau) f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\ &= -f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\ &\qquad \text{(car } \varepsilon(\tau) = -1\text{)} \end{aligned}$$

*D'autere part, puisque $x_i = x_j$, alors, on aura*

$$\begin{aligned} f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(i)}, \ldots, x_{\tau(j)}, \ldots, x_{\tau(p)}) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \\ &= f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

*Donc on constate que*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$$

*Par suite,*

$$2_K f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = 0_K$$

*Puisque $K$ est de caractéristique $\neq 2$, alors $2_K \neq 0_K$,*
*donc $f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = 0$. Ainsi, $f$ est alternée.*

*($\Longleftarrow$) Supposons que $f$ est alternée et montrons que $f$ est antisymétrique.*
*Puisque $S_p$ est engendré par les transpositions, alors il suffit de montrer que pour toute transposition $\tau$ de $S_p$, on a*

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E^p, \ \ f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(p)}) = -f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

*Soit $\tau = (i, j)$ une transposition de $S_p$, avec $i < j$. Puisque $f$ est alternée, alors on a*

$$f(x_1, x_2, \ldots, \overbrace{x_i + x_j}^{i}, \ldots, \overbrace{x_i + x_j}^{j}, \ldots, x_n) = 0$$

*D'autre part, puisque $f$ est $p$-linéaire et $f$ alternée, alors on aura,*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, \overbrace{x_i + x_j}^{i}, \ldots, \overbrace{x_i + x_j}^{j}, \ldots, x_n) = \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\ + f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

*Donc* $f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$

*Donc $f$ est alternée.*

**Remarques 4.3**

1. *Si $K$ est un corps de caractéristique $= 2$, alors toute forme alternée sur $E$ est antisymétrique, cepandant, la réciproque n'est pas toujours vraie.*
   *Par exemple, si on prend $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $E = K^n$ et $f$ la forme bilinéaire définie par :*

$$\text{Si } \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ \text{ et } \ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \ \text{ alors } \ f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

   *alors $f$ est à la fois symétrique et antisymétrique, mais $f$ n'est pas alternée.*
2. *Si on note $\mathcal{A}_p(E)$ l'ensemble de toutes les formes $p$-linéaire alternées sur $E$, alors $\mathcal{A}_p(E)$ est un $K$-espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de $L_p(E)$.*

**Théorème 4.5.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $\Delta : E^n \longrightarrow K$ l'application définie par

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n, \ \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

alors on a

i) Pour tout entier $p > n$, $\mathcal{A}_p(E) = \{0\}$.
ii) $\mathcal{A}_n(E)$ est de dimension 1 et on a

$$\forall f \in \mathcal{A}_n(E), \ f = f(e_1, e_2, \ldots, e_n)\Delta$$

**Preuve**

*i) Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et soit $f$ une forme $p$-linéaire sur $E$, avec $p > n$.*
*Montrons que $f$ est nulle. Pour cela, soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^p$, tel que*

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, p\}, \ \ x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_j$$

*Alors, on sait que*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)} a_{\varphi(1),1} a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(p),p} f(e_{\varphi(1)}, e_{\varphi(2)}, \ldots, e_{\varphi(p)})$$

*Puisque $p > n$, alors tout $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)$ est non injective.*
*Donc pour tout $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)$, il existe $i \in \mathbb{N}_p$ et il existe $j \in \mathbb{N}_p$, tels que*

$$i \neq j \ \ \text{et} \ \ \varphi(i) = \varphi(j)$$

*$f$ étant alternée, donc $f(e_{\varphi(1)}, e_{\varphi(2)}, \ldots, e_{\varphi(p)}) = 0$, ceci pour tout $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)$, par suite, $f$ est nulle.*

*ii) Supposons, maintenant, que $p = n$, alors $\mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n) = \mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n)$.*
*Donc pour $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, on aura*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n)} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$$

*Appliquons le fait que $\sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n)$ est bijective, si et seulement si, $\sigma$ est injective. Ainsi, si $\sigma \notin S_n$, alors $\sigma$ n'est pas injective, donc, il existe $i \in \mathbb{N}_p$ et il existe $j \in \mathbb{N}_p$, tels que*

$$i \neq j \quad et \quad \varphi(i) = \varphi(j)$$

*Puisque $f$ est alternée, alors*

$$\forall \sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n), \quad \sigma \notin S_n \Longrightarrow f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = 0$$

*Par suite, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, on aura*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$$

*Puisque $f$ est alternée, alors $f$ est antisymétrique, donc*

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n, \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

*Posons $\alpha = f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et soit $\Delta : E^n \longrightarrow K$ l'application définie par :*

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n, \quad \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

*Alors $f = \alpha \Delta$.*
*Pour conclure, nous allons vérifier que $\Delta \in \mathcal{A}_n(E)$. Pour cela, il est clair que $\Delta$ est n-linéaire, donc il reste à vérifier que $\Delta$ est alternée.*
*Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, tel qu'il existe $i \in \mathbb{N}_n$, $j \in \mathbb{N}_n$ avec $i < j$ et $x_i = x_j$.*
*On doit montrer que $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.*
*Soit $A_n$ le sous-groupe de $S_n$ formé des permutations paires, alors on sait que pour toute transposition $\tau$ de $S_n$,*

$$(S_n \setminus A_n)\tau = \{\sigma\tau \ : \ \sigma \in S_n \setminus A_n\} = A_n$$

*Soit $\tau$ la transposition qui échange $i$ et $j$, alors on a*

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(i),i} \cdots a_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in A_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(i),i} \cdots a_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
&+ \sum_{\sigma \in S_n \setminus A_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(i),i} \cdots a_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
&+ \sum_{\sigma \in S_n \setminus A_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(\tau(j)),i} \cdots a_{\sigma(\tau(i)),j} \cdots a_{\sigma(n),n}
\end{aligned}$$

*Donc, si on pose $\varphi = \sigma\tau$, alors $\varepsilon(\varphi) = \varepsilon(\sigma\tau) = -\varepsilon(\sigma)$ et si $\sigma$ décrit $S_n \setminus A_n$, alors $\varphi$ décrit $(S_n \setminus A_n)\tau$ avec $(S_n \setminus A_n)\tau = A_n$. Donc on obtient,*

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in A_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
- \sum_{\varphi \in A_n} \varepsilon(\varphi) a_{\varphi(1),1} a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(j),i} \cdots a_{\varphi(i),j} \cdots a_{\varphi(n),n}
\end{aligned}$$

*Or,* $x_i = x_j$*, donc* $\forall k \in \mathbb{N}_n,\ \ a_{ki} = a_{kj}$*, par conséquent, on aura*

$$a_{\varphi(j),i} = a_{\varphi(j),j} \ \ et \ \ a_{\varphi(i),j} = a_{\varphi(i),i}$$

*donc*

$$\sum_{\varphi\in A_n} \varepsilon(\varphi)a_{\varphi(1),1}a_{\varphi(2),2}\cdots a_{\varphi(j),i}\cdots a_{\varphi(i),j}\cdots a_{\varphi(n),n} = \sum_{\varphi\in A_n} \varepsilon(\varphi)a_{\varphi(1),1}a_{\varphi(2),2}\cdots a_{\varphi(n),n}$$

*par conséquent, on a*

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma\in A_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n} - \sum_{\varphi\in A_n} \varepsilon(\varphi)a_{\varphi(1),1}a_{\varphi(2),2}\cdots a_{\varphi(n),n} = 0$$

*Ainsi,* $\Delta$ *est une forme* $n$*-linéaire alternée sur* $E$ *et on a*

$$\forall f \in \mathcal{A}_n(E),\ \ f = f(e_1, e_2, \dots, e_n)\Delta$$

*Donc* $\mathcal{A}_n(E) = Vect(\Delta)$*, avec* $\Delta \neq 0$*, car* $\Delta(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$*, par suite, on a*
$\dim(\mathcal{A}_n(E)) = 1$.

**Exemples 4.1**
*On suppose* $\dim(E) = 2$*. Soient* $(e_1, e_2)$ *une base de* $E$ *et* $f$ *une forme bilinéaire alternée sur* $E$*. Donc d'après ce qui précède, on sait que* $f = f(e_1, e_2)\Delta$*.*
*Soient* $x = x_1e_1 + x_2e_2$ *et* $y = y_1e_1 + y_2e_2$*, alors on a*

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= f(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2)\\
&= x_1y_1f(e_1, e_1) + x_1y_2f(e_1, e_2) + x_2y_1f(e_2, e_1) + x_2y_2f(e_2, e_2)\\
&= x_1y_2f(e_1, e_2) - x_2y_1f(e_1, e_2) \quad (car\ \ f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = 0 \ \ et \ \ f(e_2, e_1) = -f(e_1, e_2))\\
&= f(e_1, e_2)(x_1y_2 - x_2y_1)\\
&= f(e_1, e_2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

*Donc, on constate que*

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$$

## 4.6 Déterminants

### 4.6.1 Déterminant d'un système de vecteurs

**Définition 4.7.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $E$. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, tel que,

$$\forall j \in \mathbb{N}_n,\ \ x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$$

On définit le déterminant de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, par :

$$\boxed{\det_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}}$$

**Remarques 4.4**

*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $E$. Alors*

1. *L'application,*
$$\begin{aligned} \det_\beta : E^n &\longrightarrow K \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto \det_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$
*est une forme n-linéaire alternée sur $E$.*

2. *Si $f$ est une forme n-linéaire alternée quelconque, alors*
$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n, \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(e_1, e_2, \dots, e_n) \det_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
*En particulier, si $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une autre base de $E$, alors $f = \det_\gamma$ est une forme n-linéaire sur $E$, par suite, on aura*
$$\boxed{\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n, \quad \det_\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det_\gamma(\beta) \det_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

**Théorème 4.8.**

Soient $E$ un $k$-espace vectoriel de dimension finie, $\beta$ et $\gamma$ deux bases de $E$, alors
$$\boxed{\det_\beta(\gamma) \det_\gamma(\beta) = 1}$$

**Preuve**

*D'après la remarque précédente, on a*
$$1 = \det_\gamma(\gamma) = \det_\gamma(\beta) \det_\beta(\gamma)$$

**Théorème 4.9.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un système de $n$ vecteurs de $E$. Alors $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de $E$, si et seulement si, il existe une base $\beta$ de $E$, telle que $\det_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$.

**Preuve**

($\Longrightarrow$) *Si $\beta = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de $E$, alors on sait que*
$$\det_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

($\Longleftarrow$) *Supposons, par absurde, que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est lié, alors on peut supposer, par exemple, qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ dans $K$, lels que*
$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$$
*Puisque le déterminant est multilinéaire, alors on aura*
$$\det_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \det_\beta(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_i)$$

*Puisque le déterminant est alterné, alors*

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,n-1\},\quad \det_{\beta}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_i)=0$$

*Donc* $\det_\beta(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$*, ce qui est absurde, car, par hypothèse, on a* $\det_\beta(x_1,x_2,\ldots,x_n)\neq 0$*.*

### 4.9.1 Déterminant d'un endomorphisme

**Proposition 4.10.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $=n$, $\beta=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base de $E$ et $u$ un endomorphisme quelconque de $E$, alors la quantité

$$\det_{\beta}(u(e_1),u(e_2),\ldots,u(e_n))$$

ne dépend pas de la base $\beta$ choisie.

**Preuve**
*Soit* $\gamma=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ *une autre base de* $E$*. Montrons que,*

$$\det_{\gamma}(u(v_1),u(v_2),\ldots,u(v_n))=\det_{\beta}(u(e_1),u(e_2),\ldots,u(e_n))$$

*Pour cela, considérons l'application* $f$ *définie sur* $E^n$*, par :*

$$\forall(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E^n,\quad f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\det_{\beta}(u(x_1),u(x_2),\ldots,u(x_n))$$

*Alors, il est clair que* $f$ *est une forme* $n$*-linéaire alternée sur* $E$*, donc, d'après ce qui précède, on aura,*

$$\begin{aligned}\forall(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E^n,\quad f(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=f(e_1,e_2,\ldots,e_n)\det_{\beta}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\&=\det_{\beta}(u(e_1),u(e_2),\ldots,u(e_n))\det_{\beta}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\end{aligned}$$

*Donc, en particulier, on a*

$$f(v_1,v_2,\ldots,v_n)=\det_{\beta}(u(v_1),u(v_2),\ldots,u(v_n))=\det_{\beta}(u(e_1),u(e_2),\ldots,u(e_n))\det_{\beta}(\gamma)\quad(*)$$

*D'autre part, on sait que*

$$\det_{\beta}(u(v_1),u(v_2),\ldots,u(v_n))=\det_{\beta}(\gamma)\det_{\gamma}(u(v_1),u(v_2),\ldots,u(v_n))\quad(**)$$

*Donc, d'après* $(*)$ *et* $(**)$*, on a*

$$\det_{\gamma}(u(v_1),u(v_2),\ldots,u(v_n))=\det_{\beta}(u(e_1),u(e_2),\ldots,u(e_n))$$

**Définition 4.11.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $=n$, $\beta=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base quelconque de $E$ et $u$ un endomorphisme de $E$. On définit le déterminant de $u$, par :

$$\boxed{\det(u)=\det_{\beta}(u(e_1),u(e_2),\ldots,u(e_n))}$$

**Remarques 4.5**

1. *La définition précédente a un sens, car* $\det(u)$ *ne dépand pas de la base choisie.*
2. *Supposons que*
$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$
*Alors*
$$\det(u) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

**Théorème 4.12.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie. Alors

i) $\det(Id_E) = 1$.

ii) $\forall u \in L(E), \ \forall v \in L(E), \quad \det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$.

iii) $u \in L(E)$ est inversible, si et seulement si, $\det(u) \neq 0$.

iv) Si $u$ est un endomorphisme inversible, alors on a
$$\boxed{\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}}$$

**Preuve**

*Soit* $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *une base de* $E$.

**i)** $\det(Id_E) = \det_\beta(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$.

**ii)** *Soit* $f$ *l'application définie sur* $E^n$*, par :*
$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n, \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det_\beta(u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_n))$$
*Alors* $f$ *est une forme* $n$*-linéaire alternée sur* $E$*, donc on aura*
$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n, \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(e_1, e_2, \ldots, e_n) \det_\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
*Donc, en particulier, en remplaçant* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *par* $(v(x_1), v(x_2), \ldots, v(x_n))$*, on obtient*
$$\det_\beta(u(v(x_1)), u(v(x_2)), \ldots, u(v(x_n)) = \det_\beta(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) \det_\beta(v(x_1), v(x_2), \ldots, v(x_n))$$
*D'où* $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$.

**iii)**
$$\begin{aligned} u \ \text{ inversible} &\iff (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) \ \text{ est une base de } \ E \\ &\iff \det_\beta(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) \neq 0 \\ &\iff \det(u) \neq 0 \end{aligned}$$

*iv) On a* $u \circ u^{-1} = Id_E$*, donc* $1 = \det(Id_E) = \det(u \circ u^{-1}) = \det(u)\det(u^{-1})$.

### 4.12.1 Déterminant d'une matrice

**Définition 4.13.**

Soient $K$ un corps commutatif et $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans $K$. On définit le déterminant de $A$, par :

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}}$$

**Remarques 4.6 (Règles de calcul)**

1. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans $K$ et $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $K^n$. Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, soit $v_j$ le vecteur défini par :*

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_j$$

*Alors $v_1, v_2, \dots, v_n$ s'appellent les vecteurs colonnes de la matrice $A$ et on a*

$$\boxed{\det(A) = \det_{\beta}(v_1, v_2, \dots, v_n)}$$

*Par conséquent, puisque le déterminant est une forme $n$-linéaire alternée, on obtient les règles de calcul suivantes :*

**Règle 1 :** *Si l'on effectue une permutation $\sigma$ sur les colonnes de la matrice $A$, alors $\det(A)$ est se change en $\varepsilon(\sigma)\det(A)$.*
*Donc, en particulier, si l'on permute deux colonnes de $A$, alors $\det(A)$ se change en $-\det(A)$.*

**Règle 2 :** *Le déterminant ne change pas de valeur, si l'on ajoute à une colonne de $A$ une combinaison linéaire quelconque des autres colonnes de $A$.*

**Règle 3 :** $\forall \lambda \in K, \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

**Règle 4 :** *Si les vecteurs colonnes de $A$ forment un système lié, alors on a* $\det(A) = 0$.

2. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $u$ un endomorphisme quelconque de $E$. Soit $A$ la matrice de $u$ par rapport à la base $\beta$, alors on a*

$$\det(u) = \det(A)$$

*En effet, nous avons $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, donc*

$$\det(u) = \det_{\beta}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = \det(A)$$

3. *En pratique, le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, se note*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Théorème 4.14.**

Soient $K$ un corps commutatif, $A$ et $B$ deux matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $K$ et $I_n$ la matrice identité. Alors

**i)** $\det(I_n) = 1$.

**ii)** $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

**iii)** $A$ est inversible, si et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

**Preuve**

**i)** *Trivial*

**ii)** *Soient $u$ et $v$ les endomorphismes de $K^n$ de matrices $A$ et $B$ dans la base canonique de $K^n$. Alors $u \circ v$ a pour matrice $AB$ par rapport à la base canonique de $K^n$, par suite, on aura*

$$\det(AB) = \det(u \circ v) = \det(u)\det(v) = \det(A)\det(B)$$

**iii)** *Soit $u$ l'endomorphisme de matrice $A$ dans la base canonique de $K^n$, alors on a*

$$\begin{aligned} A \;\; \textit{inversible} &\Longleftrightarrow u \;\; \textit{inversible} \\ &\Longleftrightarrow \det(u) \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

**Remarques 4.7**

*Si $A$ est une matrice inversible, alors $\det(A) \neq 0$ et on a $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.*

**Proposition 4.15.**

Pour toute matrice carrée $A$, on a $\det(A) = \det({}^tA)$.

**Preuve**

*Posons $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, alors on a ${}^tA = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, avec $b_{ij} = a_{ji}$, donc on aura*

$$\begin{aligned} \det({}^tA) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \cdots b_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1),1} a_{\sigma^{-1}(2),2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n} \end{aligned}$$

*Posons $\varphi = \sigma^{-1}$, alors $\varphi$ décrit $S_n$, lorsque $\sigma$ décrit $S_n$ et on a $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$, par suite, on aura*

$$\det({}^tA) = \sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi) b_{\varphi(1),1} b_{\varphi(2),2} \cdots b_{\varphi(n),n} = \det(A)$$

### 4.15.1 Développement d'un déterminant

**Définition 4.16.**

Soient $K$ un corps commutatif et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans $K$. On appelle mineur relativement au coefficient $a_{ij}$, qu'on note $\Delta_{ij}$, le déterminant de la matrice d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant dans la matrice $A$ la $i^{ieme}$ ligne et la $j^{ieme}$ colonne.

**Remarques 4.8**

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

**Théorème 4.17** (Développement suivant une colonne)**.**

Soient $K$ un corps commutatif et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans $K$. Alors pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

**Preuve**
*Pour la démonstration on a besoin des lemmes suivants :*

**Lemme 4.18.**

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice triangulaire, alors on a

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

**Preuve**
*On suppose par exemple que $A$ est triangulaire supérieure, alors on aura*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\},\ i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0$$

*On a aussi*

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

*Or, pour chaque $\sigma \in S_n$, avec $\sigma \neq Id$, il existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, tel que $\sigma(k) > k$. En effet, supposons qu'il existe $\sigma \in S_n$, avec $\sigma \neq Id$ et pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $\sigma(k) \leq k$. Comme $\sigma \neq Id$, alors il existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, tel que $\sigma(k) \neq k$, et*

*comme* $\sigma(k) \leq k$*, alors* $\sigma(k) < k$*, donc pour tout* $j \in \{1, 2, \dots, k\}$*, on a* $\sigma(j) \leq k-1$*, autrement dit on a* $\sigma(\{1, 2, \dots, k\}) \subseteq \{1, 2, \dots, k-1\}$ *et comme* $\sigma$ *est bijective, alors* $k \leq k-1$*, ce qui est absurde.*
*Ainsi pour tout* $\sigma \in S_n$*, avec* $\sigma \neq Id$*, on* $a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = 0$*, d'où le résultat.*

**Lemme 4.19.**

Soient $K$ un corps commutatif et $M$ une matrice carrée d'ordre $n+p$ à coefficients dans $K$, avec $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$ et $B$ une matrice carrée d'ordre $p$. Alors on a

$$\det(M) = \det(A)\det(B)$$

**Preuve**
*Ecrivons la matrice* $M$ *sous la forme suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & \dots & c_{np} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{p1} & \dots & b_{pp} \end{pmatrix}$$

*On considère l'application* $f : E^p \longrightarrow K$ *définie pour chaque* $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in E^n$ *par*

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} & c_{n1} & \dots & c_{np} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{p1} & \dots & b_{pp} \end{vmatrix}$$

*où* $E = K^n$ *et pour chaque* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$*,* $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}$ *sont les composantes de* $v_i$ *dans la base canonique* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$*. Alors on voit facilement que* $f$ *est une forme multilinéaire alternée sur* $E$*, donc d'après le théorème 4.5, pour tout* $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ *on a*

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = f(e_1, e_2, \dots, e_n)\det(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

*Par conséquent, on a* $\det(M) = f(e_1, e_2, \dots, e_n)\det(A)$*, avec*

$$f(e_1, e_2, \dots, e_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & c_{n1} & \dots & c_{np} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{p1} & \dots & b_{pp} \end{vmatrix}$$

*Considérons l'application* $g : E^p \longrightarrow K$ *définie pour chaque* $(v_1, v_2, \dots, v_p) \in E^p$ *par*

$$g(v_1, v_2, \dots, v_p) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & c_{n1} & \dots & c_{np} \\ 0 & \dots & 0 & v_{11} & \dots & v_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & v_{p1} & \dots & v_{pp} \end{vmatrix}$$

*où* $E = K^p$ *et pour chaque* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ip}$ *sont les composantes de* $v_i$ *dans la base canonique* $(e_1, e_2, \dots, e_p)$. *Alors* $g$ *est une forme multilinéaire alternée sur* $E$, *donc d'après le théorème 4.5, pour tout* $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ *on a*

$$g(v_1, v_2, \dots, v_p) = g(e_1, e_2, \dots, e_p) \det(v_1, v_2, \dots, v_p)$$

*Par conséquent, on a* $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = g(e_1, e_2, \dots, e_p) \det(B)$, *avec*

$$g(e_1, e_2, \dots, e_p) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & c_{n1} & \dots & c_{np} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$g(e_1, e_2, \dots, e_p)$ *est un déterminant triangulaire donc d'après le lemme précédent, on a* $g(e_1, e_2, \dots, e_p) = 1$, *par suite, on aura* $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det(B)$, *avec* $\det(M) = f(e_1, e_2, \dots, e_n) \det(A)$, *donc* $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

**Preuve (Preuve du théorème)**
*Soient* $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ *une matrice carrée d'ordre* $n$, $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ *la base canonique de* $K^n$ *et* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *les vecteurs colonnes de* $A$, *donc pour tout* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, *on a* $v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$. *Fixons* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, *alors on a*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det_B(v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n) \\ &= \det_B(v_1, \dots, v_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, v_{j+1}, \dots, v_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det_B(v_1, \dots, v_{j-1}, e_i, v_{j+1}, \dots, v_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{ij} \det_B(e_i, v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) \end{aligned}$$

*Avec* $\det_B(e_i, v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 1 & a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

*Dans la matrice ci-dessus, faisons permuter la* $i^{ieme}$ *ligne* $(i-1)^{ieme}$ *ligne puis avec la*
$(i-2)^{ieme}$ *ligne et ainsi de suite jusqu'à la* $1^{iere}$ *ligne, alors on obtient,*

$$\det_B(e_i, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n) = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \ldots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \ldots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

*Ainsi, d'après le lemme prédent, on a*

$$\begin{aligned} \det_B(e_i, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n) &= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i-1}\Delta_{ij} \end{aligned}$$

*Par conséquent, on obtient,*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j-2} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}$$

**Remarques 4.9**
*Comme* $\det(A) = \det({}^tA)$, *alors on peut développer un déterminant par rapport à une ligne quelconque, c'est à dire, on a*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j-2} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}$$

**Définition 4.20.**

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq,i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre $n$ et soit $\Delta_{ij}$ le mineur associé à $a_{ij}$, pour chaque $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Alors

**i)** $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ s'appelle le **cofacteur** de $a_{ij}$.

**ii)** La matrice dont les coefficients sont les cofacteurs des $a_{ij}$ s'appelle la **comatrice** de $A$ et se note $co(A)$ et on a $co(A) = ((-1)^{i+j}\Delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

**iii)** La matrice transposée de $co(A)$, ${}^tco(A)$, s'appelle la matrice **adjointe** de $A$ et se note $\widetilde{A}$.

### 4.20.1 Inverse d'une matrice

**Théorème 4.21.**

Soient $K$ un corps commutatif, $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans $K$ et $\widetilde{A}$ la matrice adjointe de $A$. Alors

$$\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = \det(A)I_n$$

où $I_n$ est la matrice identité d'ordre $n$.

