Formulaire

Courbes de Bézier
De Casteljau
(degré 2 et 3)

Bézier Outils



frontispice : www.agence-ilargia.fr

Avant propos

Pour simplifier ce formulaire nous nommerons :

B2 = courbe de Bézier de degré 2
B3 = courbe de Bézier de degré 3

ce sont des courbes paramétriques.

La majorité des sujets traités dans ce formulaire ont été traduits en language de programmation «Free Pascal» => unitée «***B3OutilsV7***»

L'unité et des exemples sont disponibles dans ***BezierOutilsV7.zip*** ici : https://drive.google.com/file/d/1kzkM8y8hxB1S9LC03y7fPToYZCBG5zR8/view?usp=sharing

Pour profiter du programme «*Maindemo*» il est nécessaire d'extraire *BézierOutilsV7.zip* sur le répertoire C:

Ce «pdf» en Anglais est disponible ici : **Bezier Curves Form V7**

Et en Espagnol ici : **Curvas de Bezier Formulario V7**

Créé par Alexandre Christophe GLON le 29-01-2019 révisé le 17-01-2024
alexandre.christophe.glon@gmail.com

2

Table des matières

Equations des courbes de Bézier de degré 2..... pages 4 et 5
Equations des courbes de Bézier de degré 3..... pages 6 et 7
B3 spéciales..... page 8
Changement de paramètres d'une courbe de Bézier ..... page 9
Intersection d'une droite avec une courbe de Bézier ..... page 10
Estimation du paramètre *t* Conversion d'une B-spline en ***B3***.... page 11
Parabole paramétrique , calcul du sommet et du foyer (***B2***) ..... pages 12 et 13
Points stationnaires et de croisement d'une courbe de Bézier ..... pages 14 et 15
Subdivisions récursives d'une courbe de Bezier (De Casteljau) .. pages 16 et 17
Fusion de 2 courbes de Bézier ..... page 18
Distance d'un point à une courbe de Bézier ..... page 19
Centre de courbure (cercle osculateur) ..... page 20
Paramétrisation d'une fonction de degré 2 ou 3 , interpolation.... page 21
Aire, abscisse curviligne (longueur) d'une courbe de Bézier ..... pages 22 et 23
Simulation d'un arc de cercle par une courbe de Bézier ..... pages 24 et 25
Simulation d'un arc de clothoïde par une courbe de Bézier ..... pages 26 et 27
Courbe de Bézier passant strictement par 3 et 4 points..... pages 28 et 29
Lissage, ajustement, de points par une courbe de Bézier..... pages 30, 31, 32, 33
Résolution d'une équation du 3ème degré ..... pages 34 et 35
Formule du changement de base (modifiée) ..... page 36
Intersections : 2 droites (méthode Delambre) , 2 cercles ..... page 37
Angles orientés, coordonnées polaires ..... pages 38 et 39
Le cercle et ses tangentes..... pages 40 et 41
Unit ***B3outilsV7*** descriptif sommaire ..... pages 42, 43, 44, 45

Bibliographie

[1] Modèles de Bézier des B-Splines et des Nurbs par G. DEMENGEL et J.P. POUGET éditions Ellipses
[2] Topographie et topométrie modernes tome 1 : par S. MILLES et J. LAGOFUN éditions Eyrolles
[3] Topographie et topométrie modernes tome 2 : par S. MILLES et J. LAGOFUN éditions Eyrolles
[4] Cours de géométrie : par M. TROYANOV Presses polytechniques et universitaires romandes
[5] Method'S classe de première : par T. PETIT éditions Ellipses
[6] Cours de mathématique BTS UIT par Pierre VARIOT éditions Ellipses

3

Équations des courbes de Bézier de degré 2 (B_2) [1]

Pour calculer les coordonnées d'un point M de la courbe il faut connaitre son paramètre t

l'usage veut que le paramètre $t \in [0\ 1]$

Equations vectorielles et analytiques

a) selon les polynômes de Bernstein

$$\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)^2\overrightarrow{OP_0} + 2t(1-t)\overrightarrow{OP_1} + t^2\overrightarrow{OP_2}$$

$$M(t) \begin{vmatrix} xM(t) = (1-t)^2\, xP_0 + 2t(1-t)\, xP_1 + t^2\, xP_2 \\ yM(t) = (1-t)^2\, yP_0 + 2t(1-t)\, yP_1 + t^2\, yP_2 \end{vmatrix}$$

b) définition canonique (selon les puissances de t)

$$\overrightarrow{OM}(t) = t^2(\overrightarrow{P_1P_0}+\overrightarrow{P_1P_2}) + 2t(\overrightarrow{P_0P_1}) + \overrightarrow{OP_0}$$

$$M(t) \begin{vmatrix} x = f(t) = t^2\,(xP_0 - 2xP_1 + xP_2) + 2t(xP_1 - xP_0) + xP_0 \\ y = g(t) = t^2\,(yP_0 - 2yP_1 + yP_2\,) + 2t(yP_1 - yP_0) + yP_0 \end{vmatrix}$$

---

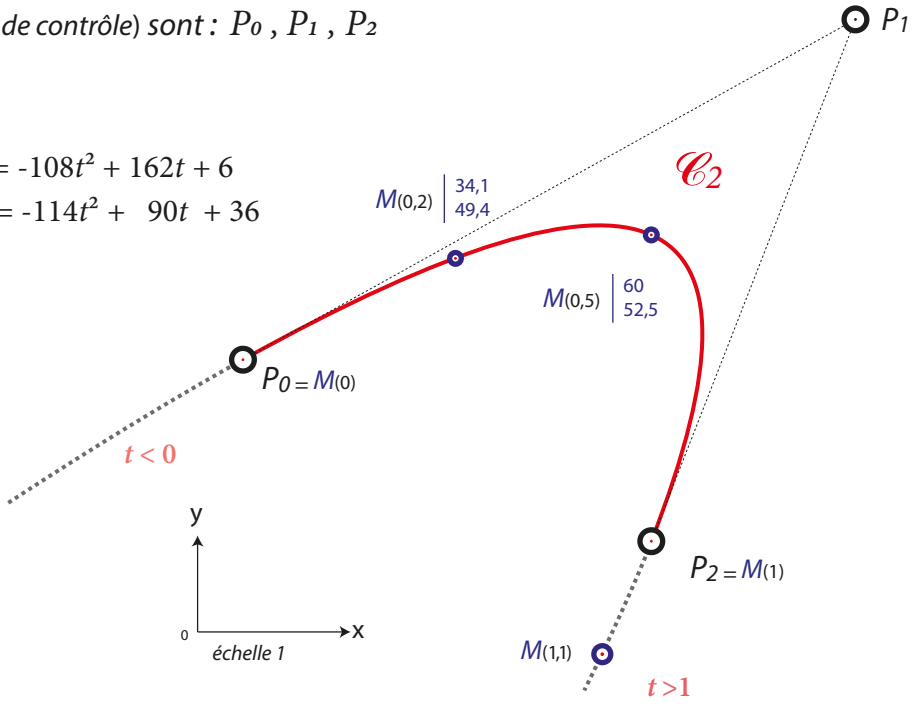
selon cet exemple la courbe $\mathscr{C}_2$ *est une partie de parabole*

ses ***points de définition*** *(ou points de contrôle) sont :* P_0 , P_1 , P_2

$\mathscr{C}_2$	X	Y
P_0	6	36
P_1	87	81
P_2	60	12

$$M(t) \begin{vmatrix} x = f(t) = -108t^2 + 162t + 6 \\ y = g(t) = -114t^2 + 90t + 36 \end{vmatrix}$$

t	$xM(t)$	$yM(t)$
0	**6**	**36**
0,2	34,1	49,4
0,5	60	52,5
1	**60**	**12**
1,1	53,5	-2,9



