Suites numériques

A.GHAOUTI

Plan :

i. **Définition** :

On appelle suite réelle toute application $\begin{array}{l} u : \mathbf{N} \to \mathbf{R} \\ \quad n \mapsto u(n) = u_n \end{array}$

On la note $(u_n)_{n\in IN}$ ou (u_n)

Exemples :

- $u_n = (-1)^n \quad , \forall n \in \mathbf{N} \qquad u_0 = 1 \;\; u_1 = -1 \;\; u_2 = ... \; u_3 = ...$
- $v_n = \dfrac{2n-1}{n^2+1}, \forall n \in \mathbf{N} \qquad v_0 = -1 \quad v_1 = ... \quad v_2 = ... \quad v_3 = ...$
- Représenter les cinq premiers termes de la suite (v_n)
- Représenter les premiers termes de la suite (u_n) définie par :

  $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

ii. **Suites monotones**

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

- On dit que la suite (u_n) est croissante, lorsque pour tout entier $n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \geq u_n$.
- On dit que la suite (u_n) est décroissante, lorsque pour tout entier $n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
- La suite (u_n) est dite monotone, lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
- On définit de manière analogue, une suite strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone.

Exemples :

1. Les suites de termes généraux : n, n^2 sont croissantes.
2. Les suites de termes généraux : $\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont décroissantes.
3. La suite (u_n) définie par : $\forall n \in IN$, $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

Exemple : étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = \frac{n-2}{n+3}$

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-2}{n+1+3} - \frac{n-2}{n+3} = \frac{n-1}{n+4} - \frac{n-2}{n+3} = \frac{5}{(n+4)(n+3)} > 0$$

Car $\forall n \in IN \quad n+4 > 0$ et $n+2 > 0$

Donc (u_n) est strictement croissante.

iii. Suites majorées-Suites minorées-Suites bornées

Soit (u_n) une suite de nombres réels

- La suite (u_n) est dite majorée, lorsqu'il existe un réel M tel que :

  pour tout entier naturel $n, u_n \leq M$

- La suite (u_n) est dite minorée, lorsqu'il existe un réel m tel que :

  pour tout entier naturel $n, u_n \geq m$

- La suite (u_n) est dite bornée, lorsqu'elle est minorée et majorée.
- La suite (u_n) est bornée $\Leftrightarrow \exists (m; M) \in IR^2, \forall n \in \mathbf{N},\ m \leq u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est bornée $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall n \in \mathbf{N},\ |u_n| \leq M$.

Remarques:

1. Si la suite (u_n) est croissante, elle est minorée par son premier terme : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geq u_0$
2. Si la suite (u_n) est décroissante, elle est majorée par son premier terme : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq u_0$

Exemples :

- Montrer que la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = (-1)^n$ est bornée
  - ✓ $\forall n \in \mathbf{N}$,$-1 \le u_n \le 1$ donc (u_n) bornée.
  - ✓ $|u_n| = |(-1)^n| = 1 \le 1$ $\forall n \in \mathbf{N}$ donc (u_n) bornée.
- On considère la suite définie par $u_n = n, \forall n \in \mathbf{N}$

(u_n) est minorée par 0 mais (u_n) n'est pas majorée sinon $\exists M \in IR, \forall n \in \mathbf{N}$;$n \le M$ impossible car $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

Exercice : Montrer que la suite (u_n) définie par :

- $u_n = \sqrt{n^4 + 1} - n^2$ est bornée.
- $u_n = \dfrac{n-2}{n+3}$ est bornée.

iv. Limites et inégalités :

1. **Convergence d'une suite** :
   Soient (u_n) une suite de nombres réels et $l \in IR$
   On dit que (u_n) converge vers l si
   $\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbf{N}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ $n \ge p \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$
   On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.
2. Une suite divergente est une suite qui n'est pas convergente
   On dit que (u_n) diverge si $\forall l \in \mathbf{R} \exists \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbf{N}$ $\exists n \in \mathbf{N}$ $n \ge p$ et $|u_n - l| \ge \varepsilon$.
   Exemples : les suites $((-1)^n)$ et $(\sin n)$ sont divergentes.