**Preuve**

*Posons* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, $\widetilde{A} = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *et* $A\widetilde{A} = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.
*Montrons que* $c_{ii} = \det(A)$ *et pour* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *avec* $i \neq j$, $c_{ij} = 0$. *Pour cela, on a*

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ b_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ji} \ \ \textit{et}\ \ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{ik}\Delta_{jk}$$

*En particulier, pour tout* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *on a*

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ik}\Delta_{ik} = \det(A) \quad (\textit{d'après le théorème précédent})$$

*Pour* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *avec* $i \neq j$, *on considère la matrice* $B$ *obtenue en remplaçant dans la matrice* $A$ *la* $i^{ieme}$ *ligne par la* $j^{ieme}$ *ligne. Donc dans la matrice* $B$ *la* $i^{ieme}$ *et la* $j^{ieme}$ *ligne sont identiques, par suite* $\det(B) = 0$. *Or on a*

$$\det(B) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{jk}\Delta_{jk} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\Delta_{jk} \quad (\textit{car}\ \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ a_{ik} = a_{jk})$$

*D'autre part, pour* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *avec* $i \neq j$, *on a*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\Delta_{jk} = \det(B) = 0$$

*D'où le résultat.*

**Remarques 4.10**
*Soient* $K$ *un corps commutatif et* $A$ *une matrice carrée d'ordre* $n$ *à coefficients dans* $K$. *Si* $A$ *est inversible, alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$$

**Exemples 4.2**
*Soit* $A$ *une matrice d'ordre* 2, *avec* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *alors* $\det(A) = ad - bc$ *et si* $A$ *est inversible alors* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

### 4.21.1 Déterminant de Vandermonde

**Proposition 4.22.**

Soient $K$ un corps commutatif, $n$ un entier, avec $n \geq 2$, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des éléments de $K$ deux à deux distincts. On appelle déterminant de Vandermonde associé à $a_1, a_2, \ldots, a_n$, lélément de $K$ défini par :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Alors $V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

**Preuve**

*Établissons d'abord une relation de récurrence entre $V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, où $n > 2$. Pour cela, on considère le polynôme $P(X)$ défini par*

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \ldots & X^{n-2} & X^{n-1} \end{vmatrix}$$

*Alors pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, on a $P(a_k) = 0$, car $P(a_k)$ est un déterminant qui contient deux lignes identiques. En développant par rapport à la dernière ligne, on voit que $\deg(P) \leq n-1$ et comme $P$ admet $n-1$ racines deux à deux distinctes, alors il existe $\alpha \in K$, tel que $P(X) = \alpha \prod\limits_{i=1}^{n-1} (X - a_i)$. Or, $\alpha$ est le coefficient de $X^{n-1}$, donc en développant par rapport à la dernière ligne, on aura*

$$\alpha = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$$

*Par suite, pour tout $n \geq 2$, on a $V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod\limits_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$.*
*Montrons maintenant par récurrence que pour tout $n \geq 2$, on a*

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

*Pour $n = 2$, on a $V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)$.*
*Donc la propriètè est vérifiée pour $n = 2$.*
*H.R : « Supposons que $n > 2$ et que la propriètè est vérifiée pour tout entier $m < n$ ».*
*D'après ce qui précède, on a $V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod\limits_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ et*

*d'après l'hypothèse de récurrence, on a* $V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \prod_{1 \le i < j \le n-1} (a_j - a_i)$, *par suite, on a*

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{1 \le i < j \le n-1} (a_j - a_i) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

## 4.23 Exercices

**Exercice 4.1**
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$ et $f$ une forme linéaire sur $E$. Soient $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$, $q$ la projection sur $G$ parallèlement à $F$ et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \varphi(x, y) = f(p(x))f(q(y)) - f(p(y))f(q(x))$$

Montrer que $\varphi$ est une forme bilinéaire alternée.

**Exercice 4.2**
Soit $M$ la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ défini par $m_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i = j \\ a & \text{si } i < j \\ b & \text{si } i > j \end{cases}$.

1. Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on désigne par $C_j$ la $j^{ieme}$ colonne de la matrice $M$ et soit $V$ le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1. Calculer

$$P(x) = \det(C_1 + xV, C_2 + xV, \dots, C_n + xV)$$

2. En déduire une expression de $\det(M)$.

**Exercice 4.3**
Soient $K$ un corps commutatif infini et soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre $2n$, où $A$, $B$, $C$ et $D$ sont des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $K$, avec $DC = CD$.

1. On suppose que $D$ est inversible et on pose $T = \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$.
   Calculer $MT$ et en déduire que $\det(M) = \det(AD - BC)$.
2. Soit $P$ le polynôme défini par $P(X) = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D - XI_n \end{vmatrix}$.
   En remarquant que le polynôme $Q$ défini par $Q(X) = \det(D - XI_n)$ n'a qu'un nombre fini de racines, déduire que $\det(M) = \det(AD - BC)$.
3. Montrer que si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, alors
   **a)** $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} \ge 0$.
   **b)** $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + B)\det(A - B)$.

**Exercice 4.4**
Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $n \ge 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Déterminer le rang de la comatrice de $A$, $co(A)$, en fonction du rang de $A$. (On pourra distinguer les cas où $rg(A)=n$, $rg(A)=n-1$ et $rg(A)<n-1$).
2. Montrer que $\det(co(A))=\det(A)^{n-1}$.
3. Montrer que si $A$ est inversible, alors $co(co(A))=\det(A)^{n-2}A$.
4. Montrer que s'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $A^p=I$, alors $co(A)^p=I$.
5. Montrer que si $A$ est inversible, alors $co(A)$ est inversible et on a $co(A)^{-1}=co(A^{-1})$.

**Exercice 4.5**
Pour tout entier $n\geq 2$, on considère le déterminant $\Delta_n$ défini par

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \dots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

1. Montrer que pour tout $n\geq 4$, on a $\Delta_n=(a+b)\Delta_{n-1}-ab\Delta_{n-2}$.
2. En déduire que pour tout $n\neq 2$, on a $\Delta_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$, avec $a\neq b$.

**Exercice 4.6**
Soit $a\in\mathbb{R}$, on désigne par $\Delta_n$ le déterminant défini par

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1. Calculer $\Delta_n$ en fonction de $\Delta_{n-1}$.
2. Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, on a $\Delta_n=a^n-a^{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2$.

**Exercice 4.7 (Déterminant de Vandermonde généralisé)**
Soient $K$ un corps commutatif, $a_1,a_2,\dots,a_n$ des éléments deux à deux distincts $K$, avec $n\geq 2$, et $P_1,P_2,\dots,P_{n-1}$ des polynômes unitaires de $K[X]$, tels que pour tout $k\in\{1,2,\dots,n-1\}$, on a $\deg(P_k)=k$. On appelle déterminant de Vandermonde généralisé associé à $a_1,a_2,\dots,a_n$, lélément de $K$ défini par :

$$\Delta(a_1,a_2,\dots,a_n)\begin{vmatrix} 1 & P_1(a_1) & \dots & P_{n-1}(a_1) \\ 1 & P_1(a_2) & \dots & P_{n-1}(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & P_1(a_n) & \dots & P_{n-1}(a_n) \end{vmatrix}$$

Montrer que

$$\Delta(a_1,a_2,\dots,a_n)=V(a_1,a_2,\dots,a_n)=\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)$$

**Exercice 4.8**
Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels.

1. Montrer que $\det(A+iB)$ et $\det(A-iB)$ sont deux nombres complexes conjugués.
2. Montrer que si $AB = BA$, alors $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.
3. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que $AB \neq BA$ et calculer $\det(A^2 + B^2)$.

**Exercice 4.9**
Soient $x$, $y$, $z$ et $t$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\det(d, b, c)a + \det(a, d, c)b + \det(a, b, d)c = \det(a, b, c)d$$

(On pourra considérer le système $ax + by + cz = d$)

**Exercice 4.10**
Soient $a, b, x_1, x_2, \dots, x_n$, avec $n \geq 2$. On considère la matrice $A$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & a & \dots & \dots & a \\ b & x_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & \dots & b & x_n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que si $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ et $a = b$, montrer que
$$\det(A) = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}$$
2. Soit $J$ la matrice carrée d'ordre $n$ dont tous les coefficients valent 1. Montrer que le polynôme $\det(A + XJ)$ est de degré 1.
3. Calculer $\det(A - aJ)$ et $\det(A - bJ)$.
4. On suppose $a \neq b$ et on pose $P(X) = (-1)^n (X - x_1)(X - x_2)\dots(X - x_n)$.
   Montrer que
$$\det(A) = \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a}$$
5. En déduire que si $a = b$, alors $\det(A) = P(a) - aP'(a)$

**Exercice 4.11**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $f$ un endomorphisme de $E$. Montrer que pour tout $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in E^n$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \det(v_1, \dots, f(v_i), \dots, v_n) = Tr(f) \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

# 5 Réduction des endomorphismes

## 5.1 Polynômes et endomorphismes

### 5.1.1 Notations et définitions

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel quelconque. Pour tout endomorphisme $u$ de $E$ et pour tout entier $m \geq 0$, on définit $u^m$ par récurrence de la manière suivante :

**i)** Pour $m = 0$, on pose $u^0 = Id_E$.

**ii)** Pour $m \geq 1$, $u^m = u \circ u^{m-1} = u^{m-1} \circ u$

Autrement dit, on a

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ u^m = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{m \text{ fois}}$$

Soit, maintenant, $P$ un polynôme de $K[X]$, avec $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$. On définit l'endomorphisme $P(u)$, appelé polynôme en $u$, par :

$$P(u) = a_0 Id_E + a_1 u + \cdots + a_n u^n = \sum_{i=1}^{n} a_i u^i$$

**Proposition 5.2.**

**i)** Si $P = 1$ alors $P(u) = Id_E$.

**ii)** $\forall P \in K[X], \forall Q \in K[X],\ (P + Q)(u) = P(u) + Q(u)$.

**iii)** $\forall P \in K[X], \forall Q \in K[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

**Preuve**
*La démonstration est laissée à titre d'exercice.*

**Remarques 5.1**
*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$.*

1. *Pour tout $A \in M_n(K)$ et pour tout $P \in K[X]$, avec $P = a_0+a_1X+\cdots+a_mX^m$, la matrice $P(A)$ est définie par :*

$$P(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m = \sum_{j=1}^{m} a_j A^j$$

2. $\forall m \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N},\ u^m \circ u^n = u^n \circ u^m = u^{m+n}$.
3. $\forall P \in K[X], \forall Q \in K[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
4. *On suppose que $E$ est de dimension finie $= n$. Soit $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et soit $A = Mat(u, \beta)$, alors*

$$\forall P \in K[X],\ Mat(P(u), \beta) = P(A)$$

### 5.2.1 Polynôme minimal

**Théorème 5.3.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de **dimension finie** $= n$, avec $n \geq 1$. Alors pour tout endomorphisme $u$ de $E$, il existe un unique polynôme $P \in K[X]$, non constant et unitaire, tel que

**i)** $P(u) = 0$.

**ii)** Si $Q$ est un autre polynôme quelconque de $K[X]$, vérifiant $Q(u) = 0$, alors $P$ divise $Q$.

Dans ce cas, $P$ s'ppelle le polynôme minimal de $u$ et se note $M_u$.

**Preuve**
*Puisque $E$ est de dimension finie $= n$, alors on sait que $L(E)$ est aussi de dimension finie $= n^2$. On considère le système $\mathcal{S} = (Id_E, u, u^2, \dots, u^{n^2})$, alors $\mathcal{S}$ est un système de $L(E)$ dont le cardinal est égal à $n^2 + 1$ qui est strictement supérieur à $n^2$, donc $\mathcal{S}$ est nécessairement un système lié. Par suite, il existe $(a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \in K^{n^2+1}$, avec $(a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \neq (0, 0, \dots, 0)$, tel que $\sum\limits_{i=0}^{n^2} a_i u^i = 0$.*
*Soit $T$ le polynôme de $K[X]$ défini par $T = \sum\limits_{i=1}^{n^2} a_i X^i$, alors*

**i)** *$T \neq 0$, car $(a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \neq (0, 0, \dots, 0)$.*

**ii)** *$T(u) = 0$.*

**iii)** *$\deg(T) \geq 1$, car sinon, on aura $T = a_0$, et comme $T(u) = 0$, alors on aura $a_0 Id_E = 0$ et puisque $a_0 \neq 0$, alors $Id_E = 0$, ce qui est absurde car $E \neq \{0\}$.*

*Soit $\mathcal{A}$ la partie de $\mathbb{N}$ définie par :*

$$\mathcal{A} = \{\deg(S) \,:\, S \in K[X],\, S(u) = 0 \text{ et } \deg(S) \geq 1\}$$

*Alors $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, car $\deg(T) \in \mathcal{A}$, en conséquence, $\mathcal{A}$ possède un plus petit élément noté $p$. Puisque $p \in \mathcal{A}$, alors, il existe $S \in K[X]$, tel que $S(u) = 0$, $\deg(S) \geq 1$ et $\deg(S) = p$.*
*Posons $S = b_0 + b_1 X + \cdots + b_p X^p$, avec $b_p \neq 0$ et soit $P = b_p^{-1} S$, alors*

**i)** *Alors $P$ est un polynôme unitaire de degré $\geq 1$.*

**ii)** *$P(u) = 0$*

**iii)** *Si $S \in K[X]$, vérifiant $S(u) = 0$, alors $P$ divise $S$.*
*En effet, faisons la division euclidienne de $S$ par $P$, on aura*

$$S = QP + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(S)$$

*Donc, en appliquant les deux membres de l'égalité précédente à $u$, on obtient $R(u) = 0$. Donc $\deg(R) \leq 0$, car sinon, on aura $\deg(R) \in \mathcal{A}$, ce qui est absurde, car $\deg(R) < \deg(S)$ et $\deg(S)$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$. Donc $R = \alpha$ avec $\alpha \in K$ et puisque $R(u) = 0$, alors $\alpha Id_E = 0$, donc $\alpha = 0$, par suite, $R = 0$.*

**Remarques 5.2**
*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$.*

1. *Le polynôme minimal $M_u$ de $u$ est caractérisée par :*

$$\boxed{\begin{cases} M_u(u) = 0 \\ \text{Si } Q \text{ est un autre polynôme de } K[X] \text{ vérifiant } Q(u) = 0, \text{ alors } M_u \text{ divise } Q \end{cases}}$$

2. $\forall u \in L(E),\ \deg(M_u) \geq 1$

**Exemples 5.1**
*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$.*

1. *Si $u = 0$ alors $M_u = X$.*
2. *Si $u = Id_E$ alors $M_u = X - 1$.*
3. *Si $u$ est un projecteur, avec $u \neq 0$ et $u \neq Id_E$, alors $M_u = X^2 - X$.*
   *En effet, puisque $u$ est un projecteur, alors, par définition, $u^2 = u$, donc $u^2 - u = 0$. Soit $P = X^2 - X$, alors $P(u) = 0$, donc $M_u$ divise $P$ et puisque $\deg(M_u) \geq 1$, alors $M_u = X$, $M_u = X - 1$ ou $M_u = X^2 - X$. Nous avons supposé que $u \neq 0$ et $u \neq Id_E$, donc $M_u = X^2 - X$.*

**Proposition 5.4.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ un endomorphisme de $E$ et $P$ un polynôme non constant de $K[X]$, alors

**i)** $P(u)$ est inversible, si et seulement si, $P$ et $M_u$ sont premiers entre eux.

**ii)** Dans le cas où $P(u)$ est inversible, $P(u)^{-1}$ est un polynôme en $u$.

**Preuve**
($\Longrightarrow$) *Supposons que $P(u)$ est inversible et montrons que $P \wedge M_u = 1$.*
*Soit $\Delta = P \wedge M_u$, alors $\Delta$ divise $P$ et $\Delta$ divise $M_u$, donc il existe deux polynômes $Q_1$ et $Q_2$ de $K[X]$, tels que $P = Q_1\Delta$ et $M_u = Q_2\Delta$.*
*$P = Q_1\Delta$, donc $P(u) = Q_1(u) \circ \Delta(u)$. Puisque $P(u)$ est inversible et $E$ de dimension finie, alors $Q_1(u)$ et $\Delta(u)$ sont inversibles.*
*D'autre part, on a $M_u = Q_2\Delta$, donc $M_u(u) = Q_2(u) \circ \Delta(u)$.*
*Or $M_u(u) = 0$ et $\Delta(u)$ est inversible, donc $Q_2(u) = 0$, par suite $M_u$ divise $Q_2$, donc $\deg(M_u) \leq \deg(Q_2)$.*
*On a aussi $\deg(Q_2) \leq \deg(M_u)$, car $Q_2$ divise $M_u$, donc $\deg(Q_2) = \deg(M_u)$.*
*Par conséquent $\deg(\Delta) = 0$, donc $\Delta = 1$, car $\Delta$ est un polynôme unitaire.*
($\Longleftarrow$) *Supposons que $P \wedge M_u = 1$ et montrons que $P(u)$ est inversible et que $P(u)^{-1}$ est un polynôme en $u$.*
*$P \wedge M_u = 1$, donc d'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes $A$ et $B$ de $K[X]$, tels que $AP + BM_u = 1$.*

$$\begin{aligned} AP + BM_u = 1 &\Longrightarrow A(u) \circ P(u) + B(u) \circ M_u(u) = Id_E \\ &\Longrightarrow A(u) \circ P(u) = Id_E \qquad (\text{car } M_u(u) = 0) \\ &\Longrightarrow P(u) \text{ est inversible et } P(u)^{-1} = A(u) \qquad (\text{car } E \text{ est de dimension finie}). \end{aligned}$$

**Remarques 5.3**
*D'après la proposition précédente, un endomorphisme $u$ de $E$ est inversible, si et seulement si, $X$ et $M_u$ sont premiers entre eux.*
*Donc $u$ est inversible, si et seulement si, $M_u(0) \neq 0$.*

### 5.4.1 Polynôme caractéristique

Soient $K$ un corps commutatif et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans $K$. On considère la matrice carrée d'ordre $n$, $XI - A = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \forall j \in \mathbb{N}_n,\ b_{ij} = \begin{cases} X - a_{ii} & \text{si } i = j \\ -a_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Donc $XI - A$ est une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans $K[X]$, par suite, $\det(XI - A)$ est un élément de $K[X]$.

**Définition 5.5.**

$\det(XI - A)$ s'appelle le polynôme caractéristique de $A$ et se note $\chi_A$.

**Remarques 5.4**

*En pratique, $\chi_A$ s'écrit sous la forme :*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \ldots & -a_{n,n-1} & X - a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Exemples 5.2**

*Soient $K$ un corps commutatif et $A \in M_2(K)$, avec $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alors*

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X - a & -c \\ -b & X - d \end{vmatrix} \\ &= (X - a)(X - d) - bc \\ &= X^2 - (a + d)X + (ad - bc) \\ &= \boxed{X^2 - tr(A)X + det(A)} \end{aligned}$$

**Proposition 5.6.**

Soit $K$ un corps commutatif. Alors pour toute matrice $A \in M_n(K)$, le polynôme caractéristique $\chi_A$ de $A$ est un polynôme unitaire de degré $n$.

$$\boxed{\forall A \in M_n(K),\ \deg(\chi_A) = n}$$

**Preuve**

*Posons $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $XI - A = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, avec* $b_{ij} = \begin{cases} X - a_{ii} & si\ i = j \\ -a_{ij} & si\ i \neq j \end{cases}$

*Or, on sait que, (voir chapitre précédent)*

$$\det(XI - A) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \cdot\cdots\cdot b_{\sigma(n),n}$$

*Donc, si on désigne par $e$ l'élément neutre de $S_n$, on aura*

$$\det(XI - A) = (X - a_{11})(X - a_{22}) \cdot\cdots\cdot (X - a_{nn}) + \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma\neq e}} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \cdot\cdots\cdot b_{\sigma(n),n}$$

*Pour chaque $\sigma \neq e$, il existe $i_0 \in \mathbb{N}_n$, tel que $\sigma(i_0) \neq i_0$, donc $\deg(b_{\sigma(i_0),i_0}) \leq 0$, car $b_{\sigma(i_0),i_0} = -a_{\sigma(i_0),i_0}$, par suite, on aura*

$$\deg\left(\epsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \cdot \cdots \cdot b_{\sigma(n),n}\right) \leq n-1$$

*Ainsi, on obtient,*

$$\deg\left(\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq e}} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \cdot \cdots \cdot b_{\sigma(n),n}\right) \leq n-1$$

*Puisque $(X-a_{11})(X-a_{22}) \cdot \cdots \cdot (X-a_{nn})$ est un polynôme unitaire de degré $n$, alors $\det(XI-A)$ est un polynôme unitaire de degré $n$.*

**Proposition 5.7.**

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

**Preuve**

*Soient $A$ et $B$ deux matrices semblables, donc par définition, il existe une matrice inversible $P$, telle que $B = P^{-1}AP$, en conséquence, on aura*

$$\chi_B = \det(XI-B) = \det(XI-P^{-1}AP) = \det[P^{-1}(XI-A)P] = \det(XI-A) = \chi_A$$

**Définition 5.8.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$, $u$ un endomorphisme de $E$ et $A$ la matrice de $u$ par rapport à la base $\beta$. Alors le polynôme caractéristique de $u$, noté $\chi_u$ est défini par

$$\chi_u = \det(XI-A) = \chi_A$$

**Remarques 5.5**

1. *La définition précédente a un sens, car si $B$ est la matrice de $u$ par rapport à une autre base de $E$, alors on sait que $A$ et $B$ sont semblables, donc d'après la proposition précédente, $A$ et $B$ ont même polynôme caractéristique.*
2. *Si $\dim(E) = n$, alors pour tout $u \in L(E)$, $\deg(\chi_u) = n$.*
3. *Le polynôme minimal d'un endomorphisme est loin d'être son polynôme caractéristique.*

**Exemples 5.3**

*Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $u \in L(E)$.*

1. *Si $u = 0$ alors $M_u = X$ et $\chi_u = X^n$.*
2. *Si $u = Id_E$ alors $M_u = X - 1$ et $\chi_u = (X-1)^n$.*
3. *On suppose, maintenant que $u$ est un projecteur, avec $u \neq 0$ et $u \neq Id_E$, alors on sait que*

$$E = \ker(u) \oplus Im(u) \text{ et } \forall x \in Im(u),\ u(x) = x$$

*Soit* $p = \dim(\ker(u))$ *et soit* $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ *une base de* $E$, *telle que* $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ *soit une base de* $\ker(u)$ *et* $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ *soit une base de* $Im(u)$. *Soit* $M$ *la matrice de* $u$ *par rapport à la base* $\beta$, *puisque* $\forall j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $u(e_j) = 0$ *et* $\forall j \in \{p+1, \dots, n\}$, $u(e_j) = e_j$, *alors* $M$ *s'écrit sous la forme*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

*Donc*

$$\chi_u = \chi_M = \det(XI_n - M) = \det\left(\begin{pmatrix} XI_p & 0 \\ 0 & (X-1)I_{n-p} \end{pmatrix}\right) = X^p(X-1)^{n-p}$$

*Donc, si* $u$ *est un projecteur, avec* $u \neq 0$ *et* $u \neq Id_E$, *alors* $M_u = X(X-1)$ *et* $\chi_u = X^p(X-1)^{n-p}$, *où* $p = \dim(\ker(u))$.

4. *On suppose que* $\dim(E) = 2$ *et soit* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *la matrice de* $u$ *par rapport à une base de* $E$, *alors on a*

$$\begin{aligned} \chi_u &= \begin{vmatrix} X-a & -c \\ -b & X-d \end{vmatrix} \\ &= X^2 - (a+d)X + (ad - bc) \\ &= X^2 - tr(u)X + \det(u) \end{aligned}$$

### 5.8.1 Théorème de Cayley-Hamilton

**Théorème 5.9.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme quelconque de $E$. Alors $M_u$ divise $\chi_u$.

**Preuve**
*On sait que*

$$\boxed{\forall P \in K[X],\ (M_u \ \ divise \ \ P) \Longleftrightarrow P(u) = 0}$$

*Donc, il suffit de montrer que* $\chi_u(u) = 0$. *Pour cela, nous avons besoin des résultats suivants :*

**Définition 5.10.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$. On dit qu'un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est stable par $u$, si $u(F) \subseteq F$.

**Remarques 5.6**
*$F$ est stable par $u$, si et seulement si,*

$$\forall x \in E,\ x \in F \Longrightarrow u(x) \in F$$

**Exemples 5.4**
*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$, alors*

1. $\{0\}$ *et* $E$ *sont toujours stables par* $u$.
2. $\ker(u)$ *et* $Im(u)$ *sont toujours stables par* $u$.
3. *Soit* $v$ *un autre endomiorphisme de* $E$. *Si* $u \circ v = v \circ u$, *alors* $\ker(u)$ *et* $Im(u)$ *sont stables par* $v$.
   *En effet, soit* $x \in \ker(u)$, *a-t-on* $v(x) \in \ker(u)$ *?*
$$\begin{aligned} x \in \ker(u) &\Longrightarrow u(x) = 0 \\ &\Longrightarrow v(u(x)) = v(0) = 0 \\ &\Longrightarrow (v \circ u)(x) = 0 \\ &\Longrightarrow (u \circ v)(x) = 0 \quad (car \;\; v \circ u = u \circ v) \\ &\Longrightarrow u(v(x)) = 0 \\ &\Longrightarrow v(x) \in \ker(u) \end{aligned}$$
   *Donc* $\ker(u)$ *est stables par* $v$.
   *D'autre part, on a*
$$v(Im(u)) = v(u(E)) = (v \circ u)(E) = (u \circ v)(E) = u(v(E))$$
   *Puisque* $v(E) \subseteq E$, *alors* $u(v(E)) \subseteq u(E)$, *donc* $v(Im(u)) \subseteq Im(u)$.

**Lemme 5.11.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $u$ un endomorphisme de $E$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, stable par $u$. Soit $v$ la réstriction de $u$ à $F$, alors $\chi_v$ divise $\chi_u$.