Les vecteurs $\overrightarrow{P_0P_1}$ *et* $\overrightarrow{P_2P_1}$ *sont respectivements tangent à* $\mathscr{C}_2$ *en* P_0 *et* P_2

Calcul des coordonnées de $M(t)$ avec des Matrices

$$\underset{\mathcal{T}_n}{\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{matrice de passage}\ \mathcal{M}_2} \times \underbrace{\begin{bmatrix} xP_0 & yP_0 \\ xP_1 & yP_1 \\ xP_2 & yP_2 \end{bmatrix}}_{(\overrightarrow{OP})} = \underbrace{\begin{bmatrix} xM(t) & yM(t) \end{bmatrix}}_{\overrightarrow{OM}(t)}$$

Exemple *(avec $t = 0{,}5$)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 36 \\ 87 & 81 \\ 60 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 52{,}5 \end{bmatrix}$$

4

Équations des dérivées 1re et 2de => Hodographes : 1er = $\mathcal{H}'$ et 2d = $\mathcal{H}''$

a') selon les polynômes de Bernstein

$$\overrightarrow{OM}'(t) = 2[\ (1-t)\ (\overrightarrow{P_0P_1}) + t\ (\overrightarrow{P_1P_2})\ ]$$

$$M'(t) \begin{cases} xM'(t) = 2[\ (1-t)\ (xP_1 - xP_0) + t\ (xP_2 - xP_1)\ ] \\ yM'(t) = 2[\ (1-t)\ (yP_1 - yP_0) + t\ (yP_2 - yP_1)\ ] \end{cases}$$

b') canonique (selon les puissances de t)

$$\overrightarrow{OM}'(t) = 2t(\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_2}) + 2(\overrightarrow{P_0P_1})$$

$$M'(t) \begin{cases} x' = f'(t) = 2t\ (xP_0 - 2xP_1 + xP_2) + 2(xP_1 - xP_0) \\ y' = g'(t) = 2t\ (yP_0 - 2yP_1 + yP_2) + 2(yP_1 - yP_0) \end{cases}$$

---

a") $\overrightarrow{OM}''(t) = \forall\ t \in \mathbb{R} = 2[\ P_0\ -2\ P_1 +\ P_2\ ]$ $\mathcal{H}''$

$$\begin{cases} x'' = 2(xP_0 - 2xP_1 + xP_2) \\ y'' = 2(yP_0 - 2yP_1 + yP_2) \end{cases}$$

selon l' *Exemple 2* c'est le point | -216 | -228

remarquons que $\overrightarrow{OM}''$ définis l'orientation de l'axe **A** *passant par le sommet de la parabole* $\mathscr{C}_2$

Hodographe $\mathcal{H}'$

NB : $\mathcal{H}'$ ***doit être équipollent*** *: se dit de vecteurs parallèles, de même sens et de même grandeur.*

Mais visuellement sur [0 1] *il déborde du format* A4 *de la page => Pour y remédier il sera à l'échelle :* $\frac{1}{2} = 0{,}5$

Donc graphiquement $\mathcal{H}'$ ***ne sera pas*** *équipollent car la norme des vecteurs est divisée par* **2**

Définition de l'hodographe $\mathcal{H}'$ *sur l'intervalle* [0 1] *avec l'équation* $\overrightarrow{OM}'(t) = 2[\ (1-t)\ (\overrightarrow{P_0P_1}) + t\ (\overrightarrow{P_1P_2})\ ]$

$H'_0 = \overrightarrow{OM}'(0) = 2\ [(P_1 - P_0)]$
$H'_1 = \overrightarrow{OM}'(1) = 2\ [(P_2 - P_1)]$

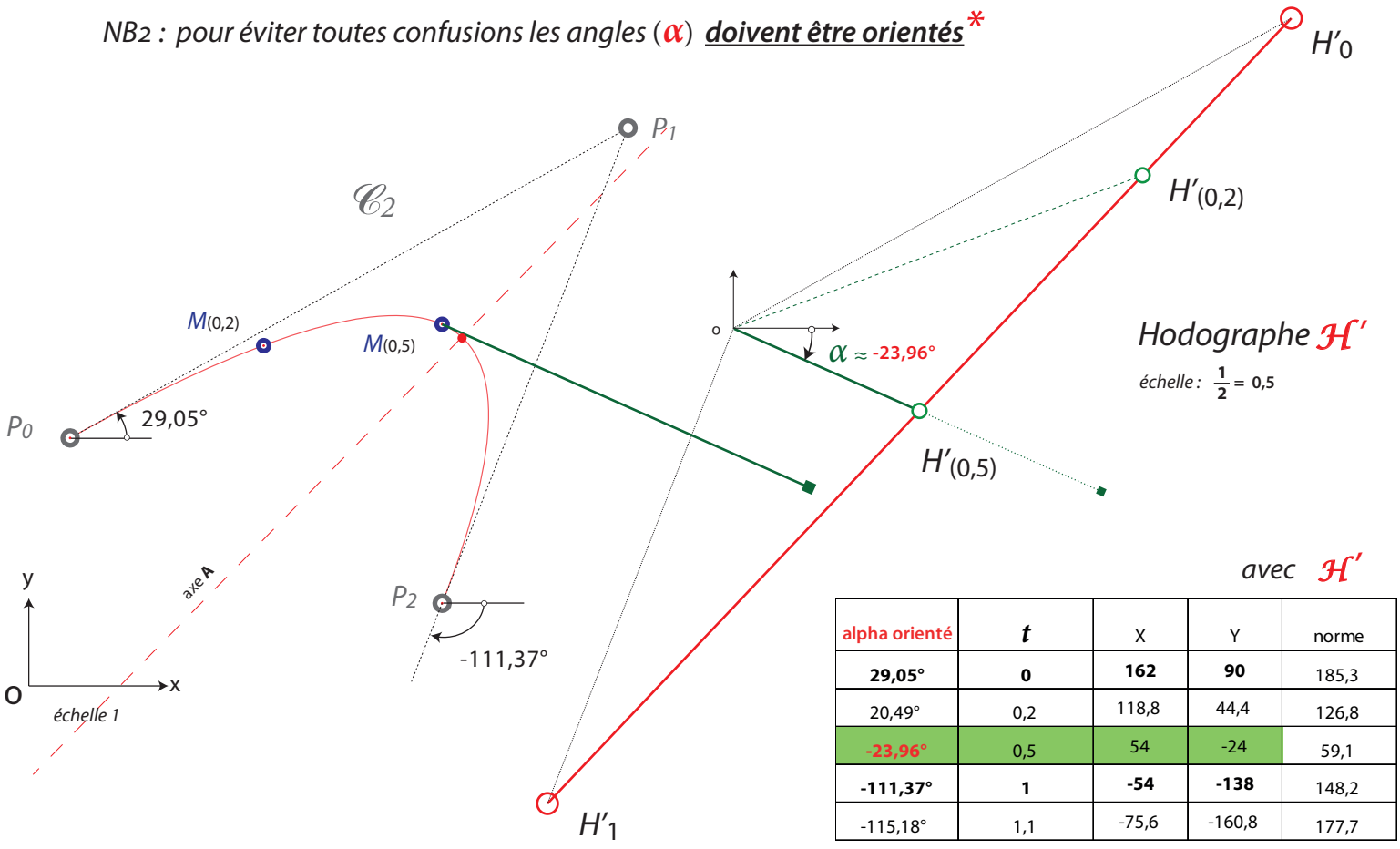
donc

$\mathcal{H}'$	X	Y
H'_0	162	90
H'_1	-54	-138

avec ces valeurs il est équipollent et peut servir à définir les vecteurs tangents

NB1 : la tangente à $\mathscr{C}_2$ *en un point* $M(t) = \dfrac{g'(t)}{f'(t)} = \dfrac{yH'(t)}{xH'(t)} = \tan(\alpha)$

