Exercice 1.

Soit la fonction définie par :
$f : x \mapsto x^3 - 3x$.

1. *Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et calculer ses limites au bornes.*
2. *Trouver la dérivée de f et donner son tableau de variations.*
3. *Déterminer l'équation de (D) tangente de (C_f) en $O(0,0)$.*
4. *Construire (D) et (C_f) dans le même repère.*

Exercice 2.

Soit la fonction f définie par :
$f(x) = 2x\sqrt{x^2 - 2x}$.

1. *Déterminer D_f.*
2. *Calculer les limites de f au bornes de D_f.*
3. *Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et à droite en 2.*
4. *Donner une interprétation géométrique des résultats trouvés.*
5. *Déterminer $f'(x)$ pour tout x de D_f.*
6. *Dresser le tableau de variations de f.*

Exercice 3.

1. *On considère la fonction g telle que :*
   $g(x) = x^4 + 4x + 3$
   (a) *Calculer les limites de g au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.*
   (b) *Déterminer $g'(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.*
   (c) *Déduire le tableau de variation de g.*
   (d) *Déduire le signe de $g(x)$.*
2. *Soit la fonction f définie par :*
   $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}{x^3}$.
   (a) *Déterminer D_f.*
   (b) *Calculer les limites de f au bornes de D_f.*
   (c) *Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^4}$ pour tout x de D_f.*
   (d) *Dresser le tableau de variations de f.*
   (e) *Donner une approximation affine de f au voisinage de $a = 1$ puis de déduire une valeur approchée de $f(0.998)$ et de $f(1.001)$.*

Exercice 4.

Soit la fonction f définie par :
$f(x) = x + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
(C_f) *sa courbe dans repère orthonormé.*

1. *Déterminer D_f.*
2. *Calculer les limites de f au bornes de D_f.*
3. *Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.*
4. *Dresser le tableau de variations de f.*
5. *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.*
6. *Donner l'équation du tangente de (C_f) en $a = 0$.*
7. *Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses. (Résoudre l'équation $f(x) = 0$.)*

Exercice 5.

On considère la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$.
(C_f) *sa courbe dans repère orthonormé.*

1. *Calculer les limites de f au bornes de D_f et interpréter chaque résultat trouvé.*
2. *Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $D_{f'}$.*
3. *Dresser le tableau de variations de f.*
4. *Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.*
5. *Construire (C_f).*

Exercice 6.

On considère la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{x - 1}$.
(C_f) *sa courbe dans repère orthonormé.*

1. *Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$. Que peut-on dire ?*
2. *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x$. Conclure ?*
3. *Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $D_{f'}$.*
4. *Dresser le tableau de variations de f.*
5. *Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.*
6. *Construire (C_f).*

Exercice 7.

Soit la fonction : $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
(C_f) *dans un repère orthonormé.*

1. *Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.*
2. *Déterminer les branches infinies de (C_f).*
3. *Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.*
4. *Calculer $f''(x)$ et déduire la concavité de (C_f).*
5. *Trouver les points d'intersections de $C(f)$ avec l'axe des abscisses.*
6. *Dresser (C_f).*

Exercice 8.

Soit f la fonction à variable réel x :
$f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$
(C_f) *sa courbe dans repère orthonormé.*

1. (a) *Trouver D_f et calculer les limites de f au bornes de D_f.*
   (b) *Déterminer les branches infinies de (C_f) .*

(c) *Étudier la position relative de (C_f) avec l'asymptote oblique. Étudier le signe de $f(x) - y$.*

2. *Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.*
3. *Montrer que $\Omega(1;0)$ est un centre de symétrie de (C_f). montrer que : $f(2a - x) + f(x) = 2b$.*
4. *Construire (C_f).*

Exercice 9.

On considère la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{1}{x+1}\sqrt{x^2 - 1}$.
(C_f) sa courbe dans repère orthonormé.

1. *Déterminer D_f.*
2. (a) *Calculer les limites de f au bornes de D_f.*
   (b) *Déduire les branches infinies de (C_f).*
3. *Étudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter géométriquement le résultat.*
4. *Montrer que $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1).\sqrt{x^2-1}}$ pour tout x de $D_{f'}$.*
5. *Dresser le tableau de variations de f sur D_f.*
6. *Construire (C_f).*

Exercice 10.

On considère la fonction f définie par :
$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$.
(C_f) sa courbe dans repère orthonormé.