Soit $p = \dim(F)$ et soit $G$ un supplémentaire de $F$ dans $E$. Soit $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de $E$, telle que $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ soit une base de $F$ et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de $G$ et soient $A$ la matrice de $v$ par rapport à $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et $M$ la matrice de $u$ par rapport à $\beta$, alors $M$ s'écrit sous la forme
$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \;\text{ avec }\; B \in M_{n-p}(K) \;\text{ et }\; C \in M_{p,n-p}(K)$$
Donc, on aura
$$\chi_u = \det(XI_n - M) = \det\left(\begin{pmatrix} XI_p & -B \\ 0 & XI_{n-p} - C \end{pmatrix}\right)$$
Donc, d'après le lemme 4.19, on a
$$\chi_u = \det(XI_p - A) \times \det(XI_{n-p} - C) = \chi_v \times \det(XI_{n-p} - C)$$
par suite, $\chi_v$ divise $\chi_u$.

**Lemme 5.12.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$. Alors pour tout $x \in E$, avec $x \neq 0$, il existe un unique polynôme $M_x \in K[X]$, non constant et unitaire, tel que

**i)** $M_x(u)(x) = 0$.

**ii)** $\forall P \in K[X],\; P(u)(x) = 0 \Longrightarrow M_x$ divise $P$

**Preuve**
*Soit $J$ la partie de $K[X]$ définie par :*

$$J = \{P \in K[X] \,:\, P(u)(x) = 0\}$$

*Alors, il est facile de vérifier que $J$ est un idéal de $K[X]$ qui est non nul, car $M_u \in J$. Puisque $K[X]$ est un anneau principal, alors il existe un unique polynôme unitaire $Q \in K[X]$, tel que $J = (Q)$. Donc, il suffit de prendre $M_x = Q$.*

**Lemme 5.13.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ un endomorphisme de $E$ et $x \in E$, avec $x \neq 0$. On suppose que $M_x = a_0 + a_1X + \cdots + a_{p-1}X^{p-1} + X^p$ et on pose

$$F_x = Vect(\{x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\})$$

Alors, on a

**i)** $\dim(F_x) = \deg(M_x) = p$.

**ii)** $F_x$ est stable par $u$.

**iii)** Soit $v$ la réstriction de $u$ à $F_x$, alors $\chi_v = M_x$.

**Preuve**

**i)** *Puisque $F_x = Vect(\{x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\})$, alors il suffit de montrer que le système $(x, u(x), \ldots, u^{p-1})$ est lible. Pour cela, on suppose que ce système est lié, donc il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in K^p$, tel que $\sum\limits_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$.*
*Soit $P = \sum\limits_{i=0}^{p-1} \alpha_i X^i$, donc $P(u)(x) = 0$, par suite, $M_x$ divise $P$, ce qui est absurde, car*
$\deg(P) < \deg(M_x)$.

**ii)** *Puisque $F_x = Vect(\{x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\})$, alors $F_x$ est stable par $u$, si et seulement si,*

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, p-1\},\ u(u^i(x)) \in F$$

*Si $i \in \{0, 1, \ldots, p-2\}$, alors $u(u^i(x)) = u^{i+1}(x)$, donc $u(u^i(x)) \in F_x$, car $i + 1 \leq p - 1$.*
*Si $i = p - 1$, puisque $M_x(u) = 0$, alors on a*

$$a_0x + a_1u(x) + \cdots + a_{p-2}u^{p-2}(x) + u^{p-1}(x) = 0$$

*ainsi on aura $u^{p-1}(x) = -(a_0x + a_1u(x) + \cdots + a_{p-2}u^{p-2}(x))$, donc $u^{p-1}(x) \in F_x$.*

**iii)** *Soit $v$ la réstriction de $u$ à $F_x$ et soit $A$ la matrice de $v$ par rapport à la base $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$, alors $A$ s'écrit sous la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

*Il est facile d'établir, par récurrence sur $p$, que $\det(XI - A) = M_x$, donc $\chi_v = M_x$.*

**Preuve (preuve du théorème)**
*Pour montrer que* $\chi_u(u) = 0$*, il suffit de montrer que*

$$\forall x \in E,\ x \neq 0 \Longrightarrow \chi_u(u)(x) = 0$$

*Soit* $x \in E$*, avec* $x \neq 0$ *et soit* $v$ *la réstriction de* $u$ *à* $F_x$*, alors d'après le lemme 5.15,* $\chi_v = M_x$*, donc* $\chi_v(u)(x) = 0$*. Or, d'après le lemme 5.14,* $\chi_v$ *divise* $\chi_u$*, donc* $\chi_u(u)(x) = 0$*.*

### 5.13.1 Théorème de décomposition des noyaux

**Théorème 5.14.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$. On suppose qu'il existe deux polynômes $P_1$ et $P_2$, tels que

**i)** $P_1$ et $P_2$ sont premiers entre eux, $(P_1 \wedge P_2 = 1)$.

**ii)** $(P_1P_2)(u) = 0$. Alors

$$E = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u))$$

**Preuve**
*On sait que*

$$E = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u)) \Longleftrightarrow \begin{cases} E = \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u)) \\ \ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u)) = \{0\} \end{cases}$$

$P_1$ *et* $P_2$ *sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes* $A$ *et* $B$ *de* $K[X]$*, tels que*

$$AP_1 + BP_2 = 1$$

$$\begin{aligned} AP_1 + BP_2 = 1 &\Longrightarrow (AP_1 + BP_2)(u) = 1(u) && (5.1)\\ &\Longrightarrow A(u) \circ P_1(u) + B(u) \circ P_2(u) = Id_E && (5.2)\\ &\Longrightarrow \forall x \in E,\ x = (A(u) \circ P_1(u))(x) + (B(u) \circ P_2(u))(x) && (5.3) \end{aligned}$$

*Montrons, alors, que* $E = \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u))$*.*
*Soit* $x \in E$*, existe-t-il* $(x_1, x_2) \in \ker(P_1(u)) \times \ker(P_2(u))$*, tel que* $x = x_1 + x_2$ *?*
*Pour* $x \in E$*, posons* $x_1 = (B(u) \circ P_2(u))(x)$ *et* $x_2 = (A(u) \circ P_1(u))(x)$*, alors d'après (5.3), on a* $x = x_1 + x_2$*.*
*D'autre part, on a*

$$\begin{aligned} P_1(u)(x_1) &= P_1(u)((B(u) \circ P_2(u))(x)) \\ &= (P_1(u) \circ B(u) \circ P_2(u))(x) \\ &= (P_1(u) \circ P_2(u) \circ B(u))(x) \qquad (\textit{car deux polynômes en } u \textit{ commutent}) \\ &= (P_1P_2)(u)(B(u)(x)) \\ &= 0 \qquad (\textit{car } (P_1P_2)(u) = 0) \end{aligned}$$

*Donc* $x_1 \in \ker(P_1(u))$*.*
*De la même manière, on montre que* $x_2 \in \ker(P_2(u))$*.*

*Montrons maintenant que* $\ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u)) = \{0\}$.
*Soit* $x \in \ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u)) = \{0\}$, *a-t-on* $x = 0$ *?*
*D'après (5.4), on sait que*

$$\begin{aligned} x &= (A(u) \circ P_1(u))(x) + (B(u) \circ P_2(u))(x) \\ &= A(u)(P_1(u)(x)) + B(u)(P_2(u)(x)) \end{aligned}$$

*Donc* $x = 0$, *car* $P_1(u)(x) = P_2(u)(x) = 0$.

**Corollaire 5.15.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$. On suppose qu'il existe des polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_m$ de $K[X]$, $(m \geq 2)$, tels que

**i)** Les polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_m$ sont deux à deux premiers entre eux.

**ii)** $(P_1 P_2 \ldots P_m)(u) = 0$. Alors

$$E = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u)) \oplus \cdots\cdots \oplus \ker(P_m(u)) = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker(P_i(u))$$

**Preuve (Exercice)**
*On procède par récurrence sur* $m \geq 2$.

**Corollaire 5.16.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$. On suppose qu'il existe deux polynômes $P_1$ et $P_2$, tels que

**i)** $P_1$ et $P_2$ sont premiers entre eux, $(P_1 \wedge P_2 = 1)$.

**ii)** $(P_1 P_2)(u) = 0$.

Alors $E = \ker(P_1(u)) \oplus Im(P_1(u)) = \ker(P_2(u)) \oplus Im(P_2(u))$.

**Preuve**

$$\begin{aligned} (P_1P_2)(u) = 0 &\Longrightarrow P_2(u) \circ P_1(u) = 0 \\ &\Longrightarrow \forall x \in E,\ P_2(u)(P_1(u)(x)) = 0 \\ &\Longrightarrow \forall x \in E,\ P_1(u)(x) \in \ker(P_2(u)) \\ &\Longrightarrow Im(P_1(u)) \subseteq \ker(P_2(u)) \end{aligned}$$

*D'autre part, d'après le théorème de décomposition,* $E = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u))$, *donc*

$$\dim(E) = \dim(\ker(P_1(u))) + \dim(\ker(P_2(u)))$$

*et d'après le théorème du rang, on a*

$$\dim(E) = \dim(\ker(P_1(u))) + \dim(Im(P_1(u)))$$

*Donc, on voit que* $\dim(\ker(P_2(u))) = \dim(Im(P_1(u)))$ *et puisque* $Im(P_1(u)) \subseteq \ker(P_2(u))$, *alors*

$$Im(P_1(u)) = \ker(P_2(u))$$

*d'où le résultat.*

# 5.17 Diagonalisation

## 5.17.1 Valeurs propres - Vecteurs propres

**Définition 5.18.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$. On que $\lambda \in K$ est une valeur propre de $u$ , s'il existe $x \in E$, avec $x \neq 0$, tel que $u(x) = \lambda x$. Dans ce cas, $x$ s'appelle un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$.

**Remarques 5.7**

*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $u$ un endomorphisme de $E$ et $\lambda \in K$, alors*

1.

$$\begin{aligned}(\lambda \ \textit{est une valeur propre de}\, u) &\iff \ker(u - \lambda Id_E) \neq \{0\} \\ &\iff u \ \ \textit{n'est pas injectif}\end{aligned}$$

2. *Si de plus $E$ est de dimension finie, alors*

$$\begin{aligned}(\lambda \ \textit{est une valeur propre de}\, u) &\iff \ker(u - \lambda Id_E) \neq \{0\} \\ &\iff u \ \ \textit{n'est pas injectif} \\ &\iff u \ \ \textit{n'est pas bijectif} \\ &\iff \det(\lambda Id_E - u) = 0\end{aligned}$$

**Théorème 5.19.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

**i)** $\lambda \in K$ est une valeur propre de $u$.

**ii)** $\lambda$ est une racine de $M_u$.

**iii)** $\lambda$ est une racine de $\chi_u$.

**Preuve**

**i) $\Longrightarrow$ ii)** *Supposons que $\lambda$ est une valeur propre de $u$ et montrons que $M_u(\lambda) = 0$.*
*$\lambda$ est une valeur propre, donc il existe $x \in E$, avec $x \neq 0$, tel que $u(x) = \lambda x$.*
*$u(x) = \lambda x$, donc pour tout entier $n \geq 0$, $u^n(x) = \lambda^n x$.*
*Posons $M_u = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{m-1}X^{m-1} + X^m$, alors on aura*

$$\begin{aligned}M_u(u)(x) &= a_0 x + a_1 \lambda x + \cdots + a_{m-1}\lambda^{m-1}x + \lambda^m x \\ &= (a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \lambda^m)x \\ &= M_u(\lambda)x\end{aligned}$$

*Or, on a $M_u(u)(x) = 0$ et $x \neq 0$, alors $M_u(\lambda) = 0$.*

**ii) $\Longrightarrow$ iii)** *Supposons que $M_u(\lambda) = 0$ et montrons que $\chi_u(\lambda) = 0$.*
*$M_u$ divise $\chi_u$ et $M_u(\lambda) = 0$, donc $\chi_u(\lambda) = 0$.*

**iii) $\Longrightarrow$ i)** *Supposons $\chi_u(\lambda) = 0$ et montrons que $\lambda$ est une valeur propre de $u$.*

$$\begin{aligned}\chi_u(\lambda) = 0 &\Longrightarrow \det(\lambda Id_E - u) = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda Id_E - u \ \textit{ est non inversible} \\ &\Longrightarrow \lambda Id_E - u \ \textit{ est non injectif} \quad (\textit{car } E \textit{ est de dimension finie}) \\ &\Longrightarrow \ker(\lambda Id_E - u) \neq \{0\} \\ &\Longrightarrow \lambda \ \textit{ est valeur propre de } u\end{aligned}$$

**Remarques 5.8**

*Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie. Alors pour tout endomorphisme $u$ de $E$, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de $u$ ont mêmes racines sur $K$.*

$$\boxed{\forall \lambda \in K, \ \chi_u(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow M_u(\lambda) = 0}$$

### 5.19.1 Sous-espaces propres

**Définition 5.20.**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel, $u$ un endomorphisme de $E$ et $\lambda \in K$ une valeur propre de $u$. On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda$, le sous-espace vectoriel de $E$, noté $E_\lambda$ et défini par :

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda Id_E)$$

**Remarques 5.9**

1. *($x \in E$ est un vecteur propre de $u$) $\Longleftrightarrow$ ($x \in E_\lambda$ et $x \neq 0$).*
2. *Si $\lambda$ est une valeur propre de $u$, alors $E_\lambda$ est stable par $u$.*
3. *Si $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont deux valeurs propres distinctes de $u$, alors $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.*

**Proposition 5.21.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel, $u$ un endomorphisme de $E$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ des valeurs propres deux à deux distinctes de $u$, alors la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_m}$ est directe.

**Preuve**

*On sait que la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_m}$ est directe, si et seulement si, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ élément de $E_{\lambda_1} \times E_{\lambda_2} \times \cdots \times E_{\lambda_m}$, tel que $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 0$, on a $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$.*
*Soit donc $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E_{\lambda_1} \times E_{\lambda_2} \times \cdots \times E_{\lambda_m}$, tel que $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 0$.*
*a-t-on $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ ?*

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 0 &\Longrightarrow u(x_1 + x_2 + \cdots + x_m) = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m = 0 \\ &\Longrightarrow u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m) = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2 + \cdots + \lambda_m^2 x_m = 0\end{aligned}$$

*Ainsi, par récurrence on voit que* $\forall i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $\lambda_1^i x_1 + \lambda_2^i x_2 + \cdots + \lambda_m^i x_m = 0$. *On obtient donc le système suivant de* $m$ *équations à* $m$ *inconnues :*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{m-1} x_1 + \lambda_2^{m-1} x_2 + \cdots + \lambda_m^{m-1} x_m = 0 \end{cases}$$

*Soit* $\Delta$ *le déterminant de ce système, alors on a*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

*On remarque donc que* $\Delta$ *est un déterminant de Vandermonde, donc on sait que* $\Delta = \prod\limits_{1 \le i < j \le m} (\lambda_j - \lambda_i)$. *Puisque* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ *sont deux à deux distinctes, alors* $\Delta \neq 0$, *donc notre système est un système homogène de Cramer qui a pour unique solution* $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$.

**Définition 5.22.**

Soient $K$ un corps commutatif, $P$ un polynôme de $K[X]$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que $\lambda \in K$ est une racine de $P$ de multiplicité $m$, s'il existe $Q \in K[X]$, tel que

$$P = (X - \lambda)^m Q \ \text{ et } \ Q(\lambda) \neq 0$$

Rappelons que si $P \in K[X]$, avec $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$, on définit le polynôme dérivé de $P$, noté $P'$, par :

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \cdots + (n-1)a_{n-1} X^{n-2} + a_n X^{n-1}$$

**Théorème 5.23.**

Soient $K$ un corps commutatif, $P$ un polynôme de $K[X]$ et $m$ un entier $\geq 1$.
Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

**i)** $\lambda \in K$ est une racine de $P$ de multiplicité $m$.

**ii)** $P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0$ et $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$.

**Preuve**

**i)** $\Longrightarrow$ **ii)** *Supposons que* $\lambda$ *est racine de* $P$ *de multiplicité* $m$, *alors il existe* $Q \in K[X]$, *tel que* $P = (X - \lambda)^m Q$.
*Montrons que* $P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0$ *et* $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$.

*Pour cela, supposons que* $\deg(P) = n$ *et appliquons la formule de Taylor aux polynômes* $P$ *et* $Q$*, alors on aura*

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}(X-\lambda)^k \quad et \quad Q = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{Q^{(k)}(\lambda)}{k!}(X-\lambda)^k$$

*Donc on obtient,*

$$\begin{aligned}(X-\lambda)^m Q &= (X-\lambda)^m \sum_{k=0}^{n-m} \frac{Q^{(k)}(\lambda)}{k!}(X-\lambda)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-m} \frac{Q^{(k)}(\lambda)}{k!}(X-\lambda)^{k+m} \\ &= \sum_{k=m}^{n} \frac{Q^{(k-m)}(\lambda)}{(k-m)!}(X-\lambda)^k\end{aligned}$$

*Puisque* $P = (X-\lambda)^m Q$*, alors par identification des coefficients, on obtient,*

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0 \quad et \quad P^{(m)}(\lambda) = m!Q(\lambda) \quad avec \quad Q(\lambda) \neq 0$$

**ii)** $\Longrightarrow$ **i)** *Supposons que* $P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0$ *et* $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$*, alors on aura,*

$$\begin{aligned}P &= \sum_{k=m}^{n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}(X-\lambda)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\lambda)}{(k+m)!}(X-\lambda)^{k+m} \\ &= (X-\lambda)^m \sum_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\lambda)}{(k+m)!}(X-\lambda)^k\end{aligned}$$

*Donc* $P = (X-\lambda)^m Q$*, où* $Q = \sum\limits_{k=0}^{n-m} \dfrac{P^{(k+m)}(\lambda)}{(k+m)!}(X-\lambda)^k$ *avec* $Q(\lambda) = \dfrac{P^{(m)}(\lambda)}{m!}$.
*Donc* $\lambda$ *est une racine de* $P$ *de multiplicité* $m$.

**Proposition 5.24.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $u$ un endomorphisme de $E$. On suppose que $\lambda \in K$ est une racine de $\chi_u$ de multiplicité $m$, alors on a $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m$.

**Preuve**

$\lambda$ *est une racine de multiplicité* $m$*, donc il existe* $Q \in K[X]$*, tel que* $\chi_u = (X-\lambda)^m Q$*, avec* $Q(\lambda) \neq 0$*. Soit* $p = \dim(E_\lambda)$*, il s'agit donc de montrer que* $p \leq m$*.*
*Soit* $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ *une base quelconque de* $E_\lambda$*,* $v$ *la réstriction de* $u$ *à* $E_\lambda$ *et* $A$ *la matrice de* $u$ *par rapport à la base* $(e_1, e_2, \dots, e_p)$*, alors on a*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

*Donc* $\chi_v = (X-\lambda)^p$. *Or on sait que* $\chi_v$ *divise* $\chi_u$, *donc* $(X-\lambda)^p$ *divise* $(X-\lambda)^m Q$, *avec*

$$\Delta((X-\lambda)^p, Q) = 1 \ \ \textit{car} \ \ Q(\lambda) \neq 0$$

*donc d'après le théorème de Gauss,* $(X-\lambda)^p$ *divise* $(X-\lambda)^m$, *par suite* $p \leq m$.

### 5.24.1 Endomorphismes diagonalisables

**Définition 5.25.**

Soit $K$ un corps commutatif. On dit qu'un polynôme $P \in K[X]$ a toutes ses racines dans $K$ (ou que $P$ est scindé sur $K$), si $P$ s'écrit sous la forme :

$$P = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont les racines deux à deux distinctes de $P$ dans $K$.

**Remarques 5.10**

1. *Si* $K$ *est un corps algèbriquement clos, alors tout polynôme* $P$ *de* $K[X]$ *est scindé sur* $K$.
2. *D'après le théorème de D'Alembert, le corps* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes est algèbriquement clos, donc tout polynôme à coefficients dans* $\mathbb{C}$ *est scindé.*

**Définition 5.26.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$. On dit que $u$ est diagonalisable si

**i)** Le polynôme caractéristique de $u$ est scindé sur $K$.

**ii)** Il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est une matrice diagonalisable.

**Remarques 5.11**

1. *Soient* $E$ *un* $K$*-espace vectoriel de dimension finie* $n$, $u$ *un endomorphisme diagonalisable de* $E$ *et* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ *les valeurs propres de* $u$, *alors il existe une base* $\beta$ *dans laquelle la matrice de* $u$ *s'écrit sous la forme :*

$$Mat(u,\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   *où chaque* $\lambda_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, *apparaît autant de fois que sa multiplicité.*

2. *Une matrice* $A \in M_n(K)$ *est dite diagonalisable sur* $K$, *s'il existe une matrice inversible* $P$ *et il existe une matrice diagonale* $D$, *avec* $P \in M_n(K)$ *et* $D \in M_n(K)$, *telles que* $A = PDP^{-1}$.

**Théorème 5.27.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $u$ un endomorphisme de $E$. On suppose que $\chi_u$ est scindé sur $K$ et soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les racines deux à deux distinctes de $\chi_u$ dans $K$ de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_r$ :

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1}(X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

Alors les propsitions suivantes sont équivalentes :

**i)** $u$ est diagonalisable.

**ii)** $M_u$ n'a que des racines simples ($M_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_r)$).

**iii)** $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$.

**iv)** $\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\},\ \dim(E_{\lambda_i}) = m_i$.

**Preuve**

**i) $\Longrightarrow$ ii)** *Supposons que $u$ est diagonalisable et montrons que $M_u$ n'a que des racines simples. Soit $P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_r)$, puisque $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont des racines deux à deux distintes de $M_u$, alors $P$ divise $M_u$, donc pour conclure, il suffit de montrer que $M_u$ divise $P$.*
*Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base formée de vecteurs propres de $u$. Montrons que*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ P(u)(e_i) = 0$$

*Pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, il existe $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, tel que $(u - \lambda_j Id_E)(e_i) = 0$.*
*Or $P = Q(X - \lambda_j)$, où $Q = \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} (X - \lambda_i)$, donc on aura*

$$P(u)(e_i) = Q(u)((u - \lambda_j)(e_i)) = Q(u)(0) = 0$$

*Ainsi, $P(u) = 0$, par suite $M_u$ divise $P$.*

**ii) $\Longrightarrow$ iii)** *Supposons que $M_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_r)$ et montrons que*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$$

*Pour cela, pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, posons $P_i = X - \lambda_i$, puisque $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont deux à deux distinctes, alors $P_1, P_2, \ldots, P_r$ sonts deux à deux premiers entre eux, donc d'après le théorème de décomposition, on a*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(u - \lambda_i Id_E) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$$

**iii) $\Longrightarrow$ iv)** *Supposons que $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$ et montrons que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on a $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$.*
*Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, soit $p_i = \dim(E_{\lambda_i})$, alors on sait que*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\},\ p_i \leq m_i$$

*Or on a* $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$*, donc* $p_1 + p_2 + \cdots + p_r = n$*, où* $n = \dim(E)$*.*
*D'autre part, comme*

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1}(X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

*et comme* $\deg(\chi_u) = n$*, alors* $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$*. Donc, si on suppose qu'il existe un* $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$*, tel que* $p_i < m_i$*, alors on aura*

$$n = p_1 + p_2 + \cdots + p_r < m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$$

*ce qui est absurde, donc* $\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\},\ p_i = m_i$*.*

**iv)** $\Longrightarrow$ **i)** *Supposons que* $\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$*,* $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$ *et montrons que* $u$ *est diagonalisable. D'après la proposition 5.21, on sait que la somme* $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_r}$ *est directe et puisque*

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) + \cdots + \dim(E_{\lambda_r}) = m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$$

*alors* $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$*. Pour chaque* $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$*, soit* $(e_{i,1}, e_{i,2}, \ldots, e_{i,m_i})$ *une base de* $E_{\lambda_i}$*, alors*

$$(e_{1,1}, e_{1,2}, \ldots, e_{1,m_1}, e_{2,1}, e_{2,2}, \ldots, e_{2,m_2}, \ldots\ldots, e_{r,1}, e_{r,2}, \ldots, e_{r,m_r})$$

*est une base de* $E$ *formée de vecteurs propres de* $u$*.*

**Corollaire 5.28.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$. On suppose que $\chi_u$ est scindé sur $K$ et que $\chi_u$ n'a que des racines simples. Alors $u$ est diagonalisable.

**Preuve**
*On sait que* $M_u$ *divise* $\chi_u$ *et puisque* $\chi_u$ *n'a que des racines simples, alors* $M_u$ *n'a aussi que des racines simples. Donc, d'après le théorème précédent,* $u$ *est diagonalisable.*

**Corollaire 5.29.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$. On suppose que $u$ possède $n$ valeurs propres deux à deux distinctes, alors $u$ est diagonalisable.