NB2 : pour éviter toutes confusions les angles (α) ***doivent être orientés*** *



avec $\mathcal{H}'$

alpha orienté	*t*	X	Y	norme
29,05°	**0**	**162**	**90**	185,3
20,49°	0,2	118,8	44,4	126,8
-23,96°	0,5	54	-24	59,1
-111,37°	**1**	**-54**	**-138**	148,2
-115,18°	1,1	-75,6	-160,8	177,7

* *Pour en savoir plus sur les angles orientés et les coordonnées polaires : voir pages 38 et 39*

5

Équations des courbes de Bézier de degré 3 (B_3)[1]

a) Définition selon les polynômes de Bernstein

$$\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)^3\,\overrightarrow{OP_0} + 3t(1-t)^2\,\overrightarrow{OP_1} + 3t^2(1-t)\,\overrightarrow{OP_2} + t^3\,\overrightarrow{OP_3}$$

$$M(t)\ \left|\begin{array}{l} xM(t) = (1-t)^3\,xP_0 + 3t(1-t)^2\,xP_1 + 3t^2(1-t)\,xP_2 + t^3\,xP_3 \\ yM(t) = (1-t)^3\,yP_0 + 3t(1-t)^2\,yP_1 + 3t^2(1-t)\,yP_2 + t^3\,yP_3 \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{OM}'(t) = 3[\,(1-t)^2\,(\overrightarrow{P_0P_1}) + 2t(1-t)\,(\overrightarrow{P_1P_2}) + t^2\,(\overrightarrow{P_2P_3})\,]$$

$$M'(t)\ \left|\begin{array}{l} xM'(t) = 3[\,(1-t)^2\,(xP_1-xP_0) + 2t(1-t)(xP_2-xP_1) + t^2(xP_3-xP_2)\,] \\ yM'(t) = 3[\,(1-t)^2\,(yP_1-yP_0) + 2t(1-t)(yP_2-yP_1) + t^2(yP_3-yP_2)\,] \end{array}\right.$$

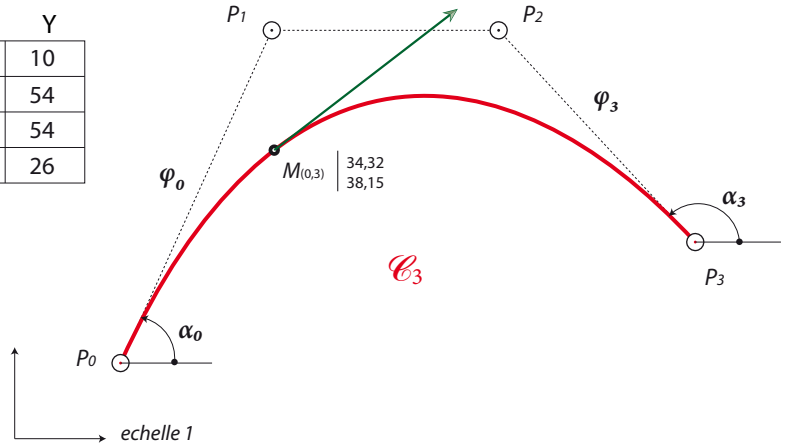
$$\overrightarrow{OM}''(t) = 6[\,(1-t)\,(\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_2}) + t\,(\overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_2P_3})\,]$$

$$M''(t)\ \left|\begin{array}{l} xM''(t) = 6[\,(1-t)\,(xP_2-xP_0) + t\,(xP_1-2xP_2+xP_3)\,] \\ yM''(t) = 6[\,(1-t)\,(yP_2-yP_0) + t\,(yP_1-2yP_2+yP_3)\,] \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{OM}'''(t) = 6[\,(\overrightarrow{P_0P_3}) + 3(\overrightarrow{P_2P_1})\,]$$

$$M'''(t)\ \left|\begin{array}{l} xM'''(t) = 6[\,xP_3-xP_0 + 3(xP_1-xP_2)\,] \\ yM'''(t) = 6[\,yP_3-yP_0 + 3(yP_1-yP_2)\,] \end{array}\right.$$

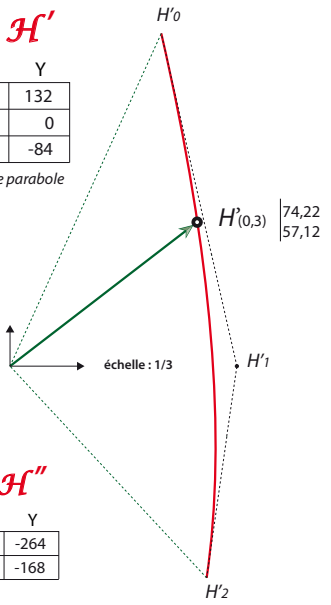
$\mathscr{C}_3$	X	Y
P_0	14	10
P_1	34	54
P_2	64	54
P_3	90	26



Hodographe 1er $\mathscr{H}'$

	X	Y
$H'_0 = 3(P_1-P_0)$	60	132
$H'_1 = 3(P_2-P_1)$	90	0
$H'_2 = 3(P_3-P_2)$	78	-84

dans ce cas c'est un arc de parabole



Hodographe 2d $\mathscr{H}''$

	X	Y
$H''_0 = 2(H'_1-H'_0)$	60	-264
$H''_1 = 2(H'_2-H'_1)$	-24	-168

Les vecteurs $\overrightarrow{P0P1}$ et $\overrightarrow{P3P2}$ sont respectivement tangents à $\mathscr{C}_3$ en P_0 et P_3

b) Définition avec $P_0\ P_1\ P_2\ P_3$ isolés .

$$M(t)\ \left|\begin{array}{l} x = f(t) = (1-t)^3\,xP_0 + 3t(1-t)^2\,xP_1 + 3t^2(1-t)\,xP_2 + t^3\,xP_3 \\ y = g(t) = (1-t)^3\,yP_0 + 3t(1-t)^2\,yP_1 + 3t^2(1-t)\,yP_2 + t^3\,yP_3 \end{array}\right.$$

$$M'(t)\ \left|\begin{array}{l} x' = f'(t) = -3[\,(1-t)^2\,xP_0 - (1-t)(1-3t)\,xP_1 - t(2-3t)\,xP_2 - t^2\,xP_3\,] \\ y' = g'(t) = -3[\,(1-t)^2\,yP_0 - (1-t)(1-3t)\,yP_1 - t(2-3t)\,yP_2 - t^2\,yP_3\,] \end{array}\right.$$

$$M''(t)\ \left|\begin{array}{l} x'' = f''(t) = 6[\,(1-t)\,xP_0 - (2-3t)\,xP_1 + (1-3t)\,xP_2 + t\,xP_3\,] \\ y'' = g''(t) = 6[\,(1-t)\,yP_0 - (2-3t)\,yP_1 + (1-3t)\,yP_2 + t\,yP_3\,] \end{array}\right.$$

$$M'''(t)\ \left|\begin{array}{l} x''' = f'''(t) = 6[\,xP_3 - xP_0 + 3(\,xP_1 - xP_2)\,] \\ y''' = g'''(t) = 6[\,yP_3 - yP_0 + 3(\,yP_1 - yP_2)\,] \end{array}\right.$$

c) Définition vecteurs et contraintes .

