Mathématiques 1

TSI **2019**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Nombres de Fibonacci

Notations

Dans tout le problème on note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or) et $\psi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$.

La suite de Fibonacci est la suite de nombres réels $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Objectifs

L'objectif de ce problème est d'étudier certaines propriétés de la suite de Fibonacci et d'en donner des applications en théorie des nombres, en informatique et en probabilités.

Les parties IV et V utilisent des résultats démontrés dans les parties I et II. La partie III est grandement indépendante des autres, mais fait appel aux notations données en introduction.

I Préliminaires

I.A –

Q 1. À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs de F_k pour $k \in [\![0, 15]\!]$.

Q 2. Montrer que la suite $(F_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite d'entiers strictement croissante.

Q 3. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

I.B –

Q 4. Montrer que l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet comme solutions les nombres φ et $-\dfrac{1}{\varphi}$.

Q 5. Vérifier les égalités $\varphi - \dfrac{1}{\varphi} = 1$, $\varphi + \dfrac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$ et $\psi = \dfrac{1}{\varphi^2} = \dfrac{1}{\varphi+1}$.

Q 6. Démontrer l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n}).$$

II Séries génératrices de Fibonacci

On s'intéresse dans cette partie aux séries entières de la variable réelle $\sum\limits_{n\geqslant 0} F_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{F_n}{n!} x^n$.

On note respectivement $A(x)$ et $B(x)$ leurs sommes lorsqu'elles sont définies.

On pourra utiliser les résultats de la partie I.

II.A –

Q 7. Donner un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Q 8. En déduire les rayons de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} F_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{F_n}{n!} x^n$.

II.B –

Q 9. En utilisant la relation de récurrence définissant la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}[$,

$$(1-x-x^2)A(x) = x.$$

Q 10. Pour tout nombre réel x différent de $-\varphi$ et $\frac{1}{\varphi}$, vérifier que

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1+x/\varphi} = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Q 11. Décomposer en série entière au voisinage de 0 les deux fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1-\varphi x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x/\varphi}$; on précisera les rayons de convergence de chacune de ces séries.

Q 12. Retrouver le résultat de la question 6.

II.C –

Q 13. Montrer que, pour tout nombre réel x, $B(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\mathrm{e}^{\varphi x} - \mathrm{e}^{-x/\varphi}\right)$.

Q 14. À l'aide du résultat précédent et des égalités de la question 5, démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B(x)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_{2n}}{n!}x^n.$$

Q 15. En calculant la dérivée n-ième en zéro de chacun des deux membre de l'égalité précédente, démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}.$$

III Représentation intégrale de la suite de Fibonacci

Dans cette partie, on étudie une fonction dont la décomposition de Fourier fait intervenir le nombre ψ défini dans les notations et on signale une formule récente donnant une expression intégrale des termes de la suite de Fibonacci.

On note f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+4\sin^2 x}$.

La fonction f étant π-périodique, ses coefficients de Fourier sont définis par

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \ ;$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(2kx)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(2kx)\,\mathrm{d}x.$$

III.A –

Q 16. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\sin(2kx)\,\mathrm{d}x$. En déduire la valeur de b_k.

Q 17. Montrer que $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Q 18. À l'aide du changement de variable $t = \tan(x)$ montrer que $a_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

On admettra dans la suite que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \dfrac{2\psi^k}{\sqrt{5}}$.

III.B –

Q 19. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{+\infty} \psi^k \cos(2kx).$$

Q 20. Exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{1+4\sin^2 x}\right)^2 \mathrm{d}x$ comme somme d'une série géométrique et en déduire sa valeur.

Dans la poursuite de ce type de calculs, il a été démontré en 2015 que, pour tout entier naturel n

$$F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin(x/2)(2\sin(nx)\sin(x) - \cos(nx)) \frac{f(x)}{x} \,\mathrm{d}x.$$

IV Temps d'attente de (Pile, Pile) dans un jeu de pile ou face infini

On modélise un jeu de Pile ou Face par une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $1/2$:

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}.$$

On convient que l'événement $(X_n = 1)$ modélise la situation « obtenir Pile au n-ième lancer ».

On admet qu'on définit une variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ par

— $Y = 0$ si on n'obtient jamais deux Pile consécutifs ;

— sinon, Y est égale au plus petit entier naturel non nul n tel que $X_n = X_{n+1} = 1$.

On pourra utiliser les résultats des parties I et II.

IV.A –

Q 21. Calculer $\mathbb{P}(Y = 1)$, $\mathbb{P}(Y = 2)$, $\mathbb{P}(Y = 3)$ et $\mathbb{P}(Y = 4)$.