**Preuve**
*Soient* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *les valeurs propres deux à deux distinctes de* $u$*, donc* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *sont des racines du polynôme caractéristique* $\chi_u$ *de* $u$*. Or* $\chi_u$ *est de degré* $n$*, donc on a*

$$\chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n)$$

*Par suite,* $\chi_u$ *n'a que des racines simples, donc d'après le corollaire précédent,* $u$ *est diagonalisable.*

**Remarques 5.12**

1. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un projecteur de $E$, alors $u$ est diagonalisable.*
   *En effet, puisque $u^2 = u$, alors $P(u) = 0$, où $P = X(X-1)$, donc $M_u$ divise $P$. Par suite, $M_u$ n'a que des racines simples.*
2. *Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $m$ un entier $\geq 2$ et $u$ un endomorphisme de $E$, tel que $u^m = Id_E$, alors $u$ est diagonalisable.*
   *En effet, soit $P = X^m - 1$, alors $P(u) = 0$, donc $M_u$ divise $P$. Il suffit donc de montrer que $P$ n'a que des racines simples. Pour cela, supposons que $P$ possède une racine $\lambda \in \mathbb{C}$ qui n'est pas simple. Donc on doit avoir $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$, avec $P' = mX^{m-1}$, donc $\lambda = 0$. Ce qui est absurde, car $P(0) \neq 0$.*
3. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ un endomorphisme de $E$ et $\lambda \in K$ une valeur propre de $u$, avec $\lambda \neq 0$. Alors $E_\lambda \subseteq Im(u)$.*
4. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ un endomorphisme diagonalisable de $E$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de $u$ non nuls et deux à deux distincts, alors on a*
   $$E = \ker(u) \oplus E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$$
5. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme diagonalisable de $E$, alors $E = \ker(u) \oplus Im(u)$.*
6. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ un endomorphisme diagonalisable de $E$ et $F$ un sous-espace vectoriel stable par $u$. Soit $v$ la réstriction de $u$ à $F$, alors $v$ est un endomorphisme diagonalisable de $F$.*

**Exercice**
*Soit $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorphisme vérifiant $u^3 - 2u^2 - u + 2Id = 0$, avec $n \geq 2$. Montrer que $u$ est diagonalisable.*

**Solution**
*Soit $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$. On remarque que $P(1) = 0$, donc $X - 1$ divise $P$ et en faisant la division euclidienne de $P$ par $X - 1$, on aura*

$$P = (X-1)(X^2 - X - 2) = (X-1)(X+1)(X-2)$$

*On a $P(u) = 0$, donc $M_u$ divise $P$ et comme $P$ n'a que des racines simples, alors aussi $M_u$ n'a que des racines simples, par suite, $u$ est diagonalisable.*

**Exercice**
*Soient $K$ un corps fini de cardinal $q$, $E$ un $K$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$. Montrer que $u$ est diagonalisable, si et seulement si, $u^q - u = 0$.*

**Solution**
*Comme $K$ est un corps fini de cardinal $q$, alors $K^* = K \setminus \{0_K\}$ est un groupe d'ordre $q-1$ et d'élément neutre $1_K$, donc pour tout $\alpha \in K^*$, on a $\alpha^{q-1} = 1_K$. Par conséquent, pour tout $\alpha \in K$, on a $\alpha^q = \alpha$, donc tout $\alpha \in K$ est racine du polynôme $P = X^q - X$. Or $P$ est de degré $q$ ayant $q$ racines deux à deux distinctes, donc $P$ n'a que des racines simples.*

($\Longrightarrow$) *Supposons que $u$ est diagonalisable et soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ les valeurs propres de $u$. Comme $u$ est diagonalisable, alors $M_u = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_r)$, avec $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\} \subseteq K$, donc $M_u$ divise $P$ et par suite, $P(u) = 0$.*

($\Longleftarrow$) *Supposons que $P(u) = 0$, alors $M_u$ divise $P$ et comme $P$ n'a que des racines simples, alors $M_u$ n'a que des racines simples, donc $u$ est diagonalisable.*

**Exercice**

*Soient $a$ un paramètre réel et $A$ la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par,*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

*Pour quelles valeurs de $a$, la matrice $A$ est diagonalisable ? Dans le cas où $A$ est diagonalisable, déterminer $P$ inversible et $D$ diagonale, telles que $A = PDP^{-1}$.*

**Solution**

*On commence par déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A$ de $A$ :*

$$\chi_A = \det(XI - A) = \begin{vmatrix} X+1 & 0 & -a-1 \\ -1 & X+2 & 0 \\ 1 & -1 & X-a \end{vmatrix} = (X+1)^2(X-a+1)$$

*Donc si $a = 0$, alors $\chi_A = (X+1)^3$, par suite, d'après la remarque 5.27.1, $A$ est diagonalisable, si seulement si, $A = -I$. Pour $a = 0$, on a $A \neq -I$, donc $A$ n'est pas diagonalisable.*
*Si $a \neq 0$, alors les valeurs propres de $A$ sont $\lambda_1$ et $\lambda_2$, avec $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = a - 1$. Dans ce cas, on a*

$$\begin{aligned}
A \text{ est diagonalisable} &\Longleftrightarrow (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0_{M_3(\mathbb{R})} \\
&\Longleftrightarrow (A + I)(A - (a-1)I) = 0_{M_3(\mathbb{R})} \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & a+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & 0 & a+1 \\ 1 & -1-a & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -a-1 & a+1 & a+1 \\ -a-1 & a+1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow a + 1 = 0
\end{aligned}$$

*Donc $A$ est diagonalisable, si et seulement si, $a = -1$.*
*On suppose $a = -1$, alors $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2$ sont les valeurs propres de $A$. Soient $E_1$ et $E_2$ les sous-espaces propres associés respectivement à $-1$ et $-2$ et soit $x \in \mathbb{R}^3$, avec $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, où $(e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors on a*

$$\begin{aligned}
x \in E_1 &\Longleftrightarrow (A + I)x = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow x_2 = x_3
\end{aligned}$$

*Donc $E_1 = Vect(e_1 + e_2, e_3)$.*

*Pour* $x \in \mathbb{R}^3$*, avec* $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$*, on a aussi*

$$\begin{aligned} x \in E_2 &\iff (A+2I)x = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x_1 = 0 \text{ et } x_3 = -x_2 \end{aligned}$$

*Donc* $E_2 = Vect(e_2 - e_3)$.
*Soient* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$*, alors on a* $A = PDP^{-1}$.

**Exercice**
*Soient* $m$ *un paramètre réel et* $A$ *la matrice de* $M_3(\mathbb{R})$ *définie par,*

$$A = \begin{pmatrix} 3-m & m-5 & m \\ -m & m-2 & m \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

*Pour quelles valeurs de* $m$*, la matrice* $A$ *est diagonalisable ? Dans le cas où* $A$ *est diagonalisable, déterminer* $P$ *inversible et* $D$ *diagonale, telles que* $A = PDP^{-1}$.

**Solution**

$$\chi_A = \det(XI - A) = \begin{vmatrix} X-3+m & -m+5 & -m \\ m & X-m+2 & -m \\ -5 & 5 & X+2 \end{vmatrix} = (X-3)(X+2)^2$$

*Donc on aura*

$$\begin{aligned} A \text{ est diagonalisable} &\iff (A-3I)(A+2I) = 0_{M_3(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} -m & m-5 & m \\ -m & m-5 & m \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5-m & m-5 & m \\ -m & m & m \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 5m & -5m & -5m \\ 5m & -5m & -5m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff m = 0 \end{aligned}$$

*Donc* $A$ *est diagonalisable, si et seulement si,* $m = 0$.
*On suppose* $m = 0$*. Soient* $E_1$ *et* $E_2$ *les sous-espaces propres associés respectivement à* $-2$ *et* $3$ *et soit* $x \in \mathbb{R}^3$*, avec* $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$*, où* $(e_1, e_2, e_3)$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*, alors on a*

$$\begin{aligned} x \in E_1 &\iff (A+2I)x = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x_1 = x_2 \end{aligned}$$

*Donc* $E_1 = Vect(e_1+e_2, e_3)$. *On a aussi*

$$\begin{aligned} x \in E_2 &\iff (A-3I)x = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x_2 = 0 \text{ et } x_1 = x_3 \end{aligned}$$

*Donc* $E_2 = Vect(e_1+e_3)$.
*Soient* $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *alors on a* $A = PDP^{-1}$.

**Exercice**
*Soient* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *avec* $tr(A) \neq 0$, *et* $u$ *l'endomorphisme de* $M_n(\mathbb{R})$ *défini par*

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ u(M) = tr(A)M + tr(M)A$$

**a)** *Déterminer les valeurs propres de* $u$ *et les sous-espaces propres associés.*

**b)** *En déduire que* $u$ *est diagonalisable.*

**c)** *Déterminer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal, le déterminant et la trace de* $u$.

**Solution**

**a)** *On remarque que* $u(A) = 2tr(A)A$ *et que si* $tr(M) = 0$, *alors* $u(M) = tr(A)M$, *donc* $\lambda_1 = tr(A)$ *et* $\lambda_2 = 2tr(A)$ *sont des valeurs propres de* $u$.
*Soient* $E_1$ *et* $E_2$ *les sous-espaces propres associés aux valeurs propres* $\lambda_1$ *et* $\lambda_2$, *donc pour* $M \in M_n(\mathbb{R})$, *on a*

$$\begin{aligned} M \in E_1 &\iff u(M) = tr(A)M \\ &\iff tr(A)M + tr(M)A = tr(A)M \\ &\iff tr(M)A = 0 \\ &\iff tr(M) = 0 \quad (\text{car } tr(A) \neq 0 \text{ donc } A \neq 0) \end{aligned}$$

*Ainsi, on a* $E_1 = \ker(tr)$, *où* $tr : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une forme linéaire non nulle, donc* $\ker(tr)$ *est un hyperplan de* $M_n(\mathbb{R})$. *Comme* $tr(A) \neq 0$, *alors* $A \notin \ker(tr)$, *et comme* $\ker(tr)$ *est un hyperplan, alors* $M_n(\mathbb{R}) = \ker(tr) \oplus Vect(A) = E_1 \oplus E_2$.

**b)** *D'apr'es la question précédente, on a* $M_n(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_2$, *donc* $u$ *est diagonalisable.*

**c)** *D'après la question a), on a* $\dim(E_1) = n^2 - 1$ *et* $\dim(E_2) = 1$. *Comme* $u$ *est diagonalisable, alors* $tr(A)$ *est une racine de* $\chi_u$ *de multiplicité* $n^2 - 1$ *et* $2tr(A)$ *une racine simple, par suite, on a* $\chi_u = (X - tr(A))^{n^2-1}(X - 2tr(A))$.
$u$ *est diagonalisable donc* $M_u$ *n'a que des racines simples, par conséquent, on a* $M_u = (X - tr(A))(X - 2tr(A))$.
$u$ *est diagonalisable donc il existe une base dans laquelle la matrice de* $u$ *s'écrit sous la forme :*

$$\begin{pmatrix} tr(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & tr(A) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2tr(A) \end{pmatrix}$$

*par suite, on a* $\det(u) = 2tr(A)^{n^2}$ *et* $tr(u) = (n^2+1)tr(A)$.

### 5.29.1 Diagonalisation simultannée

**Lemme 5.30.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$ et $\lambda \in K$ une valeur propre de $u$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$, alors $E_\lambda$ est stable par $v$.

**Preuve**
*Soit $x \in E_\lambda$, on doit montrer que $v(x) \in E_\lambda$. Pour cela, on a*

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$

*ainsi, on a $u(v(x)) = \lambda v(x)$, donc $v(x) \in E_\lambda$.*

**Théorème 5.31.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de $E$ deux à deux commutant, où $I$ est un ensemble quelconque ayant au moins deux éléments. Alors il existe une base $\beta$ de $E$, tel que pour tout $i \in I$, la matrice de $u_i$ est une matrice diagonale.

**Preuve**
*Faisons une démonstration par récurrence sur $n$, où $n = \dim(E)$.*
*Pour $n = 1$, on a $\dim(E) = 1$, par suite, tout endomorphisme de $E$ est une homothétie, donc dans ce cas, il n'y a rien à démontrer.*
*Supposons que $n > 1$ et que la propriètè est vraie pour tout $K$-espace vectoriel de dimension $m$, avec $m < n$.*
*Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n$ et soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de $E$ deux à deux commutant.*
*Si pour tout $i \in I$, $u_i$ est une homothétie, alors le résultat est trivial.*
*On suppose donc qu'il existe $i \in I$, tel que $u_i$ ne soit pas une homothétie.*
*Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distincts de $u_i$. Comme $u_i$ est diagonalisable, alors on a $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$.*
*D'après le lemme précédent, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ et pour tout $j \in I$, $E_{\lambda_k}$ est stable par $u_j$, donc la réstriction $v_j$ de $u_j$ à $E_{\lambda_k}$ est un endomorphisme de $E_{\lambda_k}$.*
*Or $u_i$ n'est pas une homothétie, donc pour tout $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $\dim(E_{\lambda_k}) < n$ et comme $(v_j)_{j\in I}$ est une famille d'endomorphismes diagonalisables deux à deux commutant, alors d'après l'hypothèse de récurrence, pour chaque $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, il existe une base $\beta_k$ de $E_{\lambda_k}$ formée de vecteurs propres de $u_j$, pour chaque $j \in I$. Soit $\beta = \bigcup\limits_{k=1}^{r} \beta_k$, alors $\beta$ est une de $E$ formée de vecteurs propres de $u_j$, pour chaque $j \in I$.*

**Remarques 5.13**
*Soient $K$ un corps commutatif et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de matrices diagonalisables deux à deux commutant, où $I$ est un ensemble quelconque ayant au moins deux éléments. Alors il existe une matrice inversible $P$, telle que pour tout $i \in I$, la matrice $P^{-1}A_iP$ est diagonale.*

**Corollaire 5.32.**

Soient $E$ est un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u_1, u_2, \dots, u_r$, $r \geq 2$, des endomorphismes diagonalisables de $E$ et deux à deux commutant. Alors pour tout $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K$, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r$ est diagonalisable.

**Preuve**

*Comme $u_1, u_2, \dots, u_r$ sont diagonalisables et deux à deux commutant, alors d'après le théorème précédent, il existe une base $\beta$ de $E$ formée de vecteurs propres communs à $u_1, u_2, \dots, u_r$. On voit donc que $\beta$ est une base formée de vecteurs propres de $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r$.*

## 5.33 Trigonalisation

**Définition 5.34.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$. On dit que $u$ est trigonalisable s'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice $A$ de $u$ s'écrit sous la forme triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Remarques 5.14**

*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ un endomorphisme trigonalisable de $E$. Alors il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice $B$ de $u$ s'écrit sous la forme triangulaire inférieure :*

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n1} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{pmatrix}$$

*En effet, comme $u$ est trigonalisable, alors il existe une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $E$ dans laquelle la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $u$ s'écrit sous la forme triangulaire supérieure. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ la base de $E$ définie pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ par $v_j = e_{n-j+1}$, autrement dit, on $v_1 = e_n, v_2 = e_{n-1}, \dots, v_n = e_1$. Soit $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de $u$ par rapport à la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, alors pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $b_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1}$, donc il est facile de voir que $B$ est une matrice triangulaire inférieure.*

**Théorème 5.35.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$. Alors $u$ est trigonalisable, si et seulement si, le polynôme caractéristique de $u$ est scindé sur $K$.

**Preuve**

($\Longrightarrow$) *Supposons $u$ est trigonalixable, donc, par définition, il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice $A$ de $u$ est triangulaire supérieure :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*Donc le polynôme caractéristique $\chi_u$ de $u$ est donné par :*

$$\chi_u = \det(XI - A) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & X - a_{nn} \end{vmatrix}$$

*Donc $\chi_u = (X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn})$ et comme $\deg(\chi_u) = n$, alors $\chi_u$ a toutes ses racines dans $K$.*

($\Longleftarrow$) *Supposons que $\chi_u$ a toutes ses racines dans $K$ et montrons que $u$ est trigonalisable. Pour cela, on procède par récurrence sur $n$, avec $n = \dim(E)$.*
*Pour $n = 2$, comme $\chi_u$ est scindé sur $K$, alors $\chi_u$ possède au moins une racine $\alpha \in K$, donc $\alpha$ est une valeur propre de $u$. Soit $e_1 \in E$, avec $e_1 \neq 0$, tel que $u(e_1) = 0$ et soit $e_2 \in E$, tel que $e_2 \notin Vect(e_1)$, alors $(e_1, e_2)$ est une base de $E$ et si $u(e_2) = \beta e_1 + \gamma e_2$, alors on a*

$$Mat(u, (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

*Par conséquent, $u$ est triangulaire.*
*Supposons que $n > 2$ et que la propriètè est vraie pour tout endomorphisme d'un $K$-espace vectoriel de dimension $m$, avec $m < n$.*
*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$ dont le polynôme caractéristique $\chi_u$ est scindé sur $K$. Soit $\lambda \in K$ une racine de $\chi_u$ et soit $v : E^* \longrightarrow E^*$ la transposée de $u$. On sait que si $\beta$ est une base de $E$ et si $A$ est la matrice de $u$ par rapport à $\beta$, alors ${}^tA$ est la matrice de $v$ par rapport à la base duale de $\beta$, on en déduit donc que $\chi_v = \chi_u$. Comme $\chi_u(\lambda) = 0$, alors $\chi_v(\lambda) = 0$, donc il existe $\varphi \in E^*$, avec $\varphi \neq 0$, tel que $v(\varphi) = \lambda\varphi$. Soit $F = \ker(\varphi)$, comme $\varphi$ est une forme linéaire non nulle, alors $\dim(F) = n - 1$. Montrons que $F$ est stable par $u$, pour cela, soit $x \in F$, alors on a*

$$< u(x), \varphi >=< x, v(\varphi) >=< x, \lambda\varphi >= \lambda < x, \varphi >$$

*Puisque $x \in F$ et $F = \ker(\varphi)$, alors $< x, \varphi >= 0$, donc $< u(x), \varphi >= 0$, par suite, $u(x) \in F$. On en déduit donc que $F$ est stable par $u$.*
*Soit $w$ la réstriction de $u$ à $F$, alors $w$ est un endomorphisme de $F$. On sait que $\chi_w$ divise $\chi_u$, donc $\chi_w$ est aussi scindé sur $K$ et comme $\dim(F) = n - 1$ alors d'après l'hypothèse de récurrence, $w$ est trigonalisable. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ une base de $F$ dans laquelle la matrice de $w$ est triangulaire supérieure.*
*Soit $x \in E$, avec $x \notin F$, et soit $e_n = x$, alors la matrice de $u$ par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est triangulaire supérieure, donc $u$ est trigonalisable.*

**Remarques 5.15**

1. *Tout endomorphisme diagonalisable est trigonalisable.*

2. *Si $K$ est un corps algèbriquement clos et si $E$ est un $K$-espace vectoriel, alors tout endomorphisme de $E$ est trigonalisable. Donc en particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.*
3. *Si $u$ est un endomorphisme trigonalisable et si $A$ est une matrice triangulaire qui représente $u$ dans une base de $E$, alors les éléments diagonaux de $A$ sont les valeurs propres de $u$, c'est à dire, on a*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

*où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres non nécessirement deux à deux distinctes de $u$. On voit donc que le déterminant et la trace de $u$ s'expriment uniquement en fonction des valeurs propres :*

$$\det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad et \quad tr(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

4. *En particulier, si $\chi_u$ est scindé sur $K$ et si*

$$\chi_u = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r}$$

*alors on a*

$$\begin{cases} \det(u) = \prod\limits_{k=1}^{r} \lambda_k^{m_k} = \lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}\cdots\lambda_r^{\lambda_r} \\ et \\ tr(u) = \sum\limits_{k=1}^{r} m_k\lambda_k = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \cdots + m_r\lambda_r \end{cases}$$

**Proposition 5.36.**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $u$ un endomorphisme de $E$, tel que $\chi_u = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$. Alors on a

$$\det(u) = (-1)^n a_0 \quad \text{et} \quad \text{tr}(u) = -a_{n-1}$$

**Preuve**

*Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, comme $\mathbb{C}$ est algèbriquement clos, alors tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$, donc en particulier, $\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{C}$, par suite, $u$ est trigonalisable. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres, non nécessairement deux à deux distinctes, de $u$, alors on a $\chi_u = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$. Or, d'après la remarque précédente, on a $\det(u) = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $tr(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ et par un développement de $(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n)$, on obtient $(-1)^n \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = a_0$ et $-\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = a_{n-1}$, d'où le résultat.*
*Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère la matrice $A$ de $u$ dans une base de $E$ et on considère l'endomorphisme $v : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ de matrice $A$ dans la base canonique de $\mathbb{C}$. On a alors $\chi_u = \chi_v$, $\det(u) = \det(A) = \det(v)$ et $tr(u) = tr(A) = tr(v)$ et comme $v$ est un $\mathbb{C}$-endomorphisme, alors on aura le résultat.*

**Exercice**

*Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $u$ un endomorphisme de $E$ dont le polynôme minimal $M_u$ s'écrit sous la forme $M_u = a + bX + X^2$, où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $b^2 - 4a < 0$*

a) *Montrer que $n$ est pair.*

b) *Montrer que $\det(u) = a^{\frac{n}{2}}$ et $tr(u) = -\frac{nb}{2}$.*

**Solution**

a) *Supposons, par absurde, que $n$ est impair, donc le polynôme caractéristique de $u$ est de degré impair et par suite, ce polynôme possède au moins une racine réelle $\lambda$, donc $\lambda$ est une racine de $M_u$, car $M_u$ et $\chi_u$ ont mêmes racines.*
*Ce qui est absurde, car $M_u$ n'a aucune racine réelle.*

b) *Soit $\beta$ une base de $E$ et soit $A = mat(u, \beta)$, donc $A \in M_n(\mathbb{R})$. Puisque $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, alors $A \in M_n(\mathbb{C})$ et on a $\chi_A = \chi_u$ et $M_A = M_u$.*
*Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de $M_A$, puisque $M_A \in \mathbb{R}[X]$, alors $\overline{\lambda}$ est aussi une racine de $M_A$.*
*On sait que $\chi_A$ et $M_A$ ont mêmes racines et comme $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, alors on a $\chi_A = (X - \lambda)^p (X - \overline{\lambda})^p$, donc on aura,*

$$\det(A) = \lambda^p \overline{\lambda}^p = (\lambda\overline{\lambda})^p \quad et \quad tr(A) = p\lambda + p\overline{\lambda} = p(\lambda + \overline{\lambda})$$

*Or $\lambda$ et $\overline{\lambda}$ sont les racines du polynôme de second degré $X^2 + bX + a$ donc $\lambda\overline{\lambda} = a$ et $\lambda + \overline{\lambda} = -b$.*

## 5.37 Endomorphismes nilpotents

**Définition 5.38.**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$. On dit que $u$ est nilpotent, s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, tel que $u^m = 0$.

**Remarques 5.16**

1. *L'endomorphisme nul est nilpotent.*

2. *Si $u$ est un endomorphisme nilpotent et si $v$ est un endomorphisme quelconque, tel que $uv = vu$, alors $uv$ est nilpotent.*
*En effet, soit $m \in \mathbb{N}^*$, tel que $u^m = 0$, alors on a $(uv)^m = u^m v^m$, car $uv = vu$, donc $(uv)^m = 0$.*

3. *Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes nilpotents, tels que $uv = vu$, alors $u + v$ est nilpotent.*
*En effet, soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, tels que $u^p = 0$ et $u^q = 0$, alors on a*

$$\begin{aligned}(u+v)^{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} C_{p+q}^k u^k v^{p+q-k} \quad (car\ uv = vu) \\ &= \sum_{k=0}^{p} C_{p+q}^k u^k v^{p+q-k} + \sum_{k=p+1}^{p+q} C_{p+q}^k u^k v^{p+q-k} = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

*car pour $k \in \{0, 1, \ldots, p\}$, on a $p + q - k \geq q$, donc $v^{p+q-k} = 0$,*
*et pour $k \in \{p + 1, \ldots, p + q\}$, on a $k > p$, donc $u^k = 0$.*

4. *Si $u$ est nilpotent, alors $\ker(u) \neq \{0\}$.*

5. *Une matrice $A \in M_n(K)$ est dite nilpotente, s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^m = 0$.*

**Proposition 5.39.**

Soit $u$ un endomorphisme nilpotent, alors il existe $q \in \mathbb{N}^*$, tel que $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$. Dans ce cas, $q$ s'appelle l'indice de nilpotence de $u$.