Remarques :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \Leftrightarrow$ Pour chaque choix de $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $p \in \mathbf{N}$ tel que si $n \in IN$ et $n \ge p$ alors $|u_n - l| < \varepsilon$.
- $|u_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$

Après p , tous les termes des suites restent dans la bande $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

Graphique à faire

Unicité de la limite : Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l'$ alors $l = l'$.

En effet supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, $l \in IR$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l'$, $l' \in IR$

Soit $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow \exists p_1 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\ n \geq p_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l' \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists p_2 \in IN\ \forall n \in IN\ n \geq p_2 \Rightarrow |u_n - l'| < \varepsilon$

Posons $p = \max(p_1; p_2) \in IN$.

$\forall n \geq p$ on a $|u_n - l| < \varepsilon$ et $|u_n - l'| < \varepsilon$.

$|l - l'| = |l - u_n + u_n - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'|$ (Inégalité triangulaire)

D'où $|l - l'| < \varepsilon + \varepsilon$

i.e. $|l - l'| < 2\varepsilon$

On en déduit que $|l - l'| < 2\varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$ donc $l = l'$

Théorème : Toute suite convergente est bornée.

Preuve : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ $(l \in IR)$ alors $\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbf{N}, \forall n \geq p\ ; |u_n - l| < \varepsilon$

c.-à-d. $\forall \varepsilon > 0, \exists p \in IN, \forall n \geq p\ ; l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$

En particulier pour $\varepsilon = 1\ \exists p \in IN, \forall n \geq p\ ; l - 1 < u_n < l + 1$

Donc l'ensemble des termes de la suite de rang $\geq p$ est borné.

L'ensemble $\{u_0; u_1; \ldots\ldots; u_{p-1}\}$ est fini il a donc un plus petit élément a et un plus grand élément b d'où $\forall n \in IN$ $\min(a; l-1) \leq u_n \leq \max(b; l+1)$

Par conséquent la suite (u_n) est bornée.

Remarque : la réciproque est fausse, la suite $((-1)^n)$ est bornée mais non convergente.

Théorème : Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes.

Si $\forall n \in \mathbf{N}$ $u_n \leq v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Remarque : Le passage à la limite «élargit » les inégalités

$(\forall n \in IN\ ,\ u_n < v_n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Par exemple : $u_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$

$u_n < v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

Théorème des gendarmes.

Soient $(u_n),(v_n)\text{et}(w_n)$ trois suites réelles telles que : $\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n \leq v_n \leq w_n$

Si (u_n) et(w_n) convergent vers la même limite l alors la suite (v_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

Exemple : Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2 + k} = 1$

Posons $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2 + k} = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{n}{n^2 + n}$.

Soit $k \in \mathbf{N};\ 1 \leq k \leq n$, on va chercher un encadrement de u_n

$$1 \leq k \leq n \Rightarrow 0 < 1 + n^2 \leq k + n^2 \leq n + n^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n + n^2} \leq \frac{1}{k + n^2} \leq \frac{1}{1 + n^2} \quad \text{car la fonction inverse est décroissante sur }]0;+\infty[$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n + n^2} \leq \frac{n}{k + n^2} \leq \frac{n}{1 + n^2} \quad \text{car } n > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n + n^2} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{k + n^2} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{1 + n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{n^2}{n + n^2} \leq u_n \leq \frac{n^2}{1 + n^2} \quad \text{car } \sum_{k=1}^{k=n} \alpha = n\alpha \text{ avec } \alpha \text{ ne dépend pas de } k$$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n + n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{1 + n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$.

Et d'après le théorème des gendarmes on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2 + k} = 1$

Théorème : Soient (u_n) et(v_n) deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq v_n$.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Proposition :

Soient (v_n) une suite bornée et (u_n) une suite qui converge vers 0

Alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Preuve : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbf{N}, \forall n \geq p \quad ; |u_n| < \varepsilon$

(v_n) est bornée $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall n \in \mathbf{N}; |v_n| \leq M$

Donc $\exists p \in \mathbf{N}, \forall n \geq p \quad |u_n v_n| = |u_n||v_n| \leq M|u_n| \leq M\varepsilon$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$

Exemple : Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \sin(\frac{1}{n}) = 0$.