En posant : $\boldsymbol{V_0}=\overrightarrow{OP_0}$; $\boldsymbol{V_1}=(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0})$; $\boldsymbol{V_2}=(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$; $\boldsymbol{V_3}=(\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_2})$

$$\overrightarrow{OM}(t) = \boldsymbol{V_0} + (1-(1-t)^3)\,\boldsymbol{V_1} + (3t^2-2t^3)\,\boldsymbol{V_2} + t^3\,\boldsymbol{V_3}$$

$$\overrightarrow{OM}'(t) = 3[(1-t)^2)\,\boldsymbol{V_1} + 2t(1-t)\,\boldsymbol{V_2} + t^2\,\boldsymbol{V_3}]$$

$$\overrightarrow{OM}''(t) = -6[(1-t)\,\boldsymbol{V_1} - (1-2t)\,\boldsymbol{V_2} - t\boldsymbol{V_3}]$$

$$\overrightarrow{OM}'''(t) = 6[\,\boldsymbol{V_1} - 2\boldsymbol{V_2} + \boldsymbol{V_3}]$$

---

c) Définition de $M(t)$ matriciellement

matrice de passage

$$\begin{array}{c|c} t & 1\ \ t\ \ t^2\ \ t^3 \\ \hline 0 & 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0{,}3 & 1\ \ 0{,}3\ \ 0{,}1\ \ 0{,}027 \\ 0{,}7 & 1\ \ 0{,}7\ \ 0{,}5\ \ 0{,}343 \\ 1 & 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \end{array} \times \begin{array}{c} 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ -3\ \ 3\ \ 0\ \ 0 \\ 3\ \ -6\ \ 3\ \ 0 \\ -1\ \ 3\ \ -3\ \ 1 \end{array} \times \begin{array}{c|c} xP & yP \\ \hline 14 & 10 \\ 34 & 54 \\ 64 & 54 \\ 90 & 26 \end{array} = \begin{array}{c|c} xM(t) & yM(t) \\ \hline 14{,}00 & 10{,}00 \\ 34{,}32 & 38{,}15 \\ 65{,}90 & 43{,}21 \\ 90{,}00 & 26{,}00 \end{array}$$

$\mathcal{T}_n$ $\quad$ $\mathcal{M}_3$ $\quad$ $(\overrightarrow{OP})$ $\quad$ $\overrightarrow{OM}(t)$

6

d) Définition canonique (selon les puissances de t) => $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OC_0}t^3 + \overrightarrow{OC_1}t^2 + \overrightarrow{OC_2}t + \overrightarrow{OC_3}$

Avec : $xC_0 = x_3 = (xP_3 - xP_0 + 3(xP_1 - xP_2))$
$xC_1 = x_2 = 3(xP_0 + xP_2 - 2xP_1)$
$xC_2 = x_1 = 3(xP_1 - xP_0)$
$xC_3 = x_0 = xP_0$ *(Resp. pour les y)*

Réciproquement

$xP_0 = x_0$
$xP_1 = \frac{x_1}{3} + xP_0$
$xP_2 = \frac{x_2}{3} - xP_0 + 2xP_1$
$xP_3 = x_3 + xP_0 - 3(xP_1 - xP_2)$ *(Resp. pour les y)*

$$M(t)\begin{vmatrix} x = f(t) = x_3t^3 + x_2t^2 + x_1t + x_0 \\ y = g(t) = y_3t^3 + y_2t^2 + y_1t + y_0 \end{vmatrix} \quad M'(t)\begin{vmatrix} x' = f'(t) = 3x_3t^2 + 2x_2t + x_1 \\ y' = g'(t) = 3y_3t^2 + 2y_2t + y_1 \end{vmatrix} \quad M''(t)\begin{vmatrix} x'' = f''(t) = 6x_3t + 2x_2 \\ y'' = g''(t) = 6y_3t + 2y_2 \end{vmatrix} \quad M'''(t)\begin{vmatrix} x''' = 6x_3 \\ y''' = 6y_3 \end{vmatrix}$$

Donc dans notre exemple les points de $\mathscr{C}_3$ *sont aussi définis par :* $M(t)\begin{vmatrix} x = f(t) = -14t^3 + 30t^2 + 60t + 14 \\ y = g(t) = 16t^3 - 132t^2 + 132t + 10 \end{vmatrix}$

Et matriciellement avec : $(\overrightarrow{OC}) = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OM}(t) = {}^{T}(\overrightarrow{OC})\mathcal{T}_n$

---

e) Définition canonique avec P_1 et P_3 définis par coordonées polaires*

avec α_0 = angle orienté P_0P_1 , $\varphi_0 = \|P_0P_1\|$, α_3 = angle orienté P_3P_2 , $\varphi_3 = \|P_3P_2\|$

$$M(t)\begin{vmatrix} x = f(t) = t^3(2xP_0 + 3\varphi_0\cos(\alpha_0) - 3\varphi_3\cos(\alpha_3) - 2xP_3) - 3t^2(xP_0 + 2\varphi_0\cos(\alpha_0) - \varphi_3\cos(\alpha_3) - xP_3) + 3t\,\varphi_0\cos(\alpha_0) + xP_0 \\ y = g(t) = t^3(2yP_0 + 3\varphi_0\sin(\alpha_0) - 3\varphi_3\sin(\alpha_3) - 2yP_3) - 3t^2(yP_0 + 2\varphi_0\sin(\alpha_0) - \varphi_3\sin(\alpha_3) - yP_3) + 3t\,\varphi_0\sin(\alpha_0) + yP_0 \end{vmatrix}$$

e1) Avec P_1 connus et fixe .

$$M(t)\begin{vmatrix} x = f(t) = t^3(-xP_0 + 3xP_1 - 3\varphi_3\cos(\alpha_3) - 2xP_3) + 3t^2(xP_0 - 2xP_1 + \varphi_3\cos(\alpha_3) + xP_3) + 3t(xP_1 - xP_0) + xP_0 \\ y = g(t) = t^3(-yP_0 + 3yP_1 - 3\varphi_3\sin(\alpha_3) - 2yP_3) + 3t^2(yP_0 - 2yP_1 + \varphi_3\sin(\alpha_3) + yP_3) + 3t(yP_1 - yP_0) + yP_0 \end{vmatrix}$$

e2) Avec P_2 connus et fixe .

$$M(t)\begin{vmatrix} x = f(t) = t^3(2xP_0 + 3\varphi_0\cos(\alpha_0) - 3xP_2 + xP_3) - 3t^2(xP_0 + 2\varphi_0\cos(\alpha_0) - xP_2) + 3t\,\varphi_0\cos(\alpha_0) + xP_0 \\ y = g(t) = t^3(2yP_0 + 3\varphi_0\sin(\alpha_0) - 3yP_2 + yP_3) - 3t^2(yP_0 + 2\varphi_0\sin(\alpha_0) - yP_2) + 3t\,\varphi_0\sin(\alpha_0) + yP_0 \end{vmatrix}$$

---

f) Définition par coordonées polaires avec P_0 et P_3 isolés.

$$M(t)\begin{vmatrix} x = f(t) = (1-t)^2(2t+1)\,xP_0 + 3t(1-t)^2\,\varphi_0\cos(\alpha_0) + 3t^2(1-t)\,\varphi_3\cos(\alpha_3) + t^2(3-2t)xP_3 \\ y = g(t) = (1-t)^2(2t+1)\,yP_0 + 3t(1-t)^2\,\varphi_0\sin(\alpha_0) + 3t^2(1-t)\,\varphi_3\sin(\alpha_3) + t^2(3-2t)yP_3 \end{vmatrix}$$

$$M'(t)\begin{vmatrix} x' = f'(t) = 3\left[-2t(1-t)\,xP_0 + (1-t)(1-3t)\,\varphi_0\cos(\alpha_0) + t(2-3t)\,\varphi_3\cos(\alpha_3) + 2t(1-t)xP_3\right] \\ y' = g'(t) = 3\left[-2t(1-t)\,yP_0 + (1-t)(1-3t)\,\varphi_0\sin(\alpha_0) + t(2-3t)\,\varphi_3\sin(\alpha_3) + 2t(1-t)yP_3\right] \end{vmatrix}$$