**Preuve**

*Soit $\mathcal{A} = \{m \in \mathbb{N}^* \ / \ u^m = 0\}$, comme $u$ est nilpotent, alors $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc $\mathcal{A}$ admet un plus petit élément, noté $q$. On a $q \in \mathcal{A}$, donc $u^q = 0$, aussi on a $q - 1 \notin \mathcal{A}$, car $q$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$, donc $u^{q-1} \neq 0$.*

**Remarques 5.17**

*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$ nilpotent non nul d'indice $q$. Alors on a $\boxed{2 \leq q \leq n}$.*

**Proposition 5.40.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

**i)** $u$ est nilpotent.

**ii)** $M_u = X^q$, où $q$ est l'indice de nilpotence de $u$.

**iii)** $\chi_u = X^n$.

**Preuve**

**i) $\Longrightarrow$ ii)** *Supposons que $u$ est nilpotent d'indice $q$, alors on a $u^q = 0$, donc $M_u$ divise $X^q$, par suite, $M_u = X^r$, avec $r \leq q$. Comme $u^{q-1} \neq 0$, alors $r = q$, donc $M_u = X^q$.*

**ii) $\Longrightarrow$ iii)** *Supposons que $M_u = X^q$. Puisque $M_u$ et $\chi_u$ ont les mêmes racines, alors $0$ est l'unique racine de $\chi_u$ et comme $\deg(\chi_u) = n$, alors $\chi_u = X^n$.*

**iii) $\Longrightarrow$ i)** *Supposons que $\chi_u = X^n$, donc d'après le théorème de Cayley Hamilton, on a $u^n = 0$, donc $u$ est nilpotent.*

**Notations**

*Dans la suite, $E$ désigne un $K$-espace vectoriel de dimension $n$ et $u$ un endomorphisme nilpotent non nul d'indice $q$.*
*Pour chaque $i \in \{0, 1, 2, \ldots, q\}$, on pose $E_i = \ker(u^i)$, alors on a*

$$\{0\} = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_{q-1} \subseteq E_q = E$$

**Lemme 5.41.**

**i)** $E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{q-1} \subsetneq E_q$.

**ii)** Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, on a $u(E_{i+1}) \subseteq E_i$.

**Preuve**

**i)** *Il suffit de montrer que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, on a $E_{i+1} \neq E_i$.*
*Pour cela, supposons par absurde qu'il existe $i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, tel que $E_{i+1} = E_i$. Soit $x \in E$, puisque $u^q(x) = 0$, alors $u^{i+1}(u^{q-i-1}(x)) = 0$, donc $u^{q-i-1}(x) \in E_{i+1}$. Comme $E_{i+1} = E_i$, alors $u^{q-i-1}(x) \in E_i$, donc on aura $u^{q-1}(x) = u^i(u^{q-i-1}(x)) = 0$ et ceci pour tout $x \in E$, donc $u^{q-1} = 0$, ce qui est absurde, car $u^{q-1} \neq 0$.*

**ii)** *Soit $x \in E_{i+1}$, alors on a $u^{i+1}(x) = 0$, donc $u^i(u(x)) = 0$, par suite $u(x) \in E_i$.*

**Lemme 5.42.**

Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. On suppose qu'il existe $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$, tel que $F \cap E_i = \{0\}$, alors on a

**i)** $u(F) \cap E_{i-1} = \{0\}$.

**ii)** Si $v$ est la réstriction de $u$ à $F$, alors $v : F \longrightarrow u(F)$ est un isomorphisme.

**Preuve**

**i)** *Soit $y \in u(F) \cap E_{i-1}$, alors il existe $x \in F$, tel que $y = u(x)$ et on a $y \in E_{i-1}$, par suite, on aura $u^i(x) = u^{i-1}(y) = 0$. Ainsi, on a $x \in F \cap E_i$, donc $x = 0$, car $F \cap E_i = \{0\}$, par conséquent, $y = 0$, donc $u(F) \cap E_{i-1} = \{0\}$.*

**ii)** *Il suffit de montrer que $\ker(v) = \{0\}$. Soit $x \in \ker(v)$, alors on a $u(x) = 0$ et $x \in F$, donc $x \in F \cap E_1$. Or, on a $F \cap E_i = \{0\}$, donc $x = 0$, car $E_1 \subseteq E_i$.*

**Lemme 5.43.**

Il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_q$ de $E$, tels que

**a)** Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$, on a

- **i)** $E_i = E_{i-1} \oplus F_i$.
- **ii)** $u(F_i) \subseteq F_{i-1}$.
- **iii)** Si $u_i$ est la réstriction de $u$ à $F_i$, alors $u_i : F_i \longrightarrow F_{i-1}$ est injective.

**b)** $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_q$.

**Preuve**

*D'après le lemme 5.3.1, on a $E_{q-1} \subsetneq E_q$. Soit $F_q$ un supplémentaire de $E_{q-1}$ dans $E_q$, alors on a*

$$E = E_q = E_{q-1} \oplus F_q$$

*On a aussi $E_{q-1} \cap F_q = \{0\}$, donc d'après le lemme précédent, on a $E_{q-2} \cap u(F_q) = \{0\}$ et $u(F_q) \subseteq u(E_q) \subseteq E_{q-1}$. $u(F_q)$ et $E_{q-2}$ sont donc deux sous-espaces vectoriels de $E_{q-1}$, tels que $u(F_q) \cap E_{q-2} = \{0\}$, par suite, il existe un supplémentaire de $E_{q-2}$ dans $E_{q-1}$ qui contient $u(F_q)$. Ce supplémentaire sera noté $F_{q-1}$, alors on a*

$$E_{q-1} = E_{q-2} \oplus F_{q-1} \quad \text{et} \quad u(F_q) \subseteq F_{q-1}$$

*Puis de la même manière, on voit que*

$$E_{q-3} \cap u(F_{q-1}) = \{0\} \quad \text{et} \quad u(F_{q-1}) \subseteq u(E_{q-1}) \subseteq E_{q-2}$$

*et on choisit un supplémentaire de $E_{q-3}$ dans $E_{q-2}$ qui contient $u(F_{q-1})$.*
*Ce supplémentaire sera noté $F_{q-2}$, alors on a*

$$E_{q-2} = E_{q-3} \oplus F_{q-2} \;\; \text{et} \;\; u(F_{q-1}) \subseteq F_{q-2}$$

*Ainsi, par récurrence sur $k \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$, on construit $F_q, F_{q-1}, \ldots, F_1$, tel que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$, on a*

$$E_{q-k} = E_{q-k-1} \oplus F_{q-k} \;\; \text{et} \;\; u(F_{q-k+1}) \subseteq F_{q-k}$$

*Donc en éliminant les $E_k$, pour $k \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$, on obtient*

$$\begin{aligned} E &= E_{q-1} \oplus F_q \\ &= E_{q-2} \oplus F_{q-1} \oplus F_q \\ &\;\vdots \\ &= E_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_q \\ &= F_1 \oplus \cdots \oplus F_q \quad (\text{car } E_0 = \{0\}) \end{aligned}$$

*Soit $u_i$ la réstriction de $u$ à $F_i$, alors d'après le lemme précédent, $u_i : F_i \longrightarrow u(F_i)$ est un isomorphisme et comme $u(F_i) \subseteq F_{i-1}$, alors $u_i : F_i \longrightarrow F_{i-1}$ est injective.*

**Remarques 5.18**

1. *On a $F_1 = \ker(u)$.*
2. *On a $\dim(F_1) \geq \dim(F_2) \geq \cdots \geq \dim(F_q)$.*
3. *Si $q = n$, alors on a $\dim(F_1) = \dim(F_2) = \cdots = \dim(F_n) = 1$.*
4. *Si $n \geq 3$ et $q = n-1$, alors on a $\dim(F_1) = 2$ et $\dim(F_2) = \cdots = \dim(F_n) = 1$.*
5. *Si $n \geq 4$ et $q = n-2$, alors deux cas sont possibles :*
   **i)** $\dim(F_1) = 3$ *et* $\dim(F_2) = \dim(F_3) = \cdots = \dim(F_n) = 1$.
   **ii)** $\dim(F_1) = \dim(F_2) = 2$ *et* $\dim(F_3) = \cdots = \dim(F_n) = 1$.
6. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ est un endomorphisme nilpotent de $E$ d'indice $n$. Alors on a $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$, donc il existe $x_0 \in E$, tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$. Pour chaque $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, soit $e_j = u^{n-j}(x_0)$, alors on a*

$$e_1 = u^{n-1}(x_0), \; e_2 = u^{n-2}(x_0), \; \ldots, \; e_{n-1} = u(x_0) \;\; \text{et} \;\; e_n = x_0$$

*Il est donc facile de vérifier que $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $E$, que $u(e_1) = u^n(x_0) = 0$ et que pour $j \in \{2, \ldots, n\}$, on a*

$$u(e_j) = u^{n-j+1}(x_0) = u^{n-(j-1)}(x_0) = e_{j-1}$$

*Soit $A$ la matrice de $u$ par rapport à la base $\beta$, alors on a*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 5.44 Jordanisation pour un endomorphisme nilpotent

**Définition 5.45.**

On appelle matrice nilpotente de Jordan, toute matrice carrée qui s'écrit sous la forme suivante :

$$N = \begin{pmatrix} \boxed{N_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{N_2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{N_r} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a

$$N_i = (0) \quad \text{ou} \quad N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exemples 5.5**

*Si $n = 3$, alors, à similitude près, il y a deux types de matrice nilpotente de Jordan :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ou \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

**Théorème 5.46.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$ non nul et nilpotent d'indice $q$. Alors il existe une base de $E$, appelée base de Jordan de $u$, dans laquelle la matrice de $u$ est une matrice nilpotente de Jordan.

**Preuve**

*$u$ est un endomorphisme nilpotent d'indice $q$, donc d'après le lemme précédent, il existe des sous-espaces $F_1, F_2, \dots, F_q$ de $E$, tels que*

**a)** *Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, on a*

- **i)** $E_i = E_{i-1} \oplus F_i$.
- **ii)** $u(F_i) \subseteq F_{i-1}$.
- **iii)** *Si $u_i$ est la réstriction de $u$ à $F_i$, alors $u_i : F_i \longrightarrow F_{i-1}$ est injective.*

**b)** $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_q$.

*Soit* $\beta_q = (x_{q,1}, x_{q,2}, \dots, x_{q,m_q})$ *une base de* $F_q$. *Comme* $u_q : F_q \longrightarrow F_{q-1}$ *est injective, alors* $(u(x_{q,1}), u(x_{q,2}), \dots, u(x_{q,m_q}))$ *est une partie libre de* $F_{q-1}$, *donc on peut la compléter en une base de* $F_{q-1}$ *qu'on note* $\beta_{q-1} = (x_{q-1,1}, x_{q-1,2}, \dots, x_{q-1,m_{q-1}})$, *alors on a*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m_q\},\ x_{q-1,i} = u(x_{q,i})$$

$\beta_{q-1} = (x_{q-1,1}, x_{q-1,2}, \dots, x_{q-1,m_{q-1}})$ *est une base de* $F_{q-1}$ *et* $u_{q-1} : F_{q-1} \longrightarrow F_{q-2}$ *est injective, donc* $(u(x_{q-1,1}), u(x_{q-1,2}), \dots, u(x_{q-1,m_{q-1}}))$ *est une patrie libre de* $F_{q-2}$, *donc on peut la compléter en une base de* $F_{q-2}$ *qu'on note* $\beta_{q-2}(x_{q-2,1}, x_{q-2,2}, \dots, x_{q-2,m_{q-2}})$, *alors on a*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m_{q-1}\},\ x_{q-2,i} = u(x_{q-1,i})$$

*Ainsi par induction, pour tout* $j \in \{2, \dots, q\}$, *à partir d'une base* $\beta_j = (x_{j,1}, \dots, x_{j,m_j})$ *de* $F_j$ *on obtient une base* $\beta_{j-1}(x_{j-1,1}, \dots, x_{j-1,m_{j-1}})$ *de* $F_{j-1}$, *telle que*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m_j\},\ x_{j-1,i} = u(x_{j,i})$$

*On a* $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_q$, *alors* $\beta = \bigcup_{j=1}^{q} \beta_j$ *forme une base de* $E$. *Ecrivons les éléments de* $\beta$ *dans un tableau, que nous appelons tableau de Jordan de* $u$, *de la manière suivante :*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_q$ | $x_{q,1}$ | $x_{q,2}$ | $\dots$ | $x_{q,m_q}$ | | | | |
| $F_{q-1}$ | $x_{q-1,1}$ | $x_{q-1,2}$ | $\dots$ | $x_{q-1,m_q}$ | $\dots$ | $x_{q-1,m_{q-1}}$ | | |
| $\vdots$ | | | | | | | | |
| $\vdots$ | | | | | | | | |
| $\vdots$ | | | | | | | | |
| $F_1$ | $x_{1,1}$ | $x_{1,2}$ | $\dots$ | $x_{1,m_q}$ | $\dots$ | $x_{1,m_{q-1}}$ | $\dots$ | $x_{1,m_1}$ |
| | $G_1$ | $G_2$ | $\dots$ | $G_{m_q}$ | $\dots$ | $G_{m_{q-1}}$ | $\dots$ | $G_{m_1}$ |

*Dans ce tableau, pour chaque* $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$, $G_i$ *est le sous-espace vectoriel de* $E$, *engendré par les vecteurs de la* $i^{ieme}$ *colonnes qui forment un système libre, donc ce système constitue une base* $\gamma_i$ *de* $G_i$. *Ecrivons les éléments de* $\gamma_i$ *en commançant du bas de la colonne vers le haut, on aura alors* $\gamma_i = (e_{i,1}, e_{i,2}, \dots, e_{i,r_i})$ *et on aura*

$$\begin{cases} u(e_{i,1}) = 0 \\ u(e_{i,j}) = e_{i,j-1},\ \textit{pour}\ j \in \{2, \dots, r_i\} \end{cases}$$

*Soit* $v_i$ *la réstriction de* $u$ *à* $G_i$. *Comme* $G_i$ *est stable par* $u$, *alors* $v_i$ *est un endomorphisme de* $G_i$ *et la matrice* $N_i$ *de* $v_i$ *par rapport à la base* $\gamma_i$ *s'écrit sous la forme*

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*On a* $E = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_{m_1}$, *donc* $\gamma = \bigcup_{i=1}^{m_1} \gamma_i$ *est une base de* $E$ *et la matrice* $N$

*de u par rapport à cette base s'écrit sous la forme suivante :*

$$N = \begin{pmatrix} \boxed{N_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{N_2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{N_{m_1}} \end{pmatrix}$$

*D'où le résultat.*

**Remarques 5.19**
*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$ non nul et nilpotent d'indice $q$. Rappelons que si $F_1, F_2, \dots, F_q$ sont les sous-espaces définis dans le lemme précédent, alors on a*

— $F_1 = \ker(u)$.
— $\dim(F_1) \geq \dim(F_2) \geq \cdots \geq \dim(F_q)$.

1. *Si $q = n$, alors dans ce cas, on a $\dim(E_{n-1} = \dim(E_{n-2}) = \cdots = \dim(E_1) = 1$. Soit $x_0 \in E$, tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$, alors le tableau de Jordan de $u$ est défini par*

| | |
|---|---|
| $F_n$ | $x_0$ |
| $F_{n-1}$ | $u(x_0)$ |
| $\vdots$ | |
| $\vdots$ | |
| $F_2$ | $u^{n-2}(x_0)$ |
| $F_1$ | $u^{n-1}(x_0)$ |

*Donc une base de Jordan $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est définie pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, par $e_j = u^{n-j}(x_0)$, donc on a $e_1 = u^{n-1}(x_0)$, $e_2 = u^{n-2}(x_0)$, $\dots$, $e_n = x_0$, et la matrice $N$ de $u$ par rapport à cette base est définie par*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Si $n \geq 3$ et $q = n-1$, alors dans ce cas on a $\dim(E_{n-1} = \dim(E_{n-2}) = \cdots = \dim(E_2) = 1$ et $\dim(E_1) = 2$. Soit $x_0 \in E$, tel que $u^{n-2}(x_0) \neq 0$ et soit $y \in \ker(u)$, tel que $(u^{n-2}(x_0), y)$ soit une base de $\ker(u)$, alors le tableau de Jordan de $u$ est défini par*

| | | |
|---|---|---|
| $F_{n-1}$ | $x_0$ | |
| $F_{n-2}$ | $u(x_0)$ | |
| $\vdots$ | | |
| $\vdots$ | | |
| $F_2$ | $u^{n-3}(x_0)$ | |
| $F_1$ | $u^{n-2}(x_0)$ | $y$ |

*Donc une base de Jordan* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ *de* $u$ *est définie par*

$$e_1 = u^{n-2}(x_0),\ e_2 = u^{n-3}(x_0),\ \dots,\ e_{n-1} = x_0,\ e_n = y$$

*et la matrice* $N$ *de* $u$ *dans cette base est définie par*

$$N = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3. *Si* $n \geq 4$ *et* $q = n - 2$, *alors deux cas sont possibles :*

**i)** $\dim(F_1) = \dim(F_2) = 2$ *et* $\dim(F_3) = \cdots = \dim(F_{n-2}) = 1$. *Soit* $x_0 \in E$, *tel que* $u^{n-3}(x_0) \neq 0$ *et soit* $y \in \ker(u^2)$, *tel que* $y \notin \ker(u)$ *et tel que le système* $(u^{n-4}(x_0), y)$ *soit libre, alors le tableau de Jordan de* $u$ *est défini par*

| | | |
|---|---|---|
| $F_{n-2}$ | $x_0$ | |
| $F_{n-3}$ | $u(x_0)$ | |
| $\vdots$ | | |
| $\vdots$ | | |
| $F_2$ | $u^{n-4}(x_0)$ | $y$ |
| $F_1$ | $u^{n-3}(x_0)$ | $u(y)$ |

*Donc une base de Jordan* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ *de* $u$ *est définie par*

$$e_1 = u^{n-3}(x_0),\ e_2 = u^{n-4}(x_0),\ \dots,\ e_{n-2} = x_0,\ e_{n-1} = u(y),\ e_n = y$$

*et la matrice* $N$ *de* $u$ *dans cette base est définie par*

$$N = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

**ii)** $\dim(F_1) = 3$ *et* $\dim(F_2) = \cdots = \dim(F_{n-2}) = 1$.
*Soit* $x_0 \in E$, *tel que* $u^{n-3}(x_0) \neq 0$ *et soient* $y, z \in \ker(u)$, *tels que* $(u^{n-3}(x_0), y, z)$ *soit une base de* $\ker(u)$, *alors le tableau de Jordan de* $u$ *est défini par*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $F_{n-2}$ | $x_0$ | | |
| $F_{n-3}$ | $u(x_0)$ | | |
| $\vdots$ | | | |
| $\vdots$ | | | |
| $F_2$ | $u^{n-4}(x_0)$ | | |
| $F_1$ | $u^{n-3}(x_0)$ | $y$ | $z$ |

*Donc une base de Jordan $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $u$ est définie par*

$$e_1 = u^{n-3}(x_0),\ e_2 = u^{n-4}(x_0),\ \dots,\ e_{n-2} = x_0,\ e_{n-1} = y,\ e_n = z$$

*et la matrice $N$ de $u$ dans cette base est définie par*

$$N = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

**Exemples 5.6**

*Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$ non nul et nilpotent d'indice $q$. Rappelons qu'on a $2 \leq q \leq n$.*

1. *Si $n = 2$, alors $q = 2$, donc d'après la remarque précédente, si $x_0 \in E$, est tel que $u(x_0) \neq 0$, alors $(u(x_0), x_0)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $A$ de $u$ dans cette base est définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Si $n = 3$, alors $q = 3$ ou $q = 2$.*
   — *Si $\dim(\ker(u)) = 1$, alors $q = 3$, donc d'après la remarque précédente, si $x_0 \in E$, tel que $u^2(x_0) \neq 0$, alors $(u^2(x_0), u(x_0), x_0)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $A$ de $u$ dans cette base est définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   — *Si $\dim(\ker(u)) = 2$, alors $q = 2$, donc d'après la remarque précédente, si $x_0 \in E$, tel que $u(x_0) \neq 0$, et si $y \in \ker(u)$, tel que $(u(x), y)$ soit une base de $\ker(u)$, alors $(u(x_0), x_0, y)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $A$ de $u$ dans cette base est définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *Si $n = 4$, alors $q \in \{2, 3, 4\}$.*
   — *Si $\dim(\ker(u)) = 1$, alors $q = 4$, donc d'après la remarque précédente, si $x_0 \in E$, tel que $u^3(x_0) \neq 0$, alors $(u^3(x_0), u^2(x_0), u(x_0), x_0)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $A$ de $u$ dans cette base est définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— *Si* $\dim(\ker(u)) = 2$*, alors* $q = 3$ *ou* $q = 2$*.*

  — *Si* $q = 3$*, alors d'après la remarque précédente, si* $x_0 \in E$*, tel que* $u^2(x_0) \neq 0$*, et si* $y \in \ker(u)$*, tel que* $(u^2(x_0), y)$ *soit une base de* $\ker(u)$*, alors* $(u^2(x_0), u(x_0), x_0, y)$ *est une base de Jordan de* $u$ *et la matrice* $A$ *de* $u$ *dans cette base est définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  — *Si* $q = 2$*, alors d'après la remarque précédente, si* $x_0 \in E$*, tel que* $u(x_0) \neq 0$*, et si* $y \in E$*, tel que* $y \notin \ker(u)$ *et tel que le système* $(x_0, y)$ *soit libre, alors* $(u(x_0), x_0, u(y), y)$ *est une base de Jordan de* $u$ *et la matrice* $A$ *de* $u$ *dans cette base est définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— *Si* $\dim(\ker(u)) = 3$*, alors* $q = 2$*, donc d'après la remarque précédente, si* $x_0 \in E$*, tel que* $u(x_0) \neq 0$*, et si* $y, z \in \ker(u)$*, tels que* $(u(x_0), y, z)$ *soit une base de* $\ker(u)$*, alors* $(u(x_0), x_0, y, z)$ *est une base de Jordan de* $u$ *et la matrice* $A$ *de* $u$ *dans cette base est définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 5.47 Décomposition de Dunford

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$ dont le polynôme caractéristique $\chi_u$ est scindé sur $K$, tel que

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1}(X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont les racines deux à deux distinctes de $\chi_u$. Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on pose $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$ et on pose $N_i = \ker(P_i(u))$, alors pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $N_i$ s'appelle le **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre $\lambda_i$ et on a le théorème suivant, appelé théorème des projecteurs spectraux :

**Théorème 5.48** (projecteurs spectraux).

**i)** Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $N_i$ est stable par $u$

**ii)** $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_r$.

**iii)** Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $\dim(N_i) = m_i$

**iv)** Si pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on désigne par $\pi_i$ la projection sur $N_i$ parallélement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} N_j$, alors $\pi_i$ est un polynôme en $u$ et on a $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_r = Id_E$.

$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ sont appelés les projecteurs spectraux associés à $u$.

**Preuve**

**i)** *Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $P_i(u)$ commute avec $u$, donc $\ker(P_i(u))$ est stable par $u$, par suite, $N_i$ est stable par $u$.*

**ii)** *D'après le théorème de Cayley Hamilton, on a $(P_1 P_2 \cdots P_r)(u) = 0$, où pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$, et comme les $P_i$ sont deux à deux premiers entre eux, alors d'après le théorème de décomposition des noyaux, on a*

$$E = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u)) \oplus \cdots \oplus \ker(P_r(u)) = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_r$$

**iii)** *Posons $n_i = \dim(N_i)$ et soit $u_i$ la réstriction de $u$ à $N_i$, on a alors $(u_i - \lambda_i)^{m_i} = 0$, donc $\lambda_i$ est l'unique racine du polynôme caractéristique $\chi_{u_i}$ de $u_i$ et comme $\deg(\chi_{u_i}) = n_i$, alors $\chi_{u_i} = (X - \lambda_i)^{n_i}$. Or, on sait que $\chi_{u_i}$ divise $\chi_u$, donc d'après le théorème de Gauss, $(X - \lambda_i)^{n_i}$ divise $(X - \lambda_i)^{m_i}$, par suite, on a $n_i \leq m_i$.*
*D'autre part, d'après ii), on a $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ et on a aussi $n = \deg(\chi_u) = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$. On en déduit donc, par absurde, que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on a $n_i = m_i$.*

**iv)** *Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on pose $Q_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} P_j$, alors les $Q_i$ sont premiers entre eux ou premiers dans leur ensemble, donc d'après le théorème de Bezout, il existe $V_1, V_2, \ldots, V_r$ dans $K[X]$, tels que $V_1 Q_1 + V_2 Q_2 + \cdots + V_r Q_r = 1$. Ainsi, on aura*

$$(V_1 Q_1)(u) + (V_2 Q_2)(u) + \cdots + (V_r Q_r)(u) = Id_E$$

*donc pour tout $x \in E$, on a*

$$x = [(V_1 Q_1)(u)](x) + [(V_2 Q_2)(u)](x) + \cdots + [(V_r Q_r)(u)](x)$$

*Par conséquent, si pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on pose $x_i = [(V_i Q_i)(u)](x)$, alors on aura*

$$P_i(u)(x_i) = [(V_i P_i Q_i)(u)](x) = [(V_i \chi_u)(u)](x) = 0$$

*par suite, on a $x_i \in N_i$.*
*Comme $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$, alors, d'après l'unicité de la décomposion dans une somme directe, pour tout $x \in E$, on a $\pi_i(x) = x_i = [(V_i Q_i)(u)](x)$, par conséquent, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on a $\pi_i = (V_i Q_i)(u)$.*

**Théorème 5.49** (décomposition de Dunford).

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$ dont le polynôme caractéristique $\chi_u$ est scindé sur $K$. Alors il existe un unique endomorphisme diagonalisable $d$ et un unique endomorphisme nilpotent $\nu$, tels que $d$ et $\nu$ soient des polynômes en $u$ et tels que

**i)** $u = d + \nu$.

**ii)** $d \circ \nu = \nu \circ d$.

### Preuve

*Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de $u$ et soient $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ les projecteurs spectraux associés à $u$. Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $\pi_i$ est une projection, donc $\pi_i$ est diagonalisable et comme $\pi_i$ est un polynôme en $u$, alors $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ sont deux à deux commutant.*
*Donc, si on pose $d = \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 + \cdots + \lambda_r\pi_r$, alors d'après le corollaire 5.32, $d$ est diagonalisable et comme $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ sont des polynômes en $u$, alors $d$ est aussi un polynôme en $u$.*
*Soit $\nu = u - d$, alors on a $u = d + \nu$ et $\nu$ est un polynôme en $u$, car $d$ est un polynôme en $u$, il suffit donc de montrer que $\nu$ est nilpotent. Pour cela, soit $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ et soit $x \in N_i$, alors on a $\nu(x) = (u - d)(x) = (u - \lambda_i Id_E)(x)$, car pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, avec $j \neq i$, on a $\pi_j(x) = 0$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\nu^m(x) = (u - \lambda_i Id_E)^m(x)$.*
*Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in E$, avec $x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i$, on a*

$$\nu^m(x) = \sum_{i=1}^{r} \nu^m(x_i) = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i Id_E)^m(x_i)$$