1. *Déterminer D_f.*
2. *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.*
3. *Déterminer les branches infinies de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.*
4. *Étudier la dérivabilité de f à droite en 2 et à gauche en 1. Interpréter les résultats.*
5. *Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $D_{f'}$.*
6. *Dresser le tableau de variations de f.*
7. *Montrer que la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f) .*
8. *Construire (C_f).*

Exercice 11. *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2} - x.$$

(C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. (a) *Déterminer D_f.*
   (b) *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.*
   (c) *Calculer les limites suivantes :*
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + 2x$.
   Donner une interprétation.
   (d) *Étudier la position relative de (C_f) et la droite d'équation $y = -2x$*
2. (a) *Montrer que ; pour tout $x \in \mathbb{R}$*
   $f(x) > 0$.
   (b) *Montrer que ; pour tout $x \in \mathbb{R}$*
   $$f'(x) = \frac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}}.$$
   (c) *Donner le tableau de variations de f.*
3. *Construire (C_f).*

Exercice 12.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}.$$

(C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. (a) *Déterminer D_f.*
   (b) *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.*
   (c) *Étudier les branches infinies de (C_f) .*
2. (a) *Montrer que ; pour tout $x \in D_f'$*
   $$f'(x) = \frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}.$$
   (b) *Donner le tableau de variations de f.*
3. *Construire (C_f).*

Exercice 13.

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = x\sqrt{x-1}$$

1. *Déterminer D_f le domaine de définition de f. puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.*
2. a- *Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 puis interpréter le résultat.*
   b- *Montrer que :* $\forall x > 1 \quad f'(x) = \dfrac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$
   c- *Dresser le tableau de variations de f.*
3. a- *Montrer que :*
   $(\forall x > 1) \quad f''(x) = \dfrac{3x-4}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$
   b- *Étudier la concavité de (C_f) en précisant ses d'inflexion. (C_f) .*
4. a- *Étudier les branches infinies de (C_f) .*
   b- *Calculer $f(2)$ puis construire (C_f) dans un repère orthonormé.*
   avec $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = 3cm$.

Exercice 14.

On considère la fonction définie par :
$f : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
(C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

1. *Déterminer D_f. Et calculer les limites de f au bornes de f.*

2. *Étudier la dérivabilité de f à droite en 1.*
3. *Déterminer la dérivée de f puis déduire le tableau de variations de f.*
4. (a) *Montrer que : $(\forall x \in D_f - \{1\})$:*
$$f'(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{x}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$
   (b) *Déduire que : $(\forall x \in D_f - \{1\})$:*
$$f''(x) = \frac{x-2}{(x^2-1).(x+1)^2.\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}.$$
   (c) *Étudier la concavité de (C_f).*
5. *Déterminer les branches infinies de (C_f).*
6. *Construire (C_f).*

Exercice 15.

On considère la fonction définie par :
$f : x \mapsto x + 1 - \dfrac{x+1}{x^2}$
(C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

1. *Déterminer D_f. Et calculer les limites de f au bornes de f.*
2. *Déterminer les branches infinies de (C_f).*
3. *Déterminer la position relative de (C_f) avec son asymptote oblique.*
4. *Montrer que*
$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \ \ f'(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+2)}{x^3}$$
Déduire le tableau de variations de f.
5. *Montrer que*
$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \ \ f''(x) = \frac{-2(x+3)}{x^4}$$
Déduire la convexité de (C_f) et ses points d'inflexion.
6. *Construire (C_f).*

Exercice 16.

On considère la fonction définie par :
$f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x}$
(C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

1. *Déterminer D_f. Et calculer les limites de f au bornes de f.*
2. *Déterminer les branches infinies de (C_f).*
3. *Montrer que*
$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \ \ f'(x) = \frac{(x+1)^2(x^2+2x-2)}{(x^2+2x)^2}$$
Déduire le tableau de variations de f.
4. *Montrer que $\Omega(-1;0)$ est un centre de symétrie de (C_f).*
$(M.q : f(2a-x) + f(x) = 2b$ avec $\Omega(a;b))$
5. *Construire (C_f).*

Exercice 17.

On considère la fonction définie par :
$f : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+3}$
(C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

1. *Déterminer $D_f =]-\infty;1] \cup [3;+\infty[$*
2. *Montrer (C_f) la droite (Δ) : $x = 2$ comme axe de symétrie.*
3. *Calculer les limites de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.*
4. *Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$ au voisinage de $+\infty$.*
5. *Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 3$ et interpréter le résultat géométriquement.*
6. *Déterminer $f'(x)$ Puis déduire le tableau de variations de f.*
7. *Construire (C_f).*