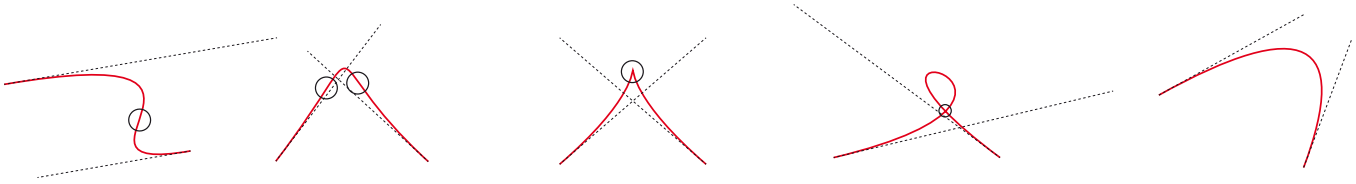
$$M''(t)\begin{vmatrix} x'' = f''(t) = 6\left[-(1-2t)\,xP_0 - (2-3t)\,\varphi_0\cos(\alpha_0) + (1-3t)\,\varphi_3\cos(\alpha_3) + (1-2t)xP_3\right] \\ y'' = g''(t) = 6\left[-(1-2t)\,yP_0 - (2-3t)\,\varphi_0\sin(\alpha_0) + (1-3t)\,\varphi_3\sin(\alpha_3) + (1-2t)yP_3\right] \end{vmatrix}$$

$$M'''(t)\begin{vmatrix} x''' = f'''(t) = 6\left[2xP_0 + 3\,\varphi_0\cos(\alpha_0) - 3\,\varphi_3\cos(\alpha_3) - 2xP_3\right] \\ y''' = g'''(t) = 6\left[2yP_0 + 3\,\varphi_0\sin(\alpha_0) - 3\,\varphi_3\sin(\alpha_3) - 2yP_3\right] \end{vmatrix}$$

**Pour en savoir plus sur les angles orientés et les coordonnées polaires : voir pages 38 et 39*

7

les différents types de B_3



1 point d'inflexion	2 points d'inflexion	1 rebroussement de 1ère espèce	1 point de croisement	1 arc de parabole
Type 1	Type 2	Type 3	Type 4	Type 5

B_3 spéciales *(quelques exemples)*

a) Courbe B_3 qui est une portion de parabole

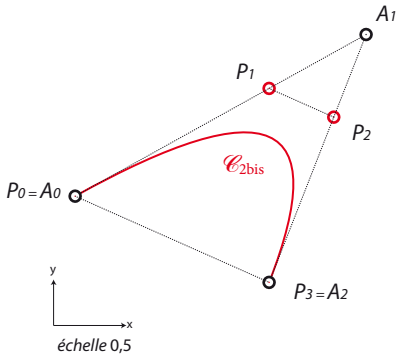
Dans la plupart des logiciels de dessin vectoriel seules les courbes de Bézier de degré 3 sont utilisées.
Voici une méthode pour afficher un vrai segment de parabole avec une B_3.

Il faut que P_1 *soit au* $\frac{2}{3}$ *de* $\overrightarrow{A_0A_1}$ *et* P_2 *au* $\frac{2}{3}$ *de* $\overrightarrow{A_2A_1}$

$\mathscr{C}_2$	X	Y
A_0	6	36
A_1	87	81
A_2	60	12

=

$\mathscr{C}_{2bis}$	X	Y
P_0	6	36
P_1	60	66
P_2	78	58
P_3	60	12



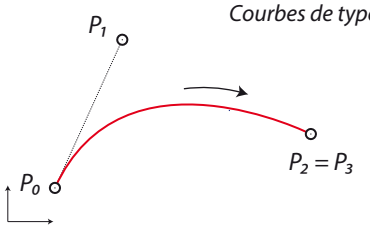
---

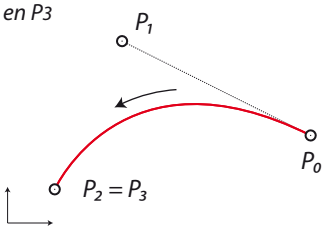
b) Courbe B_3 définie par «3 points» utilisée dans le système Postscript.

La courbe est définie par $P_0\ P_1\ P_2\ P_3$ *mais* P_2 *est confondu avec* P_3.

	X	Y
P_0	14	10
P_1	34	54
P_2	90	26
P_3	90	26

Courbes de type 3 avec rebroussement en P3





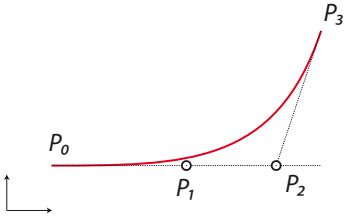
	X	Y
P_0	90	26
P_1	34	54
P_2	14	10
P_3	14	10

---

c) Courbe avec P_2 sur la tangente P_0P_1

Courbe de type 2 avec deux inflexions dont une en P_0

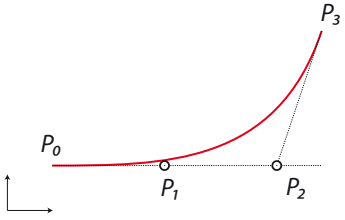
	X	Y
P_0	5	5
P_1	20	5
P_2	30	5
P_3	35	20



d) Courbe avec P_2 sur la tangente P_0P_1 et P_1 au milieu de P_0P_2

Courbe de type 1 avec une inflexion en P_0

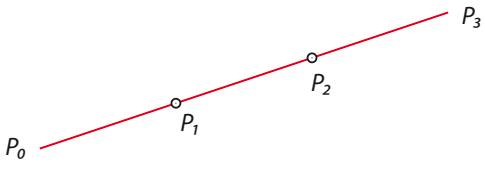
	X	Y
P_0	5	5
P_1	17,5	5
P_2	30	5
P_3	35	20



---

e) Droite définie par une B_3 => *il faut que P1 soit à* $\frac{1}{3}$ *de* $\overrightarrow{P_0P_3}$ *et P2 à* $\frac{1}{3}$ *de* $\overrightarrow{P_3P_0}$

	X	Y
P_0	0	0
P_1	9	3
P_2	18	6
P_3	27	9



Changement des paramètres d'une B_3 par rotation et translation*

Nous utiliserons la définition canonique d'une B3 => $M_{(t)} \begin{vmatrix} x = f_{(t)} = x_3t^3+x_2t^2+x_1t+x_0 \\ y = g_{(t)} = y_3t^3+y_2t^2+y_1t+y_0 \end{vmatrix}$

Exemple avec une courbe "inclinée" et ses hodographes

$\mathscr{C}_4$	X	Y
P_0	1	3
P_1	5	8
P_2	4	1
P_3	6	5

courbe de type 2

$\mathscr{C}_4 \begin{vmatrix} xM(t) = f(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 \\ yM(t) = g(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 \end{vmatrix}$

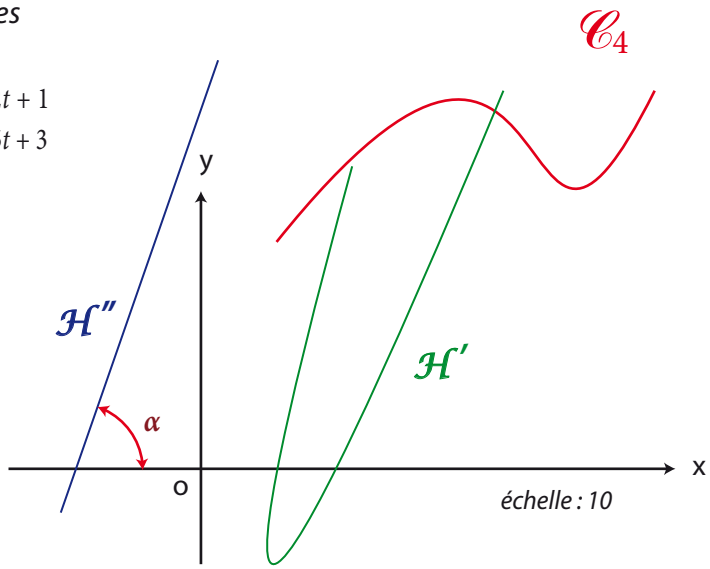
$M''' \begin{vmatrix} x''' = 6x_3 = 48 \\ y''' = 6y_3 = 132 \end{vmatrix}$