*Soit $m = \max(m_1, m_2, \ldots, m_r)$, alors on a $\nu^m = 0$, donc $\nu$ est nilpotent.*
*Supposons qu'il existe $d'$ et $\nu'$ vérifiant les conditions du théorème, alors on aura $u = d + \nu = d' + \nu'$, donc $d - d' = \nu' - \nu$. Comme $d$ et $d'$ sont des polynômes en $u$, alors $d$ et $d'$ commutent et comme $d$ et $d'$ sont diagonalisables, alors d'après le corollaire 5.32, $d - d'$ est diagonalisable. On a aussi $\nu$ et $\nu'$ des polynômes en $u$, donc $\nu$ et $\nu'$ commutent et comme $\nu$ et $\nu'$ sont nilpotents, alors $\nu' - \nu$ est nilpotent. On a $d - d' = \nu' - \nu$, donc $\nu' - \nu$ est à la fois nilpotent et diagonalisable, donc $\nu' - \nu = 0$, par suite $d - d' = 0$.*

### Remarques 5.20

*Soient $K$ un corps commutatif et $A$ une matrice carrée à coefficients dans $K$. On suppose que le polynôme caractéristique de $A$ est scindé sur $K$, alors il existe une matrice diagonalisable $D$ et une matrice nilpotente $N$ à coefficients dans $K$, tel que*

**i)** $A = D + N$.

**ii)** *$D$ et $N$ sont des polynômes en $A$.*

**iii)** $DN = ND$.

## 5.50 Réduction de Jordan

### 5.50.1 Base et matrice de Jordan

**Théorème 5.51.**

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$ dont le polynôme caractéristique $\chi_u$ est scindé sur $K$. On suppose que $\chi_u = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r}$, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont les racines deux à deux distinctes de $\chi_u$. Alors il existe une base de $E$, appelée base de Jordan de $u$, dans laquelle la matrice $J$ de $u$, s'écrit sous la forme suivante :

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \boxed{J_r} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on a

$$J_i = \begin{pmatrix} \boxed{J_{i,1}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \boxed{J_{i,r_i}} \end{pmatrix}$$

et où pour tout $j \in \{1, \ldots, r_i\}$, on a

$$J_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

**Remarques 5.21**

*La matrice $J$ décrite dans le théorème précédent, s'appelle une matrice de Jordan. Donc d'après le théorème précédent, une matrice de Jordan s'écrit sous la forme suivante :*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \ddots & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ où pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \text{ on a } \alpha_1 \in \{0, 1\}$$

*$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de $u$ non nécessairement distinctes et où chaque $\lambda_i$ est écrit sur la diagonale de $J$ autant de fois que sa multiplicité.*

**Preuve**

*Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, soit $N_i$ le sous-espace caractéristique associé à $\lambda_i$ et soit $u_i$ la réstriction de $u$ à $N_i$. Comme $N_i = \ker(P_i(u))$, où $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$, alors $(u_i - \lambda_i)^{m_i} = 0$, donc $u_i - \lambda_i$ est un endomorphisme nilpotent de $N_i$. D'après le théorème 5.46, il existe une base $\beta_i = (e_{i,1}, \ldots, e_{i,m_i})$ de $N_i$ dans laquelle la matrice $A_i$ est une matrice nilpotente de Jordan qui s'écrit sous la forme :*

$$A_i = \begin{pmatrix} \boxed{A_{i,1}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \boxed{A_{i,r_i}} \end{pmatrix}$$

*où pour tout $j \in \{1, \ldots, r_i\}$, $A_{i,j}$ s'écrit sous la forme :*

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Or, on a $u_i = (u_i - \lambda_i) + \lambda_i Id_{N_i}$, donc si $J_i$ est la matrice de $u_i$ par rapport à $\beta_i$, alors on aura $J_i = A_i + \lambda_i I$, donc $J_i$ est sous la forme :*

$$J_i = \begin{pmatrix} \boxed{J_{i,1}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \boxed{J_{i,r_i}} \end{pmatrix}$$

*et où pour tout $j \in \{1, \ldots, r_i\}$, on a*

$$J_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

*On sait que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_r$, donc la matrice $J$ de $u$ par rapport à la base $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ est sous la forme :*

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \boxed{J_r} \end{pmatrix}$$

*D'où le résultat.*

**Corollaire 5.52.**

Pour toute matrice carrée $A$ de $M_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice de Jordan $J$ et il existe une matrice inversible $P$, telles que $A = PJP^{-1}$.

### 5.52.1 Technique de jordanisation en petites dimensions

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$, tel que pour tout $\lambda \in K$, $u - \lambda Id_E \neq 0$. On suppose que le polynôme caractéristique $\chi_u$ est scindé sur $K$ et que

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1}(X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont les racines deux à deux distinctes de $\chi_u$. On désigne par $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$.

**Cas où** $n = 2$

Dans ce cas on a $\chi_u = (X - \lambda)^2$ ou $\chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

**a)** Si $\chi_u = (X - \lambda)^2$, alors il existe $x_0 \in E$, tel que $(u - \lambda Id_E)^2(x_0) \neq 0$. On pose $v_1 = (u - \lambda Id_E)(x_0)$ et $v_2 = x_0$, alors $(v_1, v_2)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $J$ de $u$ par rapport $(v_1, v_2)$ est sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

**b)** Si $\chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $u$ est diagonalisable. Donc si $v_1$ et $v_2$ sont deux vecteurs non nuls, tels que $u(v_1) = \lambda_1 v_1$ et $u(v_2) = \lambda_2 v_2$, alors $(v_1, v_2)$ est une base formée de vecteurs propres de $u$ et la matrice $D$ par rapport à $(v_1, v_2)$ est sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

**Cas où** $n = 3$

Dans ce cas on a

$$\chi_u = (X - \lambda)^3,\ \chi_u = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2) \text{ ou } \chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$$

**a)** Si $\chi_u = (X - \lambda)^3$, on commence par déterminer le sous-espace propre $E_\lambda$ asoocié à $\lambda$, alors deux cas sont possibles :

— Si $\dim(E_\lambda) = 1$, alors $(u - \lambda Id_E)^2 \neq 0$, donc on peut choisir $x_0$, tel que $(u - \lambda Id_E)^2(x_0) \neq 0$. On pose $v_1 = (u - \lambda Id_E)^2(x_0)$, $v_2 = (u - \lambda Id_E)(x_0)$ et $v_3 = x_0$, alors $(v_1, v_2, v_3)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $J$ par rapport à $(v_1, v_2, v_3)$ est sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

— Si $\dim(E_\lambda) = 2$, alors $(u - \lambda Id_E)^2 = 0$.
Dans ce cas, on choisit $x_0$, tel que $(u - \lambda Id_E)(x_0) \neq 0$ et on choisit $y \in E_\lambda$, tel que $((u - \lambda Id_E)(x_0), y)$ soit une base de $E_\lambda$. On pose $v_1 = (u - \lambda Id_E)(x_0)$, $v_2 = x_0$ et $v_3 = y$, alors $(v_1, v_2, v_3)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $J$ par rapport à $(v_1, v_2, v_3)$ est sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

**b)** Si $\chi_u = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors on commence par déterminer les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}$ et $E_{\lambda_2}$. Deux cas sont donc possibles :

— Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 2$, alors $u$ est diagonalisable. On choisit une base $(v_1, v_2)$ de $E_{\lambda_1}$ et un vecteur non nul $v_3$ de $E_{\lambda_2}$, alors $(v_1, v_2, v_3)$ est une base formée de vecteurs propres et la matrice $D$ de $u$ par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

— Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$, alors $u$ n'est pas diagonalisable. On choisit un vecteur $x_0$, tel que $(u-\lambda_1)^2(x_0) = 0$ et $(u-\lambda_1)(x_0) \neq 0$, puis on pose $v_1 = (u-\lambda_1)^2(x_0)$, $v_2 = x_0$ et on choisit un vecteur non nul $v_3$ de $E_{\lambda_2}$, alors $(v_1, v_2, v_3)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $J$ par rapport à $(v_1, v_2, v_3)$ est sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

**c)** Si $\chi_u = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, alors dans ce cas $u$ est diagonalisable. On choisit trois vecteurs non nuls $v_1$, $v_2$ et $v_3$, tels que $v_1 \in E_{\lambda_1}$, $v_2 \in E_{\lambda_2}$ et $v_3 \in E_{\lambda_3}$, alors $(v_1, v_2, v_3)$ est une base formée de vecteurs propres et la matrice $D$ de $u$ par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

**Cas où** $n = 4$

Dans ce cas, le polynôme caractéristique $\chi_u$ s'écrit sous l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned}
\chi_u &= (X-\lambda)^4 \\
\chi_u &= (X-\lambda_1)^3(X-\lambda_2) \\
\chi_u &= (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)^2 \\
\chi_u &= (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)(X-\lambda_3) \\
\chi_u &= (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)(X-\lambda_4)
\end{aligned}$$

**a)** Si $\chi_u = (X-\lambda)^4$, on commence par chercher le sous-espace propre $E_\lambda$, alors trois cas sont possibles :

— Si $\dim(E_\lambda) = 1$, alors $(u-\lambda Id_E)^3 \neq 0$. On choisit alors $x_0 \in E$, tel que $(u-\lambda Id_E)^3(x_0) \neq 0$, puis on pose

$$v_1 = (u-\lambda Id_E)^3(x_0),\ v_2 = (u-\lambda Id_E)^2(x_0),\ v_3 = (u-\lambda Id_E)(x_0) \text{ et } v_4 = x_0$$

alors $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $J$ par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

— Si $\dim(E_\lambda) = 2$ alors $(u-\lambda Id_E)^3 = 0$, donc deux cas sont possibles :

— Si $(u-\lambda Id_E)^2=0$, on choisit deux vecteurs $x_0$ et $y_0$, tels que le système $(x_0,y_0)$ soit libre, $(u-\lambda Id_E)(x_0)\neq 0$ et $(u-\lambda Id_E)(y_0)\neq 0$, puis on pose

$$v_1=(u-\lambda Id_E)(x_0),\ v_2=x_0,\ v_3=(u-\lambda Id_E)(y_0) \text{ et } v_4=y_0$$

alors $(v_1,v_2,v_3,v_4)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $J$ par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

— Si $(u-\lambda Id_E)^2\neq 0$, on choisit $x_0$, tel que $(u-\lambda Id_E)^2(x_0)\neq 0$ et on choisit $y\in E_\lambda$, tel que $((u-\lambda Id_E)^2(x_0),y)$ soit une base de $E_\lambda$, puis on pose

$$v_1=(u-\lambda Id_E)^2(x_0),\ v_2=(u-\lambda Id_E)(x_0),\ v_3=x_0 \text{ et } v_4=y$$

alors $(v_1,v_2,v_3,v_4)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $J$ par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

— Si $\dim(E_\lambda)=3$ alors $(u-\lambda Id_E)^2=0$. On choisit $x_0\in E$, tel que $(u-\lambda Id_E)(x_0)\neq 0$ et on choisit deux vecteurs $y$ et $z$ dans $E_\lambda$, tels que $((u-\lambda Id_E)(x_0),y,z)$ soit une base de $E_\lambda$, puis on pose

$$v_1=(u-\lambda Id_E)(x_0),\ v_2=x_0,\ v_3=y \text{ et } v_4=z$$

alors $(v_1,v_2,v_3,v_4)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $J$ par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$J=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

**b)** Si $\chi_u=(X-\lambda_1)^3(X-\lambda_2)$, avec $\lambda_1\neq\lambda_2$, on commence par chercher le sous-espace propre $E_{\lambda_1}$, alors trois cas sont possibles :

— Si $\dim(E_{\lambda_1})=3$, alors $u$ est diagonalisable, donc si $(v_1,v_2,v_3)$ est une base de $E_{\lambda_1}$ et si $v_4$ est un vecteur non nul de $E_{\lambda_2}$, alors $(v_1,v_2,v_3,v_4)$ est une base de $E$ formée de vecteurs propres de $u$. La matrice $D$ de $u$ par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

— Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 2$, alors $u$ n'est pas diagonalisable. On choisit $x_0$, tel que $(u - \lambda Id_E)^2(x_0) = 0$ et $(u - \lambda Id_E)(x_0) \neq 0$ et on choisit $y \in E_{\lambda_1}$, tel que $((u - \lambda Id_E)(x_0), y)$ soit une base de $E_{\lambda_1}$, puis on pose

$$v_1 = (u - \lambda Id_E)(x_0),\ v_2 = x_0,\ v_3 = y \ \text{ et } \ v_4 \in E_{\lambda_2},\ \text{avec } v_4 \neq 0$$

alors $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $J$ par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

— Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$, on choisit un vecteur $x_0$, tel que $(u - \lambda Id_E)^3(x_0) = 0$ et $(u - \lambda Id_E)^2(x_0) \neq 0$, puis on pose

$$v_1 = (u - \lambda_1 Id_E)^2(x_0),\ v_2 = (u - \lambda_1 Id_E)(x_0),\ v_3 = x_0 \ \text{ et } \ v_4 \in E_{\lambda_2},\ \text{avec } v_4 \neq 0$$

alors $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $J$ par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

**c)** Si $\chi_u = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)^2$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on commence par chercher les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}$ et $E_{\lambda_2}$, alors trois cas sont possibles :

— Si $\dim(E_{\lambda_1}) = \dim(E_{\lambda_2}) = 2$, alors $u$ est diagonalisable, donc si $(v_1, v_2)$ est une base de $E_{\lambda_1}$ et si $(v_3, v_4)$ est une base de $E_{\lambda_2}$, alors $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $E$ formée de vecteurs propres de $u$. La matrice $D$ de $u$ par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

— Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$ et $\dim(E_{\lambda_2}) = 2$, alors $u$ n'est pas diagonalisable. On choisit $x_0$, tel que $(u - \lambda_1 Id_E)^2(x_0) = 0$ et $(u - \lambda_1 Id_E)(x_0) \neq 0$ et on choisit une base $(v_3, v_4)$ de $E_{\lambda_2}$, puis on pose

$$v_1 = (u - \lambda_1 Id_E)(x_0) \ \text{ et } \ v_2 = x_0$$

alors $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $J$ par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

— Si $\dim(E_{\lambda_1}) = \dim(E_{\lambda_2}) = 1$, on choisit $x_0$, tel que $(u - \lambda_1 Id_E)^2(x_0) = 0$ et $(u - \lambda_1 Id_E)(x_0) \neq 0$ et on choisit $y_0$, tel que $(u - \lambda_2 Id_E)^2(y_0) = 0$ et $(u - \lambda_1 Id_E)(y_0) \neq 0$, puis on pose

$$v_1 = (u - \lambda_1 Id_E)(x_0),\ v_2 = x_0,\ v_3 = (u - \lambda_2 Id_E)(y_0) \ \text{ et } \ v_4 = y_0$$

alors $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $J$ par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

**d)** Si $\chi_u = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, on commence par chercher les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}$, $E_{\lambda_2}$ et $E_{\lambda_3}$, alors deux cas sont possibles :

— Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 2$, alors $u$ est diagonalisable. Donc si on choisit une base $(v_1, v_2)$ de $E_{\lambda_1}$, un vecteur non nul de $E_{\lambda_2}$ et un vecteur non nul de $E_{\lambda_3}$, alors $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $E$ formée de vecteurs propres de $u$. La matrice $D$ de $u$ par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

— Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$, alors $u$ n'est pas diagonalisable. On choisit un vecteur $x_0$, tel que $(u - \lambda_1 Id_E)^2(x_0) = 0$ et $(u - \lambda_1 Id_E)(x_0) \neq 0$ et on choisit deux vecteurs non nuls $v_3 \in E_{\lambda_2}$ et $v_4 \in E_{\lambda_3}$, puis on pose

$$v_1 = (u - \lambda_1 Id_E)(x_0) \text{ et } v_2 = x_0$$

alors $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de Jordan de $u$ et la matrice $J$ par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

**e)** Si $\chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)(X - \lambda_4)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$, alors $u$ est diagonalisable. On choisit quatre vecteurs non nuls $v_1$, $v_2$, $v_3$ et $v_4$, tels que $v_1 \in E_{\lambda_1}$, $v_2 \in E_{\lambda_2}$, $v_3 \in E_{\lambda_3}$ et $v_4 \in E_{\lambda_4}$, alors $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $E$ formée de vecteurs propres de $u$. La matrice $D$ de $u$ par rapport à cette base s'écrit sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

# 6 Applications de la réduction

## 6.1 Calcul de l'exponentielle d'une matrice

### 6.1.1 Norme d'une matrice

**Proposition 6.2.**

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose

$$N(A) = \sup\left(\left\{\frac{\|AX\|}{\|X\|} \ : \ X \in \mathbb{C}^n, \text{ avec } X \neq 0\right\}\right) = \sup_{\substack{X\in\mathbb{C}^n\\ X\neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

où $\|\cdot\|$ est l'une des normes usuelle de $\mathbb{C}^n$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$. Alors

**i)** Pout tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $N(A) = \sup\limits_{\|X\|=1} \|AX\|$.

**ii)** L'application $N : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.

**iii)** $N(I) = 1$, où $I$ est la matrice identité.

**iv)** $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \forall B \in M_n(\mathbb{C}),\ N(AB) \leq N(A)N(B)$.

**Preuve**

**i)** *Comme* $N(A) = \sup\limits_{\substack{X\in\mathbb{C}^n\\ X\neq 0}} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$, *alors* $\sup\limits_{\|X\|=1} \|AX\| \leq N(A)$.

*Soit* $X \in \mathbb{C}^n$, *tel que* $X \neq 0$, *on pose* $Y = \dfrac{X}{\|X\|}$, *alors* $\|Y\| = 1$, *donc* $\|AY\| \leq \sup\limits_{\|X\|=1} \|AX\|$. *On en déduit que* $\dfrac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \sup\limits_{\|X\|=1} \|AX\|$, *ceci pour tout* $X \neq 0$, *donc* $N(A) \leq \sup\limits_{\|X\|=1} \|AX\|$.

**ii)** *Si* $N(A) = 0$, *alors pour tout* $X \in \mathbb{C}^n$, *on a* $\|AX\| = 0$, *donc pour tout* $X \in \mathbb{C}^n$, *on a* $AX = 0$, *par suite*, $A = 0$.
*Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$ *et soit* $A \in M_n(\mathbb{C})$, *alors on a*

$$N(\lambda A) = \sup_{\|X\|=1} \|(\lambda A)X\| = |\lambda| \sup_{\|X\|=1} \|AX\| = |\lambda| N(A)$$

*Soient* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *et* $B \in M_n(\mathbb{C})$, *alors on a*

$$N(A+B) = \sup_{\|X\|=1} \|AX + BX\| \leq \sup_{\|X\|=1} \|AX\| + \sup_{\|X\|=1} \|BX\| \leq N(A) + N(B)$$

**iii)** *Pour tout* $X \in \mathbb{C}^n$, *on a* $IX = X$, *donc* $N(I) = 1$.

**iv)** *Soient* $A \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in M_n(\mathbb{C})$ *et* $X \in \mathbb{C}^n$, *alors on a*

$$\|ABX\| = \|A(BX) \leq N(A)\|BX\| \leq N(A)N(B)\|X\|$$

*on en déduit donc que* $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

**Remarques 6.1**

1. *Dans la suite, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $N(A) = \|A\|$.*
2. *$(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ est donc un espace normé de dimension finie, par suite, $M_n(\mathbb{C})$ est complet.*
3. *Rappelons qu'une suite $(A_n)_{n\geq 0}$ de $M_n(\mathbb{C})$ est dite de Cauchy, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N},\ (n \geq N \ et\, m \geq N) \Longrightarrow \|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$$

### 6.2.1 Exponentielle d'une matrice

Rappelons que la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ comme étant la fonction réciproque du logarithme, puis grace à la formule de Taylor, on montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
Pour $z \in \mathbb{C}$, par analogie, en utilisant les séries entières, on définit l'exponentielle de $z$ par $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
Dans la suite, nous allons utiliser la même analogie pour définir l'exponentielle d'une matrice.

**Proposition 6.3.**

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, la suite $(V_p)_{p\geq 0}$ définie pour tout $p \in \mathbb{N}$ par $V_p = \sum\limits_{n=0}^{p} \frac{A^n}{n!}$ est convergente.

**Preuve**
*Il suffit de montrer que $(V_p)_{p\geq 0}$ est une suite de Cauchy. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$, avec $p > q$, alors on a*

$$\|V_p - V_q\| = \left\| \sum_{n=q+1}^{p} \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=q+1}^{p} \frac{\|A\|^n}{n!}$$

*Or la série numérique $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}$ est convergente, donc $\lim\limits_{p,q\to\infty} \sum\limits_{n=q+1}^{p} \frac{\|A\|^n}{n!} = 0$, par suite, $\lim\limits_{p,q\to\infty} \|V_p - V_q\| = 0$. D'où le résultat.*

**Définition 6.4.**

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on définit l'exponentielle de $A$, par

$$\exp(A) = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=0}^{p} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

**Exemples 6.1**

1. *Si $N$ est une matrice nilpotente d'indice $q$, alors on a*

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!}$$

2. *Si $D$ est une matrice diagonale, avec*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

*alors on a*

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

3. *Si $A$ est une matrice diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P$, telles que $A = PDP^{-1}$. Dans ce cas, on voit facilement que $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$.*
4. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, telle que $A^2 - 3A + 2I = 0$. On se propose de déterminer $\exp(A)$ en calculant $A^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Pour cela, on fait la division euclidienne de $X^n$ par $X^2 - 3X + 2$, alors on a*

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n + R_n, \text{ avec } \deg(R_n) < 2$$

*Comme $\deg(R_n) < 2$, alors il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, tel que $R_n = a_nX + b_n$.*
*On a $A^2 - 3A + 2I = 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = a_nA + b_nI$.*
*Pour le calcul de $a_n$ et $b_n$ on remarque que $1$ et $2$ sont racines de $X^2 - 3X + 2$, puis en substituant $X$ à $1$ et $2$, on obtient le système suivant :*

$$\begin{cases} 1 = a_n + b_n \\ 2^n = 2a_n + b_n \end{cases}$$

*on en déduit donc que $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$, par suite on aura*

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{n!}\right) A + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - 2^n}{n!}\right) I$$

*Ainsi, on aura $\exp(A) = (e^2 - e)A + (2e - e^2)I$*

**Proposition 6.5.**

Soient $A$ et $B$ deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$, telles que $AB = BA$, alors on a

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$$

**Preuve**

*Rappelons que le produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général $w_n$ est défini par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$$

*Rappelons aussi que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors $\sum w_n$ est convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$$

$$\begin{aligned}
\exp(A+B) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} A^p B^{n-p}\right) \qquad (\textit{car } AB = BA) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{A^p}{p!} \frac{B^{n-p}}{(n-p)!}\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}\right) \\
&= \exp(A)\exp(B)
\end{aligned}$$

**Remarques 6.2**

*Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors $A$ possède une décomposition de Dunford sous la forme $A = D + N$, où $D$ est une matrice diagonalisable et $N$ une matrice nilpotente, telles que $DN = ND$. Donc d'après la proposition précédente, on a*

$$\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$$

**Proposition 6.6.**

Soit $K$ un corps commutatif. Pour toute matrice $A \in M_n(K)$, on pose $K[A] = \{P(A) \, : \, P \in K[X]\}$. Alors $K[A]$ est un $K$-espace vectoriel de dimension finie, avec $\dim(K[A]) = m$, où $m$ est le degré du polynôme minimal de $A$.

**Preuve**

*Il est facile de vérifier que $K[A]$ est un $K$-espace vectoriel. Soit $M_A$ le polynôme caractéristique de $A$ et soit $B \in K[A]$, alors il existe $P \in K[X]$, tel que $B = P(A)$. Faisons la division euclidienne de $P$ par $M_A$, alors on a $P = QM_A + R$, avec* $\deg(R) < \deg(M_A)$. *Soit $m = \deg(M_A)$, alors $R = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{m-1}X^{m-1}$, donc $B = \alpha_0 + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{m-1}A^{m-1}$, avec $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} \in K$. On en déduit donc que $\{I, A, \ldots, A^{m-1}\}$ est une partie génératrice de $K[A]$, de plus si on suppose que $\alpha_0 + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{m-1}A^{m-1} = 0$, alors $R(A) = 0$, par suite $M_A$ divise $R$, avec* $\deg(R) < \deg(M_A)$, *donc $R = 0$ et par conséquent, $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$. Ainsi, on voit que $(I, A, \ldots, A^{m-1})$ est une base de $K[A]$, donc* $\dim(K[A]) = m$.

**Corollaire 6.7.**

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, l'exponentielle de $A$ est un polynôme en $A$.

**Preuve**

*Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et soit $(A_p)_{p\geq 0}$ la suite définie pour tout $p \in \mathbb{N}$ par $A_p = \sum\limits_{n=0}^{p} \dfrac{A^n}{n!}$. On a* $\exp(A) = \lim\limits_{p\to\infty} A_p$ *et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $A_p \in \mathbb{C}[A]$, avec $\mathbb{C}[A]$ fermé, car $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace de dimension finie, par suite,* $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$, *donc il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que* $\exp(A) = P(A)$.