IV.B –

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n l'évènement « la liste $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ne comporte pas deux 1 consécutifs » et on pose $C_0 = \Omega$.

Q 22. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}(Y = n+2) = \dfrac{1}{8}\mathbb{P}(C_n)$.

Q 23. Justifier, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'égalité des deux événements

$$(X_1 = 1) \cap C_n \qquad \text{et} \qquad (X_1 = 1) \cap (X_2 = 0) \cap C_n.$$

Q 24. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(C_n) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(C_{n-1}) + \dfrac{1}{4}\mathbb{P}(C_{n-2})$.

Q 25. Donner alors une relation simple entre $\mathbb{P}(Y = n+2)$, $\mathbb{P}(Y = n+1)$ et $\mathbb{P}(Y = n)$, valable tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 26. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{1}{2^{n+1}} F_n$.

IV.C –

Q 27. En utilisant le résultat de la question 9, calculer la valeur de $\mathbb{P}(Y = 0)$.

Q 28. Interpréter ce résultat.

Q 29. Montrer que Y admet une espérance et calculer sa valeur.

V Décomposition d'un entier

Le but de cette partie est de montrer que tout nombre entier naturel non nul peut s'écrire, de manière unique, comme une somme de certains termes de la suite de Fibonacci et d'en déduire un codage binaire des nombres entiers naturels. Ce codage et son décodage sont ensuite implantés en langage Python.

On pourra utiliser les résultats de la partie I.

Si n est un entier naturel non nul, on dit que n admet une F-décomposition s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ et des entiers naturels k_1, k_2, ..., k_r supérieurs ou égal à 2 et tels que

i. $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $k_{i+1} - k_i > 1$, ce qui traduit que les nombres F_{k_i} et $F_{k_{i+1}}$ ne sont pas des termes consécutifs de la suite de Fibonacci ;

ii. $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}$.

Si $r = 1$, on adopte la convention que la proposition i est vérifiée.

L'écriture $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}$, si elle existe, est alors appelée une F-décomposition de l'entier naturel n.

V.A –

Q 30. Les égalités $100 = 3+8+89$, $100 = 1+2+8+89$ et $100 = 3+8+34+55$ sont-elles des F-décompositions de 100 ?

Q 31. Utiliser la calculatrice pour donner une F-décomposition de 32, puis une F-décomposition de 272.

V.B –

Q 32. On suppose qu'un entier n admet une F-décomposition de la forme $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}$. Montrer, par récurrence sur r, que $F_{k_r} \leqslant n < F_{k_r+1}$.

Q 33. En déduire que, sous réserve d'existence, la F-décomposition de n est unique.

Q 34. Montrer que tout entier naturel non nul n admet une unique F-décomposition.

V.C –

Q 35. Écrire une fonction Python `fibonacci` qui prend en paramètre un entier naturel p et renvoie la liste des $p+1$ premiers termes de la suite de Fibonacci. Par exemple `fibonacci(5)` doit renvoyer `[0, 1, 1, 2, 3, 5]`.

Q 36. Écrire une fonction Python `recherche` qui prend en paramètre un entier naturel n et renvoie le plus grand entier naturel p tel que $F_p \leqslant n$. Par exemple, `recherche(7)` doit renvoyer `5`.

Q 37. Écrire une fonction Python `Fdecomposition` qui prend en paramètre un entier naturel n non nul et renvoie sa F-décomposition sous forme d'une liste croissante d'entiers. Par exemple, `Fdecomposition(100)` doit renvoyer `[3, 8, 89]`.

V.D – Une fois qu'on dispose de la F-décomposition d'un entier naturel n non nul, on lui associe une liste composée de 0 et de 1 de la manière suivante :

— on écrit en ligne la liste de tous les termes de la suite de Fibonacci inférieurs ou égaux à n, en commençant à partir de F_2 ;

— en-dessous de chaque terme de cette liste, on inscrit 1 si ce terme figure dans la F-décomposition de n et 0 s'il n'y figure pas ;

— on obtient une liste formée de 0 et de 1 qu'on « normalise » en ajoutant un 1 en dernière position.

Ce principe est appelé *codage de Fibonacci.*

Q 38. Vérifier que 100 est codé par la liste `[0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1]`.

Q 39. Écrire une fonction Python `codage` qui prend en paramètre un entier naturel n non nul et renvoie son codage de Fibonacci sous forme d'une liste de zéros et de uns. Par exemple, `codage(100)` doit renvoyer la liste `[0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1]`.

Q 40. Écrire une fonction Python `decodage` qui prend en paramètre une liste non vide constituée de 0 et de 1 et qui renvoie l'entier naturel qu'elle code. Par exemple, `decodage([0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1])` doit renvoyer l'entier 100.

• • • FIN • • •