$\vec{a} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{23}{8}$ => $\alpha \approx 70{,}821°$

$\vec{b} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{-36}{-15}$ => $\beta \approx 67{,}380°$

$\vec{c} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{15}{12}$ => $\gamma \approx 51{,}340°$

$\vec{d} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{3}{1}$ => $\delta \approx 71{,}565°$



NB : *les angles* $\alpha, \beta...$ ***ne doivent pas*** *être orientés*

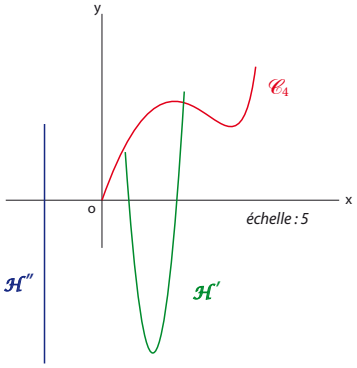
Méthode pour "redresser" et simplifier une courbe B_3 *par rotation et translation :*

Appliquer une rotation de* $(\frac{\pi}{2} - \alpha) \approx 19{,}179°$ *de centre* $P_0\begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix}$ *et une translation de* $-P_0\begin{vmatrix}-1\\-3\end{vmatrix}$

$\approx$

$\mathscr{C}_4$	X	Y
P_0	0	0
P_1	2,14	6,04
P_2	3,49	-0,90
P_3	4,07	3,53

$\mathscr{C}_4 \begin{vmatrix} f(t) \approx 0\,t^3 - 2{,}34\,t^2 + 6{,}41\,t + 0 \\ g(t) \approx 24{,}35\,t^3 - 38{,}93\,t^2 + 18{,}11\,t + 0 \end{vmatrix}$



Avec une rotation de $-\alpha$ *c'est le coefficient* y_3 *qui sera nul.*

De la même manière une rotation impliquant β *les coef.* x_2 *ou* y_2 *seront = 0 etc...*

En fait l'invariance affine du paramètre t autorise ces changements.
Cela veut dire que quelque soit l'orientation de la courbe sur $\mathbb{R}^2$ le paramètre t ne change pas.

Cette astuce n'est pas à négliger.
Elle permet, entre autre, de déterminer le point de croisement d'une B_3 de type 4 (voir page 15)
aussi le calcul du foyer d'une parapole (voir page 13)

**Rotation à l'aide de la formule du changement de base (modifiée) voir page 36*

Intersection d'une droite avec une *B3*, calcul du paramètre *t*

Exemples

- ∩ avec par exemple une droite d'équation $x = 2$ ou $y = 4{,}5$
- ∩ avec une droite définie par un point *E* et son coefficient directeur ***a***

Exemple 1 avec $\mathcal{C}_4$ *et* $L \begin{vmatrix} 2 \\ ? \end{vmatrix}$

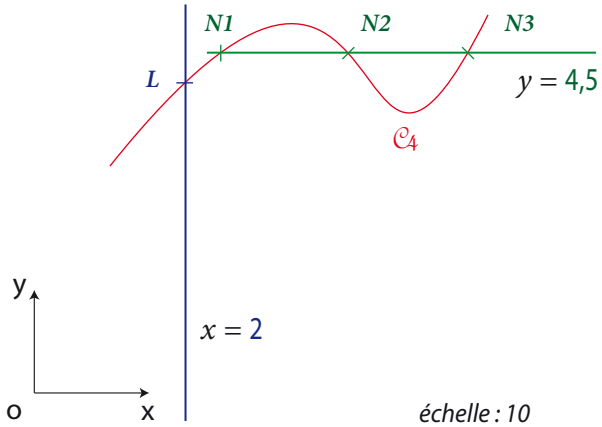
$\mathcal{C}_4$	X	Y
P_0	1	3
P_1	5	8
P_2	4	1
P_3	6	5

$$\mathcal{C}_4 \begin{vmatrix} xM(t) = f(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 \\ yM(t) = g(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 \end{vmatrix}$$

$$xM(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 = 2$$

Donc il faut résoudre : * $8t^3 - 15t^2 + 12t - 1 = 0$

=> 1 solution réelle : $t \approx 0{,}0938$ => $L \begin{vmatrix} 2 \\ 4{,}11 \end{vmatrix}$



échelle : 10

Exemple 2 avec $\mathcal{C}_4$ *et* $N \begin{vmatrix} ? \\ 4{,}5 \end{vmatrix}$

en développant => $yM(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 = 4{,}5$

$23t^3 - 36t^2 + 15t - 1{,}5 = 0$ => *3 solutions réelles :*

$t_1 \approx 0{,}1470$ $t_2 \approx 0{,}4660$ $t_3 \approx 0{,}9523$

$N_1 \begin{vmatrix} 2{,}47 \\ 4{,}5 \end{vmatrix}$ $N_2 \begin{vmatrix} 4{,}14 \\ 4{,}5 \end{vmatrix}$ $N_3 \begin{vmatrix} 5{,}73 \\ 4{,}5 \end{vmatrix}$

Intersection avec une droite définie par un point *E* et son coefficient directeur ***a***

Exemple 3

avec $M(t) \begin{vmatrix} x = f(t) = x_3t^3 + x_2t^2 + x_1t + x_0 \\ y = g(t) = y_3t^3 + y_2t^2 + y_1t + y_0 \end{vmatrix}$ $E \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ $a = 1$

=> $\mathcal{C}_4 \begin{vmatrix} xM(t) = f(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 \\ yM(t) = g(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 \end{vmatrix}$

Résoudre : $\dfrac{y\mathcal{C}_4 - yE}{x\mathcal{C}_4 - xE} = a$

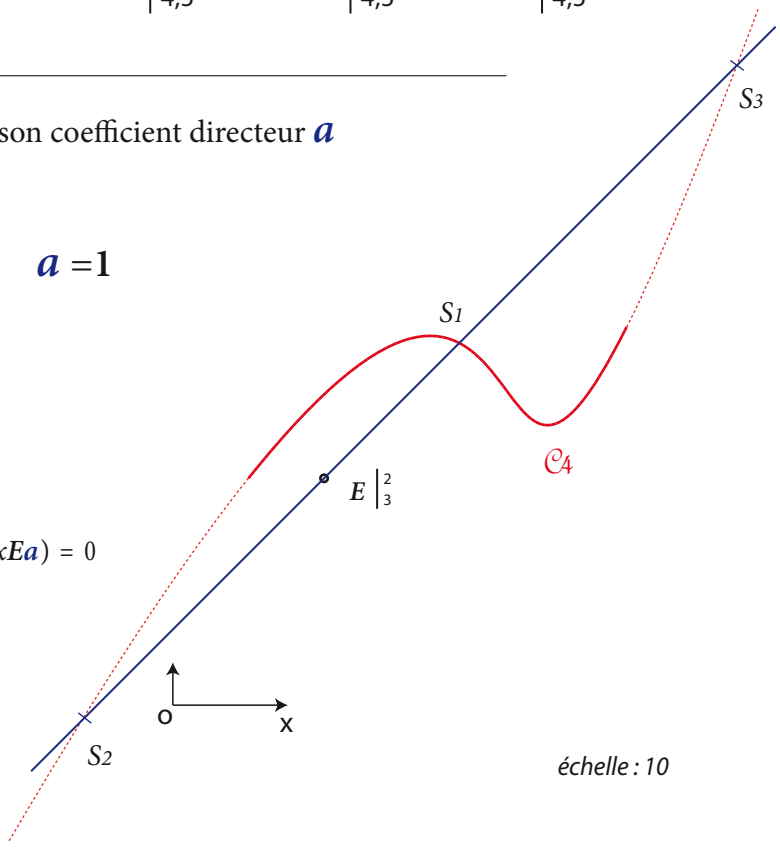
=> $(y_3 - ax_3)t^3 + (y_2 - ax_2)t^2 + (y_1 - ax_1)t + (y_0 - ax_0 - yE + xEa) = 0$