**Remarques 6.3**
*Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et soit $\chi_A = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r}$, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont deux à deux distincts. Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on pose $P_i = \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(X-\lambda_j)^{m_j}$, alors $P_1, P_2, \ldots, P_r$ sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bezout, il existe $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r \in \mathbb{C}[X]$, tels que $Q_1P_1 + Q_2P_2 + \cdots + Q_rP_r = 1$. Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on pose $\Pi_i = Q_i(A)P_i(A)$, alors d'après le théorème 5.48, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $\Pi_i$ est la projection sur $N_i$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} N_j$, où pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on a $N_i = \ker[(A-\lambda_i I)^{m_i}]$.*

1. *Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on a*
$$(A-\lambda_i I)^{m_i}\Pi_i = (A-\lambda_i I)^{m_i}P_i(A)Q_i(A) = Q_i(A)\chi_A(A) = 0$$
*Donc pour tout $k \geq m_i$, on a $(A-\lambda_i I)^k\Pi_i = 0$, par suite, on aura*
$$\exp(A-\lambda_i I)\Pi_i = \left(\sum_{k=0}^{m_i-1}\frac{(A-\lambda_i I)^k}{k!}\right)\Pi_i$$
*On en déduit donc que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on a*
$$\exp(A)\Pi_i = \exp(\lambda_i I + (A-\lambda_i I))\Pi_i = e^{\lambda_i}\exp(A-\lambda_i I)\Pi_i = e^{\lambda_i}\sum_{k=0}^{m_i-1}\frac{(A-\lambda_i I)^k}{k!}\Pi_i$$
*Or, on a $\Pi_1 + \Pi_2 + \cdots + \Pi_r = I$, donc on a*
$$\exp(A) = \exp(A)\Pi_1 + \exp(A)\Pi_2 + \cdots + \exp(A)\Pi_r$$
*par conséquent, on a*
$$\boxed{\exp(A) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i}\sum_{k=0}^{m_i-1}\frac{(A-\lambda_i I)^k}{k!}\Pi_i}$$

2. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, en considérant la matrice $tA$ au lieu de $A$, alors $tA$ a pour valeurs propres $t\lambda_1, t\lambda_2, \ldots, t\lambda_r$ de plus $A$ et $tA$ ont mêmes projecteurs spectraux, donc on aura*
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tA) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t}\sum_{k=0}^{m_i-1}\frac{t^k(A-\lambda_i I)^k}{k!}\Pi_i}$$

3. *Le cas particulier où $A$ n'a qu'une seule valeur propre $\lambda$, on a $\chi_A = (X-\lambda)^n$. Donc d'après le théorème de Cayley Hamilton, on a $(A-\lambda I)^n = 0$, par suite, $A-\lambda I$ est une matrice nilpotente. Soit $q$ l'indice de nilpotence de $A-\lambda I$, alors en remarquant que $A = \lambda I + (A-\lambda I)$, on aura*
$$\exp(A) = e^{\lambda}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{(A-\lambda I)^k}{k!}$$
*par suite, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*
$$\exp(tA) = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{t^k(A-\lambda I)^k}{k!}$$

## 6.8 Systèmes et équations différentiels linéaires

### 6.8.1 Définition d'un système différentiel

**Définition 6.9.**

Un système différentiel est un système d'équations différentielles s'écrivant sous la forme suivante :

$$(S)\ :\ \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

où pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction inconnue de classe $C^1$ et où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

**Remarques 6.4**

*Posons*

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

*alors $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est une fonction inconnue de classe $C^1$ et le système $(S)$ s'écrit sous la forme matricielle suivante :*

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

*Par analogie à la dimension 1, on montre que la solution générale de ce système s'écrit sous la forme suivante :*

$$\boxed{X(t) = \exp(tA)X_0,\ \textit{avec } X_0 \in \mathbb{C}^n}$$

### 6.9.1 Résolution pratique d'un système différentiel

**Méthode utilisant directement l'exponentielle**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de $A$, deux à deux distincts, de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_r$, alors d'après la remarque 6.3, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(tA)X_0 = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{m_i - 1} \frac{t^k (A - \lambda_i I)^k}{k!} \Pi_i X_0$$

où pour tout $i \in \{1,2,\ldots,r\}$, $\Pi_i$ est la projection sur $N_i$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} N_j$, où pour tout $i \in \{1,2,\ldots,r\}$, on a $N_i = \ker[(A-\lambda_i I)^{m_i}]$.
Pour chaque $i \in \{1,2,\ldots,r\}$ et pour chaque $k \in \{1,2,\ldots,m_i-1\}$, on pose

$$X_k = \frac{(A-\lambda_i I)^k}{k!}\Pi_i X_0$$

alors on a $X_k \in N_i$, donc la solution général du système s'écrit sous la forme :

$$\boxed{X(t) = \sum_{i=1}^{r} \mathsf{e}^{\lambda_i t} P_i(t)}$$

où pour chaque $i \in \{1,2,\ldots,r\}$, $P_i(t) = \sum\limits_{k=0}^{m_i-1} t^k X_k$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $m_i - 1$ et à coefficients dans $N_i$.

**Remarques 6.5**

1. *Si $A$ est une matrice diagonalisable et si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de $A$, deux à deux distincts de $A$, alors la solution générale du système $X'(t) = AX(t)$ s'écrit sous la forme :*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{r} \mathsf{e}^{\lambda_i t} V_i$$

*où pour tout $i \in \{1,2,\ldots,r\}$, $V_i$ est un vecteur propre quelconque associé à la valeur propre $\lambda_i$. Donc si pour tout $i \in \{1,2,\ldots,r\}$, $(V_{ij})_{1\leq j\leq m_i}$ est une base de $E_{\lambda_i}$, le sous-espace propre associé à $\lambda_i$, et si on pose $V_i = \sum\limits_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} V_{ij}$, alors on a*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} \mathsf{e}^{\lambda_i t} V_{ij}$$

*De plus pour chaque $i \in \{1,2,\ldots,r\}$ et pour chaque $j \in \{1,2,\ldots,m_i\}$, il est facile de voir que $\mathsf{e}^{\lambda_i t} V_{ij}$ est une solution du système et que $(\mathsf{e}^{\lambda_i t} V_{ij})_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq m_i}}$ est une base de l'ensemble des solutions du système.*

2. *Si $A$ n'est pas diagonalisable, et si pour chaque $i \in \{1,2,\ldots,r\}$, on considère une base $(V_{ij})_{1\leq j\leq m_i}$ de $N_i$, le sous-espace caractéristique associé à $\lambda_i$, et pour chaque $j \in \{1,2,\ldots,m_i\}$, on pose*

$$X_{ij}(t) = \mathsf{e}^{\lambda_i t}\sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k (A-\lambda_i I)^k}{k!} V_{ij}$$

*alors il est facile de voir que chaque $X_{ij}$ est une solution du système et $(X_{ij})_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq m_i}}$ est une base de l'ensemble des solutions du système. Ainsi pour toute solution $X$ du système, il existe $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m_1}, \ldots, \alpha_{r1}, \ldots, \alpha_{rm_r}) \in \mathbb{R}^n$, tel que*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} X_{ij}(t)$$

*Les $\alpha_{ij}$ sont déterminés à l'aide de la condition initiale $X(0) = X_0$.*

**Exemples 6.2**

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$*, alors* $A$ *possède deux valeurs propres distinctes* $1$ *et* $2$*, donc* $A$ *est diagonalisable. La solution du système* $X'(t) = AX(t)$ *est sous la forme* $X(t) = e^t V_1 + e^{2t} V_2$*, où* $V_1$ *et* $V_2$ *sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres* $1$ *et* $2$*. On effectuant le calcul on voit que* $V_1 = \alpha e_1$ *et* $V_2 = \beta(e_1 + e_2)$*, où* $(e_1, e_2)$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^2$*.*
*On a* $X(0) = (\alpha + \beta)e_1 + \beta e_2 = x_0 e_1 + y_0 e_2$*, donc on a* $\alpha = x_0 - y_0$ *et* $\beta = y_0$*, par suite, on a* $X(t) = (x_0 e^t + y_0(e^{2t} - e^t))e_1 + y_0 e^{2t} e_2$*. En particulier, on a*
$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

2. *Soit* $A$ *la matrice de* $M_n(\mathbb{R})$ *définie par*
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
*Déterminons la solution du système différentiel homogène* $X'(t) = AX(t)$ *et déduisons* $\exp(tA)$*.*
*On a* $\chi_A = (X-2)^2(X-1)$*,* $(e_1 + e_3, e_2 + e_3)$ *une base de* $E_2$ *et* $e_1 + e_2 + 3e_3$ *une base de* $E_1$*. Donc d'après ce qui précède, on a*
$$\begin{aligned} X(t) &= \alpha e^{2t}(e_1 + e_3) + \beta e^{2t}(e_2 + e_3) + \gamma e^t(e_1 + e_2 + 3e_3) \\ &= (\alpha e^{2t} + \gamma e^t)e_1 + (\beta e^{2t} + \gamma e^t)e_2 + (\alpha e^{2t} + \beta e^{2t} + 3\gamma e^t)e_3 \end{aligned}$$
*On a* $X(0) = X_0 = x_0 e_1 + y_0 e_2 + z_0 e_3 = (\alpha + \gamma)e_1 + (\beta + \gamma)e_2 + (\alpha + \beta + 3\gamma)e_3$*, donc on a*
$$\begin{cases} \alpha + \gamma = x_0 \\ \beta + \gamma = y_0 \\ \alpha + \beta + 3\gamma = z_0 \end{cases}$$
*On en déduit que* $\alpha = 2x_0 + y_0 - z_0$*,* $\beta = x_0 + 2y_0 - z_0$ *et* $\gamma = -x_0 - y_0 + z_0$*. Donc on a* $X(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3$*, avec*
$$\begin{cases} x(t) = (2e^{2t} - e^t)x_0 + (e^{2t} - e^t)y_0 + (e^t - e^{2t})z_0 \\ y(t) = (e^{2t} - e^t)x_0 + (2e^{2t} - e^t)y_0 + (e^t - e^{2t})z_0 \\ z(t) = (3e^{2t} - 3e^t)x_0 + (3e^{2t} - 3e^t)y_0 + (3e^t - 2e^{2t})z_0 \end{cases}$$
*Comme* $X(t) = \exp(tA)X_0$*, alors on a*
$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

3. *Soit* $A$ *la matrice de* $M_n(\mathbb{R})$ *définie par*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

*Déterminons la solution du système différentiel homogène* $X'(t) = AX(t)$ *et déduisons* $\exp(tA)$.
*On a* $\chi_A = (X-2)^2(X-1)$ *et on a*

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad (A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Donc en effectuant le calcul, on voit que* $2e_1+e_3$ *est une base de* $E_1$, $2e_1+e_2+e_3$ *est une base de* $E_2$, *donc* $A$ *n'est pas diagonalisable. On voit facilement que* $(e_1, e_2+e_3)$ *est une base de* $\ker[(A-2I)^2]$ *donc d'après ce qui précède, on a* $X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t) + \gamma X_3(t)$, *avec*

$$\begin{cases} X_1(t) = e^t(2e_1+e_3) \\ X_2(t) = e^{2t}(e_1 + t(A-2I)e_1) = e^{2t}(e_1 + t(-2e_1 - e_2 - e_3)) \\ X_3(t) = e^{2t}(e_2+e_3+t(A-2I)(e_2+e_3)) = e^{2t}(e_2+e_3+t(4e_1+2e_2+2e_3)) \end{cases}$$

*Ainsi, on a* $X(t) = x_1(t)e_1 + x_2(t)e_2 + x_3(t)e_3$, *avec*

$$\begin{cases} x_1(t) = 2\alpha e^t + \beta e^{2t} - 2\beta t e^{2t} + 4\gamma t e^{2t} \\ x_2(t) = -\beta t e^{2t} + \gamma e^{2t} + 2\gamma t e^{2t} \\ x_3(t) = \alpha e^t - \beta t e^{2t} + \gamma e^{2t} + 2\gamma t e^{2t} \end{cases}$$

*On a* $X(0) = X_0 = x_0e_1 + y_0e_2 + z_0e_3 = (2\alpha+\beta)e_1 + \gamma e_2 + (\alpha+\gamma)e_3$, *par suite, on obtient*

$$\alpha = z_0 - y_0, \ \beta = x_0 + 2y_0 - 2z_0 \ et \ \gamma = y_0$$

*et on en déduit que*

$$\begin{cases} x_1(t) = (e^{2t} - 2te^{2t})x_0 + (2e^{2t} - 2e^t)y_0 + (2e^t - 2e^{2t} + 4te^{2t})z_0 \\ x_2(t) = -te^{2t}x_0 + e^{2t}y_0 + 2te^{2t}z_0 \\ x_3(t) = -te^{2t}x_0 + (e^{2t} - e^t)y_0 + (e^t + 2te^{2t})z_0 \end{cases}$$

*Comme* $X(t) = \exp(tA)X_0$, *alors on a*

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{2t} - 2te^{2t} & 2e^{2t} - 2e^t & 2e^t - 2e^{2t} + 4te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t} & 2te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t} - e^t & e^t + 2te^{2t} \end{pmatrix}$$

### Méthode utilisant la réduction de Jordan

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme caractéristique $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$, avec $\chi_A = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r}$. Alors d'après le théorème de Jordan, il existe une matrice de Jordan $J$ et une matrice inversible $P$, telles que $A = PJP^{-1}$.
On considère le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ et on pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$, alors on aura

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}(AX(t)) = (P^{-1}AP)Y(t) = JY(t)$$

Ainsi, on obtient le nouveau système $Y'(t) = JY(t)$, avec

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de $A$ non nécessairement distinctes et où chaque $\lambda_i$ apparaît sur la diagonale autant de fois que sa multiplicité, et où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$. Ainsi le nouveau système différentiel s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + \alpha_1 y_2(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \\ \vdots \\ y_1'(t) = \lambda_{n-1} y_{n-1}(t) + \alpha_{n-1} y_{n-1}(t) \\ y_1'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

Pour la résolution de ce système, on commence par la dernière équation et on remonte, puis on aura $X(t) = PY(t)$.

**Exemples 6.3**

*Reprenons la matrice $A$ de l'exemple précédent :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

*Pour la résolution de $X'(t) = AX(t)$, on commance par la jordanisation de $A$. On a $\chi_A = (X-2)^2(X-1)$, $2e_1 + e_3$ une base de $E_1$ et $e_1$ est un vecteur, tel que $(A-2I)^2(e_1) = 0$ et $(A-2I)(e_1) \neq 0$, donc si on pose $v_1 = (A-2I)(e_1)$, $v_2 = e_1$ et $v_3 = 2e_1 + e_3$, alors on aura $A = PJP^{-1}$, avec*

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*On obtient alors le système suivant*

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) \\ y_3'(t) = y_3(t) \end{cases}$$

*La solution de ce système est donc définie par*

$$\begin{cases} y_1(t) = \alpha e^{2t} + \beta t e^{2t} \\ y_2(t) = \beta e^{2t} \\ y_3(t) = \gamma e^{t} \end{cases}$$

*On a $X(t) = PY(t)$, donc on aura*

$$\begin{cases} x_1(t) = -2y_1(t) + y_2(t) + 2y_3(t) = -2\alpha e^{2t} - 2\beta t e^{2t} + \beta e^{2t} + 2\gamma e^{t} \\ x_2(t) = -y_1(t) = -\alpha e^{2t} - \beta t e^{2t} \\ x_3(t) = -y_1(t) + y_3(t) = -\alpha e^{2t} - \beta t e^{2t} + \gamma e^{t} \end{cases}$$

*On a alors* $X_0 = x_0e_1 + y_0e_2 + z_0e_3 = (-2\alpha + \beta + 2\gamma)e_1 - \alpha e_2 + (\gamma - \alpha)e_3$*, donc on trouve* $\alpha = -y_0$*,* $\beta = x_0 - 2z_0$ *et* $\gamma = z_0 - y_0$*. On en déduit donc que*

$$\begin{cases} x_1(t) = (e^{2t} - 2te^{2t})x_0 + (2e^{2t} - 2e^t)y_0 + (2e^t - 2e^{2t} + 4te^{2t})z_0 \\ x_2(t) = -te^{2t}x_0 + e^{2t}y_0 + 2te^{2t}z_0 \\ x_3(t) = -te^{2t}x_0 + (e^{2t} - e^t)y_0 + (e^t + 2te^{2t})z_0 \end{cases}$$

*Comme* $X(t) = \exp(tA)X_0$*, alors on a*

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{2t} - 2te^{2t} & 2e^{2t} - 2e^t & 2e^t - 2e^{2t} + 4te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t} & 2te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t} - e^t & e^t + 2te^{2t} \end{pmatrix}$$

### 6.9.2 Solutions réelles

Soit $P$ un polynôme à coefficients réels et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, alors on a $P(\overline{\lambda}) = \overline{P(\lambda)}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P^{(k)}(\overline{\lambda}) = \overline{P^{(k)}(\lambda)}$. Donc si $\lambda$ est une racine de $P$ de multiplicité $m$, alors $\overline{\lambda}$ est une racine de $P$ de multiplicité $m$.
On considère le système différentiel $(S)$ : $X'(t) = AX(t)$, où $A$ est une matrice réelle dont le polynôme caractéristique $\chi_A$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de $\chi_A$ de multiplicité $m$ et soit $(v_1, \ldots, v_m)$ une base de $\ker[(A - \lambda I)^m]$, alors on voit aisément que $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_m})$ est une base de $\ker[(A - \overline{\lambda}I)^m]$, alors d'après ce qui précède, on sait que tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $X_i$ et $\overline{X_i}$ sont deux solutions complexes de $(S)$, avec

$$X_i(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k v_i}{k!} \quad \text{et} \quad \overline{X_i}(t) = e^{\overline{\lambda} t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k \overline{v_i}}{k!}$$

Donc $Y_i = \dfrac{X_i + \overline{X_i}}{2}$ et $Z_i = \dfrac{X_i - \overline{X_i}}{2i}$ sont des solutions réelles de $(S)$, ce sont la partie réelle et la partie imaginaire de $X_i$. Donc si on pose $\lambda = \alpha + i\beta$ et $v_i = v_{i1} + iv_{i2}$, où $\alpha, \beta$ sont des nombres réels et $v_{i1}, v_{i2}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors on aura

$$Y_i(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k v_{i1}}{k!} - e^{\alpha t}\sin(\beta t) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k v_{i2}}{k!}$$
$$\text{et } Z_i(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k v_{i1}}{k!} + e^{\alpha t}\cos(\beta t) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k v_{i2}}{k!}$$

Ainsi pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $aY_i + bZ_i$ est une solution réelle qui s'écrit sous la forme :

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k (av_{i1} + bv_{i2})}{k!} + e^{\alpha t}\sin(\beta t) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k (bv_{i1} - av_{i2})}{k!}$$

Cette expression peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$aY_i(t) + bZ_i(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)P_i(t) + \sin(\beta t)Q_i(t))$$

où $P_i$ et $Q_i$ sont deux polynômes de degré $\leq m - 1$ et à coefficients dans $\mathbb{R}^n$.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les racines complexes non réelles de $\chi_A$ et soit $\mu_1, \ldots, \mu_q$ les racines réelles de $\chi_A$, alors on a

$$\chi_A = (X - \lambda_1)^{m_1}(X - \overline{\lambda_1})^{m_1} \cdots (X - \lambda_p)^{m_p}(X - \overline{\lambda_p})^{m_p}(X - \mu_1)^{n_1} \cdots (X - \mu_q)^{n_q}$$

Alors la solution réelle générale de $(S)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\boxed{X(t) = \sum_{i=1}^{p} \mathsf{e}^{\alpha_i t}(\cos(\beta_i t)P_i(t) + \sin(\beta_i t)Q_i(t)) + \sum_{i=1}^{q} \mathsf{e}^{\mu_i t}R_i(t)}$$

où pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$.

## 6.10 Equations différentielles linéaires à coefficients constants

### 6.10.1 Equation homogène

**Définition 6.11.**

Une équation différentielle linéaire d'ordre $n$ à coefficients constants s'écrit sous la forme suivante :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ et où $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue de classe $C^n$.

#### Résolution pratique

On considère l'équation différentielles linéaires d'ordre $n$ à coefficients constants :

$$(E) \ : \ y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Soit $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction définie par $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ et soit $A$ la matrice carrée d'ordre $n$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors l'équation $(E)$ est équivalente au système différentiel $Y' = AY$. En effet on a

$$Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AY = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ -a_0 y - a_1 y' - \cdots - a_{n-1}y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Donc $Y' = AY$, si et seulement si, $y^{(n)} = -a_0 y - a_1 y' - \cdots - a_{n-1} y^{(n-1)}$.
En faisant un calcul par récurrence sur $n$, on obtient le polynôme caractéristique $\chi_A$ de $A$. On a alors

$$\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

**Définition 6.12.**

L'équation $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$ s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

**Remarques 6.6**

1. *Si $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$ n'a que des racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_p$, alors d'après ce qui précède, la solution générale de l'équation $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ s'écrit sous la forme suivante :*
$$\boxed{y(t) = \sum_{i=1}^{p} e^{\lambda_i t} P_i(t)}$$
*où pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $P_i$ est un polynôme à coefficients réels, avec $\deg(P_i) \leq m_i - 1$.*
2. *Si les racines de $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$ ne sont pas toutes réelles, alors $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$ s'écrit sous la forme :*
$$(r - \lambda_1)^{m_1}(r - \overline{\lambda}_1)^{m_1} \cdots (r - \lambda_p)^{m_p}(r - \overline{\lambda}_p)^{m_p}(r - \mu_1)^{n_1} \cdots (r - \mu_q)^{n_q} = 0$$
*donc d'après ce qui précède, la solution réelle du système s'écrit sous la forme :*
$$\boxed{X(t) = \sum_{i=1}^{p} e^{\alpha_i t}(\cos(\beta_i t)P_i(t) + \sin(\beta_i t)Q_i(t)) + \sum_{i=1}^{q} e^{\mu_i t} R_i(t)}$$
*où pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$, $P_i$ et $Q_i$ sont des polynômes à coefficients réels, avec $\deg(P_i) \leq m_i - 1$ et $\deg(Q_i) \leq m_i - 1$.*
*Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$, $\deg(R_i) \leq n_i - 1$.*

**Exemples 6.4**

*L'équation $y'' + by' + cy = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4c$, alors trois cas sont possibles :*

— *$\Delta > 0$, alors $r^2 + br + c = 0$ possède deux racines réelles $\lambda_1$ et $\lambda_2$, par suite la solution générale est définie par*
$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$$

— *$\Delta = 0$, alors $r^2 + br + c = 0$ possède une racine double $\lambda$, par suite la solution générale est définie par*
$$y(t) = (\alpha t + \beta)e^{\lambda t}$$

— *$\Delta < 0$, alors $r^2 + br + c = 0$ possède deux racines complexes $\lambda$ et $\overline{\lambda}$, donc si on pose $\lambda = \alpha + i\beta$, alors la solution réelle est définie par*
$$y(t) = (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)e^{\alpha t}$$

## 6.13 Exercices

**Exercice 6.1**
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ un endomorphisme de $E$ et $P$ un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$, tel que $P(u) = 0$. On suppose que $P = QR$, avec $Q$ et $R$ premiers entre eux. Montrer que $\ker(Q(u)) = Im(R(u))$.

**Exercice 6.2**
Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ un endomorphisme de $E$ et $P$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, tel que $P(u) = 0$, $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
Montrer que $E = \ker(u) \oplus Im(u)$.

**Exercice 6.3**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$ dont le polynôme caractéristique $\chi_u$ s'écrit sous la forme $\chi_u = XQ$ avec $Q(0) \neq 0$.
Montrer que $E = \ker(u) \oplus Im(u)$.

**Exercice 6.4**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ un endomorphisme de $E$ et $P$ un polynôme non constant de $K[X]$.

1. Montrer que $P(u)$ est inversible, si et seulement si, $P$ et $M_u$ sont premiers entre eux.
2. Dans le cas où $P(u)$ est inversible, montrer que $P(u)^{-1}$ est un polynôme en $u$.
3. On suppose que $K$ est algèbriquement clos et que $v$ est un autre endomorphisme de $E$. Montrer que

$$\chi_u(v) \text{ est inversible} \iff Sp(u) \cap Sp(v) = \emptyset$$

**Exercice 6.5**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$ dont le polynôme minimal s'écrit sous la forme $M_u = a_0 + a_1X + \cdots + a_{m-1}X^{m-1} + X^m$. On dit que $u$ est irréductible, si les seuls sous-espaces vectoriels de $E$ stables par $u$ sont $\{0\}$ et $E$. Dans la suite on se propose de montrer que $u$ est irréductible, si et seulement si, le polynôme caractéristique de $u$ est irréductible sur $K$.

1. On suppose que $u$ est irréductible.
   **a)** Montrer que $u$ est inversible.
   **b)** Montrer que le polynôme minimal $M_u$ de $u$ est irréductible.
   **c)** Soit $x \in E$, avec $x \neq 0$. Montrer que $(u^{m-1}(x), \ldots, u(x), x)$ est un système générateur de $E$ et en déduire que $\chi_u = M_u$.
2. On suppose que $\chi_u$ est irréductible. Montrer que $\chi_u = M_u$ et en déduire que $u$ est irréductible.

**Exercice 6.6**
Soient $K$ un corps commutatif de caractéristique nulle, $E$ un $K$-espace vectoriel, $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$, tels que $u \circ v - v \circ u = Id_E$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u^n \circ v - v^n \circ u = nv^{n-1}$.
2. Montrer que pour tout polynôme $P \in K[X]$, on a $P(u) \circ v - v \circ P(v) = P'(v)$.
3. En déduire, par un choix convenable de $P \in K[X]$, qu'il n'existe aucun couple $(u, v)$ d'endomorphismes, tel que $u \circ v - v \circ u = Id_E$.