En effet : on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\frac{1}{n}) = \sin 0 = 0$ et $n \mapsto (-1)^n$ est bornée

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \sin(\frac{1}{n}) = 0$

v .Théorème des suites monotones :

Soit (u_n) une suite réelle alors deux cas se présentent :

1. La suite (u_n) est convergente : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $l \in \mathbf{R}$
2. La suite (u_n) est divergente :
   - (u_n) admet une limite infinie (exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$)
   - (u_n) n'admet pas de limite (exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ n'existe pas)

Théorème : Soit (u_n) une suite croissante.

1. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) converge vers $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n$ (le plus petit des majorants de ses termes).
2. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$. ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$)

Remarques :

1) Si (u_n) est croissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in IR$ alors $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \le l$

2) Si (u_n) est strictement croissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in IR$ alors $\forall n \in \mathbf{N}\ u_n < l$

Théorème : Soit (u_n) une suite décroissante.

1. Si (u_n) est minorée, alors (u_n) converge vers $l = \inf_{n\in\mathbf{N}} u_n$ (le plus grand des minorants de ses termes).
2. Si (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$. ($\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$)

Remarques :

1) Si (u_n) est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbf{R}$ alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $l \le u_n$

2) Si (u_n) est strictement décroissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbf{R}$ alors $\forall n \in \mathbf{N}\ \ l < u_n$.

Exemple : Soit (S_n) la suite définie par : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$

- Montrons que (S_n) est croissante :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} \ge 0 \quad \text{donc } (S_n) \text{ est croissante}$$

- Montrons que $S_{2n} - S_n \ge \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2n}.$$

Or on a $k \in IN$ et $n+1 \le k \le 2n$ donc $\frac{1}{k} \ge \frac{1}{2n}$

Donc $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \ge \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}.n = \frac{1}{2}$.

- (S_n) est croissante, donc (S_n) converge ou $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$
- Montrons par l'absurde qu'elle ne converge pas.

Supposons que (S_n) est convergente. Notons $l = \lim_{n\to+\infty} S_n \quad l \in IR$

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = l$ car (S_{2n}) est une suite extraite de (S_n)

Donc $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_n)=l-l=0$, ce qui est absurde car $S_{2n}-S_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Donc (S_n) ne converge pas. Finalement $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

vi. **<u>Suites extraites</u>** :

<u>Définition</u> : Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (v_n) est une suite extraite de (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante tel que : $\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$

<u>Exemple</u> : Soit la suite de terme général $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$

Les suites constantes (1) et (-1) sont extraites de $((-1)^n)_{n\in IN}$

La suite (1) est extraite par l'application φ définie par $\varphi(n)=2n$

La suite (-1) est extraite par l'application φ définie par $\varphi(n)=2n+1$

<u>Exercice</u> : On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = n^3$ et l'application $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ définie par $\varphi(n) = n^2$

Quel est le terme général de la suite extraite de (u_n) par φ ?

<u>Théorème</u> :

Toute suite extraite d'une suite réelle convergente de limite l, est convergente de même limite l

<u>Preuve</u> : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $l \in IR$

Considérons une suite extraite de (u_n): $(u_{\varphi(n)})$ avec $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante

Exercice : Montrer par récurrence que si $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est strictement croissante alors $\forall n \in \mathbf{N}\ \ \varphi(n) \geq n$.

Par définition, on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists p \in IN\ \ \forall n \in IN\ \ n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

Or $\varphi(n) \in \mathbf{N}$ et $\varphi(n) \geq n$ d'ou $\varphi(\mathrm{n}) \geq \mathrm{p}$ si $n \geq p$

D'où $|u_{\phi(n)} - l| < \varepsilon$ si $n \geq p$ ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$.

Remarques : le théorème précèdent est utilisé de la façon suivante :

- Si une suite extraite d'une suite (u_n) diverge alors on peut conclure que (u_n) diverge.
- Si deux suites extraites d'une suite convergent vers des limites distinctes, on peut conclure que (u_n) diverge.

Exemple :

Montrons que la suite définie par $u_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbf{N}$ n'est pas convergente

On considère la suite extraite (u_{2n}) : $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \ \forall n \in \mathbf{N}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$

On considère la suite extraite (u_{2n+1}) : $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \ \forall n \in \mathbf{N}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$

et $1 \neq -1$ d'où (u_n) n'est pas convergente.

Proposition : Si $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$ et $l \in \mathrm{IR}$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemple : Montrer que la suite définie par $u_n = \sin(n\pi - \frac{1}{n})$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ converge vers 0.