=> $15t^3 - 21t^2 + 3t + 1 = 0$

=> *3 solutions réelles :*

$t_1 \approx 0{,}3692$ $t_2 \approx -0{,}1526$ $t_3 \approx 1{,}1834$

$S_1 \begin{vmatrix} 3{,}78 \\ 4{,}78 \end{vmatrix}$ $S_2 \begin{vmatrix} -1{,}21 \\ -0{,}21 \end{vmatrix}$ $S_3 \begin{vmatrix} 7{,}45 \\ 8{,}45 \end{vmatrix}$



échelle : 10

Intersection de 2 *B3*

Un algorithme s'impose => *https://pomax.github.io/bezierinfo/#intersections*

* *pour résoudre une équation du 3ème degré allez sur les page 34 et 35*

10

Estimation du paramètre *t*

Dans certains calculs, il est parfois necessaire d'estimer le paramètre ***t*** d'un ou plusieurs points *M*.

Exemple avec la *méthode des normes*

soit : $||P_0P_3|| \approx 49{,}82$ $||P_0M_1|| \approx 16{,}13$ $||P_0M_2|| \approx 35{,}47$

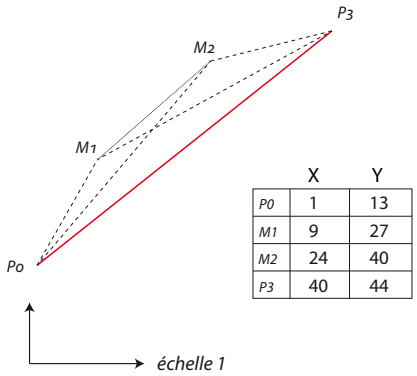
$$t_{(M1)} = \frac{||P_0M_1||}{||P_0P_3||} \approx 0{,}3237 \qquad t_{(M2)} = \frac{||P_0M_2||}{||P_0P_3||} \approx 0{,}7119$$

Et aussi avec : $||P_0P_3|| \approx 49{,}82$ $||P_3M_1|| \approx 35{,}36$ $||P_3M_2|| \approx 16{,}49$

$$t_{(M1)} = 1 - \frac{||P_3M_1||}{||P_0P_3||} \approx 0{,}2903 \qquad t_{(M2)} = 1 - \frac{||P_3M_2||}{||P_0P_3||} \approx 0{,}6690$$

$t_{(M1)}$ moyen $\approx 0{,}3070$

$t_{(M2)}$ moyen $\approx 0{,}6905$



	X	Y
P0	1	13
M1	9	27
M2	24	40
P3	40	44

Conversion d'une B-spline (*cubique*) en B_3

Equations d'une B-spline avec ses points de contrôle : $Q_0\ Q_1\ Q_2\ Q_3$

$$M(t) \begin{cases} xM(t) = \frac{1}{6}\left[(1-t)^3\, xQ_0 + (3t^3-6t^2+4)\, xQ_1 + (-3t^3+3t^2+3t+1)xQ_2 + t^3\, xQ_3 \right] \\ yM(t) = \frac{1}{6}\left[(1-t)^3\, yQ_0 + (3t^3-6t^2+4)\, yQ_1 + (-3t^3+3t^2+3t+1)\, yQ_2 + t^3\, yQ_3 \right] \end{cases}$$

B-spline

	X	Y
Q_0	3	5
Q_1	24	35
Q_2	63	23
Q_3	78	-7

Equations d'une courbe de Bézier avec ses points de définition : $P_0\ P_1\ P_2\ P_3$

$$M(t) \begin{cases} xM(t) = (1-t)^3\, xP_0 + 3t(1-t)^2\, xP_1 + 3t^2(1-t)\, xP_2 + t^3\, xP_3 \\ yM(t) = (1-t)^3\, yP_0 + 3t(1-t)^2\, yP_1 + 3t^2(1-t)\, yP_2 + t^3\, yP_3 \end{cases}$$

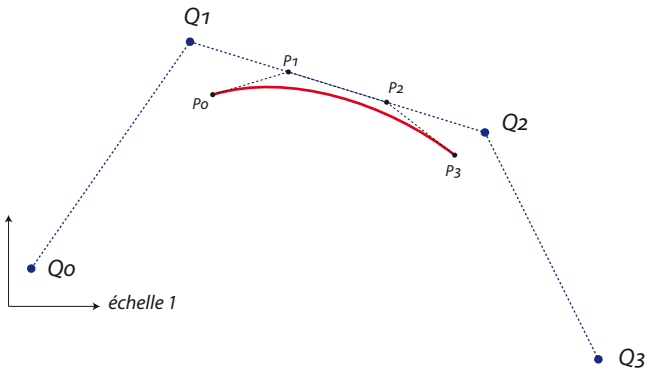
Bézier

	X	Y
P_0	27	28
P_1	37	31
P_2	50	27
P_3	59	20

conversion B-Spline en B_3

$$xP_0 = \frac{1}{6}\,(\,xQ_0 + 4xQ_1 + xQ_2)$$
$$xP_1 = \frac{1}{6}\,(\,4xQ_1 + 2xQ_2)$$
$$xP_2 = \frac{1}{6}\,(\,2xQ_1 + 4xQ_2)$$
$$xP_3 = \frac{1}{6}\,(\,xQ_1 + 4xQ_2 + xQ_3)$$

idem pour les y



conversion B_3 en B-Spline

$$xQ_0 = \ (\,6xP_0 - 7xP_1 + 2xP_2)$$
$$xQ_1 = \ (\,2xP_1 - xP_2)$$
$$xQ_2 = \ (\,-xP_1 + 2xP_2)$$
$$xQ_3 = \ (\,2xP_1 - 7xP_2 + 6xP_3)$$

idem pour les y

11

Parabole (B_2) : calcul de son axe **A**, son sommet S et son foyer F

Calcul du sommet S avec $\mathcal{H}''$ $\left|\begin{array}{l} x''= -216 \\ y''= -228 \end{array}\right.$

le coef dir. de l'axe **A** *de la parabole* $= \vec{a} = \dfrac{y\mathcal{H}''}{x\mathcal{H}''}$ *La tangente au sommet* $S = \vec{d} = -\dfrac{1}{\vec{a}} = -\dfrac{x\mathcal{H}''}{y\mathcal{H}''}$

calcul du paramètre t *du sommet* S *avec :* $M'_{(t)}$ $\left|\begin{array}{l} x'= f'_{(t)} = 2t\,(xP_0 - 2xP_1 + xP_2) + 2(xP_1 - xP_0) \\ y'= g'_{(t)} = 2t\,(yP_0 - 2yP_1 + yP_2) + 2(yP_1 - yP_0) \end{array}\right.$

$$\vec{d} = \frac{2t\,(yP_0 - 2yP_1 + yP_2) + 2(yP_1 - yP_0)}{2t\,(xP_0 - 2xP_1 + xP_2) + 2(xP_1 - xP_0)} \qquad \text{donc } t_{(sommet)} = \frac{(yP_1 - yP_0) - \vec{d}\,(xP_1 - xP_0)}{\vec{d}\,(xP_0 - 2xP_1 + xP_2) - (yP_0 - 2yP_1 + yP_2)}$$