**Exercice 6.7**
Soit $B$ la matrice de $M_{2n}(\mathbb{C})$ défini par $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$, où $A \in M_n(\mathbb{C})$. Déterminer $\chi_B$ en fonction de $\chi_A$.

**Exercice 6.8**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$.

1. Soit $F$ un sous-espace stable par $u$ et soit $\overline{u}$ l'application définie par
$$\begin{aligned} \overline{u} : E/F &\longrightarrow E/F \\ \overline{x} &\longmapsto \overline{u}(\overline{x}) = \overline{u(x)} \end{aligned}$$
   **a)** Vérifier que $\overline{u}$ est bien définie et que $\overline{u}$ est un endomorphisme de $E/F$.
   **b)** Soit $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_m)$ une base de $E/F$. Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ est libre et que $E = F \oplus Vect(\{e_1, e_2, \dots, e_m\})$.
2. On suppose que $u$ est non inversible puis on prend $F = \ker(u)$ et on considère l'endomorphisme $\overline{u} : E/\ker(u) \longrightarrow E/\ker(u)$ définie dans la question précédente. Soient $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_m)$ une base de $E/\ker(u)$, $A$ la matrice de $\overline{u}$ par rapport à cette base et $M$ la matrice de $u$ par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$, où $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\ker(u)$.
   **a)** Vérifier que $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$, où $A \in M_m(K)$ et $B \in M_{n-m,m}(K)$.
   **b)** Vérifier que $\chi_u = X^{n-m}\chi_{\overline{u}}$.
   **c)** Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $M^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ BA^{k-1} & 0 \end{pmatrix}$
   **d)** En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ tr(u^k) = tr(\overline{u}^k)$.
   **e)** Montrer par récurrence sur $n = \dim(E)$, $n \geq 2$, que si $\forall k \in \mathbb{N},\ tr(u^k) = 0$, alors $\chi_u = X^n$.
3. On suppose toujours que $u$ est non inversible.
   **a)** Montrer qu'il existe un entier $p \geq 1$, tel que $M_u = X^p Q$ avec $Q(0) \neq 0$.
   **b)** Montrer que $E = \ker(u^p) \oplus \ker(Q(u))$.
   **c)** Montrer que si $Q(u)$ est inversible alors $M_u = X^p$.
   **d)** Soit $v$ un autre endomorphisme non inversible de $E$, tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $tr(u^k) = tr(v^k)$. Montrer, par récurrence sur $n = \dim(E)$, $n \geq 2$, que $\chi_u = \chi_v$.
   **e)** En déduire que si $u$ et $v$ sont deux endomorphismes quelconques de $E$, alors $\chi_{uv} = \chi_{vu}$.

**Exercice 6.9**
Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $u$ un endomorphisme non nul de $E$ vérifiant $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \ker(u^2 + Id_E)$.
2. Montrer que si $x \notin \ker(u)$, alors $(x, u(x))$ est libre.
3. Montrer que $\dim(\ker(u)) = 1$.
4. En déduire qu'il existe une base $(v_1, v_2, v_3)$ dans laquelle la matrice $A$ de $u$ est définie par :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Quel est l'ensemble des solutions non nulles, dans $M_3(\mathbb{R})$, de l'équation matricielle $X^3 + X = 0$ ?

**Exercice 6.10**

Soit $f$ l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall A \in M_2(\mathbb{R}),\ A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Longrightarrow f(A) = \begin{pmatrix} b & -a+2c+d \\ -2b & -b \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice $M$ de $f$ par rapport à la base canonique $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $M_2(\mathbb{R})$.
$\left(\text{Rappelons que } e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de $f$.
3. Déterminer les sous-espaces propres de $f$.
4. Montrer que $f$ est diagonalisable et déterminer une base $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ formée de vecteurs propres de $f$.

**Exercice 6.11**

1. Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$.
   **a)** Montrer que si $u$ est diagonalisable, alors $u^2$ est diagonalisable.
   **b)** Montrerque si $u^2$ est diagonalisable, alors $u$ est diagonalisable, si et seulement si, $\ker(u) = \ker(u^2)$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $A$ suivante soit bdiagonalisable :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_n \\ \vdots & \iddots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 6.12**

Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, avec $n \geq 3$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $u$ l'endomorphisme de $E$ défini par $\begin{cases} u(e_i) = ie_n \text{ pour } i \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ u(e_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} ie_i \end{cases}$.

1. Vérifier que $(e_n, u(e_n))$ est une base de $Im(u)$ et que $Im(u)$ est stable par $u$.
2. Soit $v$ la réstriction de $u$ à $Im(u)$. Déterminer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $v$.
3. Quelle est la dimension de $\ker(u)$ ?
4. Montrer que le polynôme caractéristique $P$ de $u$ s'écrit sous la forme $P = X^{n-1}(X^2 + aX + b)$ et déterminer $a$ et $b$.
5. Montrer que $u$ est diagonalisable.

**Exercice 6.13**

Soient $A$ et $B$ deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, avec $AB = BA$ et soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & BP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.

2. Enoncer une condition nécessaire et suffisante sur $A$ et $B$ pour que $M$ soit diagonalisable.

**Exercice 6.14**

Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice $A$, par rapport à la base canonique, est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}, \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $u$.
2. Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles $u$ est diagonalisable.
3. On suppose que $m = 2$.
   **a)** Trouver une matrice inversible $P$ et une matrice diagonalisable $D$, tel que $A = PDP^{-1}$.
   **b)** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, calculer $A^n$.
4. On suppose que $m = 1$. Trouver une base de Jordan de $u$ puis résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x - y + z \end{cases}$$

**Exercice 6.15**

Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice $A$ par rapport à la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3-m & m-5 & m \\ -m & m-2 & m \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

où $m$ est un paramètre réel.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $u$.
2. Pour quelles valeurs de $m$, l'endomorphisme $u$ est-il diagonalisable ?
3. On suppose que $u$ est diagonalisable.
   a) Quel est le polynôme minimal de $u$ ?
   b) Trouver une base $(v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de $u$.
   c) Trouver une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P$, telles que $A = PDP^{-1}$.
4. On suppose $m = 1$.

a) Trouver une base $(w_1, w_2, w_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice $J$ de $u$ est une matrice de Jordan.

b) Ecrire la matrice $J$, puis trouver une matrice inversible $Q$, telle que $A = QJQ^{-1}$.

**Exercice 6.16**

Soit $B \in M_{2n}(\mathbb{C})$ la matrice définie par $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $B$ est diagonalisable, si et seulement si, $A$ est inversible et $A$ diagonalisable.

**Exercice 6.17**
Soient $A$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, avec $tr(A) \neq 0$, et $g$ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ g(M) = tr(A)M + tr(M)A$$

1. Calculer $g(A)$ puis $g(M)$ lorsque $tr(M) = 0$.
   En déduire que $g$ possède deux valeurs propres $\alpha_1$ et $\alpha_2$, avec $\alpha_2 = 2\alpha_1$.
2. On désigne par $E_1$ et $E_2$ les sous-espaces propres associés respectivement à $\alpha_1$ et $\alpha_2$.
   **a)** Déterminer $E_1$ et $E_2$ avec leurs dimensions.
   **b)** $g$ est-t-il diagonalisable ?
   **c)** Quel est le polynôme caractéristique de $g$ ?
   **d)** Calculer $tr(g)$ et $\det(g)$ en fonction de $n$ et $tr(A)$.

**Exercice 6.18**
1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
   **a)** Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = \mathrm{tr}(A)$.
   **b)** Si $E$ est un sous-espace propre de $A$, déterminer la dimension de $E$.
   **c)** Montrer que $A$ est diagonalisable, si et seulement si, $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.
2. Soient $A, B \in M_(\mathbb{R})$ et $f$ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par
$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ f(M) = \mathrm{tr}(AM)B$$
   **a)** Montrer que $f$ est de rang 1.
   **b)** Montrer que $f$ est diagonalisable, si et seulement si, $\mathrm{tr}(AB) \neq 0$.

**Exercice 6.19**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$. Montrer que $u$ est diagonalisable, si et seulement si, tout sous-espace stable par $u$ possède un supplémentaire stable.

**Exercice 6.20**
Soit $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et soit $A = V^tV$.
1. Pour tout $(i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$, exprimer $a_{ij}$ en fonction de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
   Que vaut la trace de $A$ ?
2. Exprimer les vecteurs colonnes de $A$ en fonction de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et $V$.
3. En déduire le rang de $A$.
4. Montrer que $\ker(A) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ :\ {}^tVX = 0\}$ et en déduire la dimension de $\ker(A)$.
5. Montrer que ${}^tVV$ est une valeur propre de $A$ dont on déterminera le sous-espace propre et sa dimension.
6. Déduire que $A$ est diagonalisable.

**Exercice 6.21**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles, tel que

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_n = u_n - v_n + w_n \\ w_n = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

A quelle condition sur $(u_0, v_0, w_0)$, ces trois suites sont-elles convergentes ?

**Exercice 6.22**
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $(e_1, e_2, e_3)$ et on considère l'endomorphisme $u$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice $A$ par rapport à la base canonique est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 2a-5 & 5-a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $A$.
2. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel $a$, les valeurs propres de $u$ avec leurs multiplicités.
3. Pour quelles valeurs de $a$ l'endomorphisme $u$ est-t-il diagonalisable ?
4. On suppose que $a = 3$.
   **a)** Quel est le polynôme minimal de $u$ ?
   **b)** En utilisant la division euclidienne, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe deux réels $a_n$ et $b_n$, tels que $A^n = a_nA + b_nI$.
   **c)** Calculer $a_n$ et $b_n$.
5. On suppose que $a = 1$ et soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les valeurs propres de $u$ avec $\lambda_1 > \lambda_2$.
   **a)** Déterminer une base de chaque sous-espace propre de $u$.
   **b)** Soient $v_1$ un vecteur propre associé à $\lambda_1$ dont la deuxième composante par rapport à la base canonique vaut 1, $v_2$ un vecteur propre associé à $\lambda_2$ dont la première composante par rapport à la base canonique vaut 1 et $v_3 = e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3$.
      **i)** Vérifier que $(v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
      **ii)** Déterminer la matrice $J$ de $u$ par rapport à la base $(v_1, v_2, v_3)$.
   **c)** Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = y \\ z' = -3y + 4z \end{cases}$.

**Exercice 6.23**
1. Soient $K$ un corps commutatif, $A \in M_n(K)$ et $P \in K[X]$.
   **a)** Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de de $P(A)$.
   **b)** Montrer que si $A$ est diagonalisable, alors $P(A)$ est diagonalisable.
2. On considère les matrices $A$ et $M$ de $M_{n+1}(K)$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

   **a)** Montrer que $A$ est diagonalisable.
   **b)** Montrer que $M = a_0 + a_1A + \cdots + a_nA^n$ et en déduire que $M$ est diagonalisable.
   **c)** Quelles sont les valeurs propres de $M$ ?

**Exercice 6.24**
Soient $a$ un paramètre réel et $A$ la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer, en fonction du paramètre $a$, le polynôme caractéristique de $A$.
2. Déterminer, suivant le paramètre $a$, les valeurs propres de $A$ avec leurs multiplicités.
3. Si on suppose que $a \neq 0$, pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $a$, la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
4. Dans cette question, on suppose que $a = -1$.
   a) Quel est le polynôme minimal $M_A$ de $A$ ?
   b) En utilisant la division euclidienne de $X^n$ par $M_A$, montrer que pour tout entier $n \geq 0$, il existe deux réels $a_n$ et $b_n$, tels que $A^n = a_nA + b_nI$.
   c) Déterminer $a_n$ et $b_n$ pour tout entier $n \geq 0$.
5. Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
   a) Montrer que $A + I$ est une matrice nilpotente.
   b) Déterminer $\ker(A + I)$ et en déduire l'indice de nilpotence de $A + I$.
   c) Trouver une matrice de Jordan $J$ et une matrice inversible $P$, telles que, $A = PJP^{-1}$.
   d) Déterminer $P^{-1}$ et calculer l'exponentiel de $J$.
   e) En déduire l'exponentiel de $A$.
6. Dans cette question, on suppose que $a = 1$.
   a) Déterminer les sous-espaces propres de $A$.
   b) Calculer $(A + I)^2(2e_1 + e_3)$ et $(A + I)(2e_1 + e_3)$, où $(e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   c) Trouver une matrice de Jordan $J$ et une matrice inversible $P$, telles que $A = PJP^{-1}$.
   d) Résoudre le système différentiel suivant,

$$\begin{cases} x' = -x + 2z \\ y' = x - 2y \\ z' = -x + y + z \end{cases}$$

**Exercice 6.25**
Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice $A$, par rapport à une base de $E$, est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \vdots & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $u^2 = Id_E$ et en déduire que $u$ est diagonalisable.
2. Déterminer la dimension de $\ker(u - Id_E)$ et en déduire l'expression du polynôme caractéristique de $u$. (On discutera les cas $n$ pair et $n$ impair)

3. Trouver une base de $E$ formée de vecteurs propres de $u$.

**Exercice 6.26**
Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, par rapport à la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, est définie par :

$$\forall i \in \{1, 2 \dots, n\}, \ \forall j \in \{1, 2 \dots, n\}, \ \ a_{ij} = \frac{i}{j}$$

**a)** Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, exprimer $u(e_j)$ et $u^2(e_j)$ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

**b)** En déduire l'expression du polynôme minimal de $u$. $u$ est-t-il diagonalisable ?

**c)** Quel est le rang de $u$ ? En déduire le polynôme caractéristique de $u$ ?

**Exercice 6.27**
Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $u$ un endomorphisme de $E$ dont le polynôme minimal $M_u$ s'écrit sous la forme $M_u = a + bX + X^2$, où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $b^2 - 4a < 0$

a) Montrer que $n$ est pair.
b) Montrer que $\det(u) = a^{\frac{n}{2}}$ et $tr(u) = -\frac{nb}{2}$.

**Exercice 6.28**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'un endomorphisme $u$ de $E$ est une transvection, si $u \neq Id_E$ et s'il existe un hyperplan $H$ de $E$, tel que

**i)** $\forall x \in H, \ u(x) = x$.

**ii)** $\forall x \in E, \ u(x) - x \in H$.

Dans ce cas, on dit que $u$ est une transvection d'hyperplan $H$.

I) Soit $u$ un projecteur de $E$.

  **1)** Montrer que $\forall x \in E, \ x \in Im(u) \iff u(x) = x$.

  **2)** Montrer que $\forall x \in E, \ u(x) - x \in \ker(u)$.

  **3)** Montrer que $E = Im(u) \oplus \ker(u)$.

  **4)** On suppose $Im(u)$ un hyperplan de $E$, $u$ est-il une transvection de $E$ ?

II) Soit $u$ une transvection de $E$ d'hyperplan $H$.

  **1)** Quelle est la dimension de $\ker(u - Id_E)$ ?

  **2)** Montrer que qu'il existe $y_0 \in H$, tel que $\forall x \in E, \ u(x) - x \in Vect(y_0)$.

  **3)** Montrer qu'il existe $x_0 \in E$, tel que $y_0 = u(x_0) - x_0$.

  **4)** Montrer que $x_0 \notin H$.

  **5)** Montrer qu'il existe une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $E$, telle que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, e_{n-1}\}, \ u(e_i) = e_i \ \text{ et } \ u(e_n) = e_{n-1} + e_n$$

  **6)** Quelles sont les valeurs propres de $u$ ? $u$ est-t-il diagonalisable ?

  **7)** Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de $u$.

  **8)** Montrer que $u$ est inversible et que $u^{-1}$ est une transvection de $E$.

**Exercice 6.29**
Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 3$, dont la matrice $A$ par rapport à la base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que 1 est une valeur propre de $u$ de multiplicité $n-2$ et déterminer le sous-espace associé.
2. Déterminer une base de $Im(u - Id)$ et calculer le polynôme caractéristique de la réstriction de $u$ à $Im(u - Id)$.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de $u$ et montrer que $u$ est diagonalisable.

**Exercice 6.30**
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $A^k$ et en déduire $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer le polynôme minimal de $A$ et en déduire que $A$ est diagonalisable.
3. Déterminer la dimension de $\ker(A)$ et en déduire l'expression du polynôme caractéristique de $A$.
4. Soit $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ (-1)^{i+j} b & \text{si } i \neq j \end{cases}$, où $a$ et $b$ sont deux nombres réels, avec $b \neq 0$.
   **a)** Montrer que $B$ est un polynôme en $A$.
   **b)** En déduire que $B$ est diagonalisable.
   **c)** Déterminer les sous-espaces propres de $B$ et en déduire l'expression du polynôme caractéristique de $B$.

**Exercice 6.31**
Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par

$$u(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$$

1. Déterminer la matrice $A$ de $u$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $u$ est diagonalisable.

**Exercice 6.32**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n$ et $u$ un endomorphisme nilpotent de $u$ d'indice $q$. Montrer que si $\dim(\ker(u)) = 1$, alors $q = n$.

**Exercice 6.33**
Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $G$ un groupe fini et $f : G \longrightarrow GL(E)$ un homomorphisme de groupes.

1. Montrer que pour tout $a \in G$, $f(a)$ est diagonalisable.
2. Soit $\Phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie pour tout $a \in G$ par $\Phi(a) = \operatorname{tr}(f(a))$. Montrer que pour tout $a \in G$, on a $\Phi(a^{-1}) = \overline{\Phi(a)}$.

**Exercice 6.34**
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$. Montrer que $\det(A) = 1$.
2. On suppose que $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.
3. On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que $n$ est pair.
4. On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de $A$ est pair.
5. On suppose que $A^4 = 7A^3 - 12A^2$. Montrer que $tr(A) \in \mathbb{N}$ et $tr(A) \leq 4n$.
6. On suppose que $A^4 + A^3 + 2A^2 + A + I = 0$. Montrer que $n$ est pair et que $tr(A) \in -\mathbb{N}$.
7. On suppose que $A^2 - 3A + 2I_6 = 0$ et $tr(A) = 8$. Déterminer le polynôme caractéristique de $A$ et monter que $A$ est diagonalisable.

**Exercice 6.35**
Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $u$ un endomorphisme nilpotent, non nul, d'indice $q$. Soit $x \in E$, tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$ et soit $F = \text{Vect}(\{x, u(x), \dots, u^{q-1}(x)\})$.

1. Montrer que $\dim(F) = q$ et que $F$ est stable par $u$.
2. **a)** Montrer que ${}^t u$, l'application transposée de $u$, est un endomorphisme nilpotent de $E^*$, d'indice $q$.
   **b)** Justifier qu'il existe $\varphi \in E^*$, tel que $\varphi(u^{q-1}(x)) \neq 0$.
   **c)** Soit $G = \text{Vect}(\{\varphi, {}^t u(\varphi), \dots, ({}^t u)^{q-1}(\varphi)\}$. Montrer que $\dim(G) = q$ et que $G$ est stable par ${}^t u$.
   **d)** Montrer que $G^\perp$ est stable par $u$ et que $E = F \oplus G^\perp$.
3. Montrer par récurrence sur $n$, où $n = \dim(E)$, qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice $J$ de $u$ est une matrice nilpotente de Jordan :

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_r} \end{pmatrix}, \quad \text{où } \forall i \in \{1, 2, \dots, r\},\ J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 6.36**
Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice $A$, par rapport à la base canonique $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ est d́finie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & -\alpha \\ \alpha & 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

**a)** Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $(u - \alpha Id)^2 = 0$.

**b)** Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de $u$.

**c)** Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer une base de Jordan de $u$.

**Exercice 6.37**
Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice $A$, par rapport à la base canonique $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ est dfinie par :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **a)** Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $u$.
   **b)** Calculer $(u - Id)^2(e_1)$ et $(u - 2Id)^2(e_1 - e_2)$ et en déduire une base de Jordan $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ de $u$.
2. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_3 + 3x_4 \\ x_2' = 3x_2 - x_4 \\ x_3' = -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ x_4' = x_2 + x_4 \end{cases}$$

   En déduire $\mathrm{e}^{tA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

**Exercice 6.38**
Soient $K$ un corps commutatif et $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients dans $K$. On suppose que le polynôme caractéristique de $A$ est scindé sur $K$ et que la décomposition de Dunford de $A$ s'écrit sous la forme $A = D + N$, où $D$ est diagonalisable et $N$ nilpotente.

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer la décomposition de Dunford de $A^p$ en fonction de celle de $A$.
2. On suppose que $A$ est inversible.
   **a)** Montrer que $D$ est inversible.
   **b)** Montrer que $D^{-1}N = ND^{-1}$.
   **c)** En déduire que $N' = D^{-1}N$ est une matrice nilpotente.
   **d)** Montrer $I + N'$ est inversible et déterminer son inverse.
   **e)** Montrer que $A^{-1} = (I + N')^{-1}D^{-1}$ et en déduire la décomposition de Dunford de $A^{-1}$.

**Exercice 6.39**
En utilisant la réduite de Jordan, montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est semblable à sa transposée.

**Exercice 6.40**
Soit $A$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de $A$, alors la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ s'écrit sous la forme $D' + N'$, avec $D' = \exp(D)$ et $N' = (\exp(N) - I)\exp(D)$.
2. Montrer que $\exp(A)$ est diagonalisable, si et seulement si, $A$ est diagonalisable.
3. En déduire l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$, telles que $\exp(A) = I_n$.

**Exercice 6.41**
Soient $A$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres complexes deux à deux distinctes de $A$. Montrer, en utilisant la décomposition de Dunford de $A$, que

$$\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_r|) = \lim_{k \to \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$$

où pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\|M\| = \sup\limits_{\|X\|=1} \|AX\|$

**Exercice 6.42**
Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

**Exercice 6.43**
Soient $A$ et $B$ deux matrices quelconques de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)\exp(-\frac{1}{2}[A,B])$$

où $[A,B] = AB - BA$.

**Exercice 6.44**
Soit $A$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$.
2. Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite antisymétrique, si ${}^tM = -M$ et elle est dite orthogonale, si ${}^tMM = I$.
   **a)** Montrer que si $A$ est antisymétrique, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$ est orthogonale.
   **b)** Calculer la dérivée $\dfrac{d}{dt}[{}^t\exp(tA)\exp(tA)]$.
   **c)** En déduire que si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$ est orthogonal, alors $A$ est antisymétrique.

**Exercice 6.45**
Soit $a$ un nombre complexe et soit $J$ la matrice de Jordan définie par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$, où $A = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k J^k$.

# Lemme de Zorn - Axiome du choix

## .1 Elément maximum - Elément minimum

**Définition .2.**

Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $a$ un élément de $E$.

**i)** On dit que $a$ est un élément maximum ou un plus grand élément de $E$, si

$$\forall x,\ x \in E \Longrightarrow x \leq a$$

**ii)** On dit que $a$ est un élément minimum ou un plus petit élément de $E$, si

$$\forall x,\ x \in E \Longrightarrow a \leq x$$

**Remarques .7**

*Si $a$ est un élément maximum ou minimum de $E$, alors $a$ est unique.*
*En effet, supposons que $b$ est un autre élément maximum de $E$, alors on aura $a \leq b$ et on a aussi $b \leq a$, donc d'après l'antisymétrie d'une relation ordre, on aura $a = b$.*

**Exemples .5**

1. *Soit $X$ un ensemble quelconque et soit $E = \mathscr{P}(X)$ l'ensemble de toutes les parties de $X$ ordonné par inclusion :*

$$\forall A \in E, \forall B \in E,\ A \leq B \Longleftrightarrow A \subseteq B$$

   *Alors $\emptyset$ est un élément minimum de $E$ et $X$ est un élément maximum de $E$.*

2. *Si on pose $E = \mathscr{P}(X) \backslash \{\emptyset, X\}$ toujours ordonné par inclusion, alors $E$ n'admet ni élément maximum, ni élément minimum.*
3. *Soit $E = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ordonné par division :*

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ x \leq y \Longleftrightarrow x \text{ divise } y$$

   *Alors $E$ n'admet ni élément maximum, ni élément minimum.*

**Théorème .3.**

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

**Preuve**

*La démonstration de ce théorème se base sur l'axiome de la récurrence suivant :*

*Soit $A$ une partie de $\mathbb{N}$, tel que*

**i)** $0 \in A$,

**ii)** $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A$.

*alors $A = \mathbb{N}$.*

*Soit $B$ une partie non vide de $\mathbb{N}$ et soit $A$ l'ensemble de tous les minorants de $B$ dans $E$ :*

$$x \in A \Longleftrightarrow \forall b \in B,\ x \leq b$$

*Comme $B \neq \emptyset$, alors on peut choisir $b \in B$, donc $b+1 \notin A$, car $b+1$ ne peut pas être un minorant de $B$. On a $A \neq \mathbb{N}$, car $b+1 \notin A$, et on $0 \in A$, donc $A$ ne vérifie pas la propriètè suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \in A \Longrightarrow n+1 \in A$$

*donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $n_0 \in A$ et $n_0 + 1 \notin A$.*
*$n_0 + 1 \notin A$, donc $n_0 + 1$ n'est pas un minorant de $B$, par suite, il existe $b \in B$, tel que $b < n_0 + 1$ et comme $n_0 \in A$, alors on a $n_0 \leq b < n_0 + 1$. On en déduit donc que $b = n_0$, par suite, $b$ est un plus petit élément de $B$.*

**Corollaire .4.**