En effet :

On considère la suite extraite (u_{2n}) : $u_{2n} = \sin(2n\pi - \frac{1}{2n}) = \sin(-\frac{1}{2n})$ car sinus est $2\pi-$périodique donc $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \sin(-\frac{1}{2n}) = \sin(0) = 0$

On considère la suite extraite

(u_{2n+1}) : $u_{2n+1} = \sin((2n+1)\pi - \frac{1}{2n+1}) = \sin(2n\pi + \pi - \frac{1}{2n+1}) = \sin(\pi - \frac{1}{2n+1})$ car sinus est $2\pi-$périodique donc $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sin(\pi - \frac{1}{2n+1}) = \sin(\pi) = 0$.

On a $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

vii. **Suites adjacentes** :

Définition : Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que ces deux suites sont adjacentes lorsque :

1) l'une est croissante.
2) l'autre est décroissante.
3) $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$

Proposition : Soient (u_n) et (v_n) vérifiant

(u_n) croissante, (v_n) décroissante et $(u_n - v_N) \to 0$ alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $\quad u_n \leq v_n$

Preuve : Notons $a_n = v_n - u_n$

$a_{n+1} - a_n = v_{n+1} - v_n + u_n - u_{n+1}$

Or $v_{n+1} - v_n \leq 0$ car (v_n) est décroissante et $u_n - u_{n+1} \leq 0$ car (u_n) est croissante.

Donc (a_n) est décroissante.

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ donc $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \geq 0$ *i.e* $u_n \leq v_n$.

Théorème.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes (u_n) étant croissante .Alors (u_n) et (v_n) convergent vers un même nombre réel l et $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \leq l \leq v_n$

Preuve : $\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.

Donc (u_n) est croissante et majorée $(\text{par}\, v_0)$ donc (u_n) est convergente.

et (v_n) est décroissante et minorée $(\text{par}\, u_0)$ donc (v_n) est convergente.

Notons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l'$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = l' - l$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Donc $l' - l = 0$ soit $l = l'$.

Remarque : $l = \sup\limits_{n \in IN} u_n$ le plus petit des majorants donc $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \leq l$

$l = \inf\limits_{n \in IN} v_n$ Le plus grand des minorants donc $\forall n \in \mathbf{N} \quad l \leq v_n$.

D'où l'encadrement de l : $\quad \forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \leq l \leq v_n$.

Exemple : On considère la suite (a_n) définie par : $a_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

Montrons que les suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) sont adjacentes.

Posons $b_n = a_{2n}$ et $c_n = a_{2n+1}$.

$$b_{n+1} - b_n = a_{2(n+1)} - a_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

Or $0 < 2n+1 \leq 2n+2$ donc $\dfrac{1}{2n+1} \geq \dfrac{1}{2n+2}$ donc $b_{n+1} - b_n \geq 0$.

Donc la suite (a_{2n}) est croissante.

$$c_{n+1} - c_n = a_{2n+3} - a_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \leq 0 \ .$$

Or $0 < 2n+2 \leq 2n+3$ donc $\dfrac{1}{2n+2} \geq \dfrac{1}{2n+3}$ donc $\dfrac{1}{2\mathrm{n}+3} - \dfrac{1}{2n+2} \leq 0$.

Donc la suite (a_{2n+1}) est décroissante.

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{2n+1} - a_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 .$$

En conclusion les suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) sont adjacentes.

Donc, par le théorème des suites adjacentes (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent vers un même nombre réel l.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = l$ et $l \in \mathrm{IR}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$.

<u>Remarque</u> : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_{2n} \leq l \leq a_{2n+1}$

Donc $\quad 0 \leq l - a_{2n} \leq a_{2n+1} - a_{2n}$

Donc $\quad |l - a_{2n}| \leq a_{2n+1} - a_{2n}$

Donc $\quad |l - a_{2n}| \leq \dfrac{1}{2n+1}$

Donc pour que a_{2n} soit une valeur approchée de l à 10^{-2} prés, il suffit que

$\dfrac{1}{2n+1} \leq 10^{-2}$ i.e $2n+1 \geq 10^2$ i.e $\mathrm{n} \geq \dfrac{99}{2}$ i.e $n \geq 50$.