Exemple

avec

$\mathcal{C}_2$	X	Y
P_0	6	36
P_1	87	81
P_2	60	12

$\mathcal{C}_2$ $\left|\begin{array}{l} xM(t) = -108t^2 + 162t + 6 \\ yM(t) = -114t^2 + 90t + 36 \end{array}\right.$

$$\vec{a} = \frac{-228}{-216} \qquad \vec{d} = -\frac{216}{228} \qquad \text{donc } t_{(sommet)} \approx 0{,}5627737 \quad => \quad S \left|\begin{array}{l} xS(t_{sommet}) \approx 62{,}964 \\ yS(t_{sommet}) \approx 50{,}544 \end{array}\right.$$

Calcul du foyer F *(méthode indirecte)* [1]

Il convient de noter que l'intersection d'une tangente à* $\mathcal{C}_2$ *(par exemple* P_2P_1*) avec l'axe* **A** *détermine* L
Le foyer F *sera déterminé par l'intersection de la médiatrice de* P_2L *avec l'axe* **A** .
NB : M *est le point milieu du segment* P_2L

Exemple

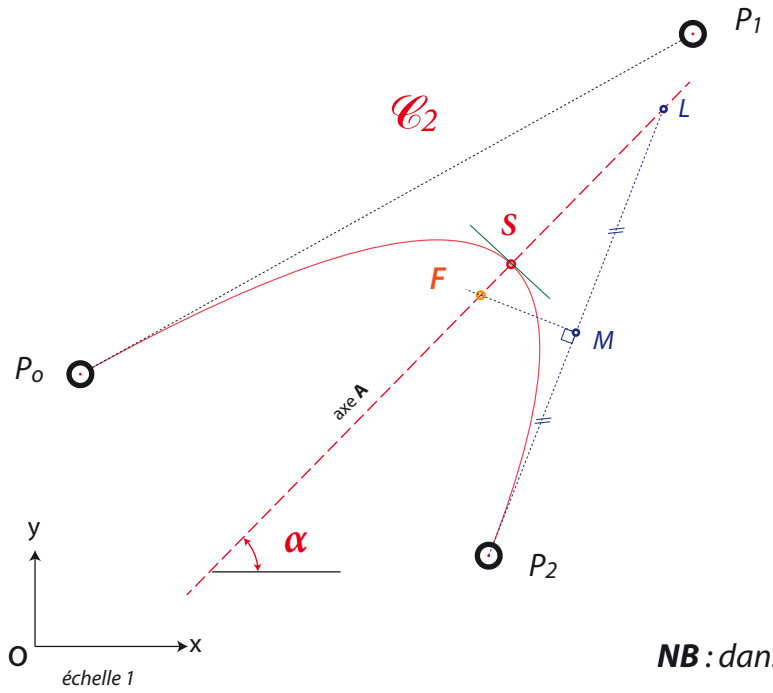
$L = (S ; \vec{a}) \cap \overrightarrow{P_2P_1}$

	X	Y	coef dir.
P_2	60	12	2,5556 *(coef dir. de* $\overrightarrow{P_2P_1}$*)*
S	62,964	50,544	1,0556 (a)
L	83,61	72,34	

$F = (S ; \vec{a}) \cap$ *médiatrice de* $\overrightarrow{P_2L}$

	X	Y	coef dir.
S	62,564	50,544	1,0556 (a)
M	71,81	42,17	-0,3913 (-1÷ 25556)
F	59,566	46,958	

* *voir page 37 intersection avec la formule de* ***Delambre***



$\mathscr{C}_2 \left| \begin{array}{l} xM(t) = -108t^2 + 162t + 6 \\ yM(t) = -114t^2 + 90t + 36 \end{array} \right.$

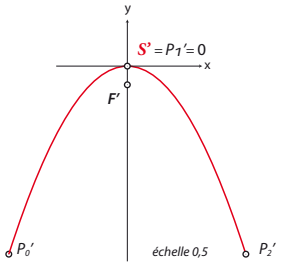
$S \left| \begin{array}{l} 62{,}964 \\ 50{,}544 \end{array} \right.$

$\alpha = \arctan(\vec{a}) \approx 46{,}5482°$

***NB** : dans ce cas l'angle α **ne doit pas** être orienté*

Calcul du foyer F *«méthode directe»*

Dans un premier temps il faut que le sommet de la parabole soit à l'origine du repère orthonormé ,
et son axe A doit coïncider avec l'axe OY.
Nous allons donc effectuer un changement de base avec une rotation de $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$
dont le centre de rotation Ω *est le sommet* S *et appliquer une translation de :* $-xS \quad -yS$



Donc dans ce cas la avec $\Omega = S \left| \begin{array}{ll} 62{,}964 & \Delta x \approx -62{,}964 \\ 50{,}544 & \Delta y \approx -50{,}544 \end{array} \right.$

$P_0' \left| \begin{array}{l} xP_0' = \cos(\alpha)\,(xP_0 - xS) - \sin(\alpha)\,(yP_0 - yS) \approx -31{,}351 \\ yP_0' = \sin(\alpha)\,(xP_0 - xS) + \cos(\alpha)\,(yP_0 - yS) \approx -49{,}735 \end{array} \right.$

P_2' est le symétrique de P_0' $\left| \begin{array}{l} xP_2' \approx 31{,}351 \\ yP_2' \approx -49{,}735 \end{array} \right.$ $\qquad P_1' = S' = 0$

En interpolant les points P_0', P_1', P_2' par la méthode de Newton => $N_1 = \frac{yP_0' - yP_1'}{xP_0' - xP_1'} = \frac{yP_0'}{xP_0'} \qquad N_2 = \frac{yP_1' - yP_2'}{xP_1' - xP_2'} = \frac{-yP_2'}{-xP_2'}$

le paramètre a *de la parabole* $= \frac{N_1 - N_2}{xP_0' - xP_2'} = \frac{yP_0'}{(xP_0')^2} \approx -0{,}05060 \Rightarrow F' \left| \begin{array}{l} x F' = 0 \\ y F' = \frac{1}{4a} = \frac{(xP_0')^2}{4yP_0'} \approx -4{,}9405 \end{array} \right.$

Retour à la base initiale en posant : $F \left| \begin{array}{l} xF = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)(xF' - x\Omega - \Delta x) + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)(yF' - y\Omega - \Delta y) + x\Omega = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)yF' + xS \\ yF = -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)(xF' - x\Omega - \Delta x) + \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)(yF' - y\Omega - \Delta y) + y\Omega = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)yF' + yS \end{array} \right.$

Donc directement avec : $S \quad , \quad A = (xP_0 - xS) \quad , \quad B = (yP_0 - yS) \quad$ *et* $\quad yF' = \frac{(xP_0')^2}{4yP_0'}$

$$F \left| \begin{array}{l} xF = \cos(\alpha)\,(yF') + xS = \dfrac{(\sin(\alpha)\,A - \cos(\alpha)\,B)^2}{4\,(A + \operatorname{cotan}(\alpha)\,B)} + xS \\ yF = \sin(\alpha)\,(yF') + yS = \dfrac{(\sin(\alpha)\,A - \cos(\alpha)\,B)^2}{4\,(\tan(\alpha)\,A + B)} + yS \end{array} \right.$$

NB : le calcul de F peut se faire sur $\mathbb{R}^2$ avec P_0 = n'importe quel point de la parabole hormis son sommet.

Points stationnaires et de croisement d'une B_3 [1]

Pour déterminer ces points utilisons la formule suivante : le déterminant $\left[B_3'(t)\ ,\ B_3''(t)\right] = 0$

Avec : $B_3' \Rightarrow \left|\begin{matrix} x' = f'(t) = 3x_3t^2+2x_2t+x_1 \\ y' = g'(t) = 3y_3t^2+2y_2t+y_1 \end{matrix}\right.$ et $B_3'' \Rightarrow \left|\begin{matrix} x'' = f''(t) = 6x_3t+2x_2 \\ y'' = g''(t) = 6y_3t+2y_2 \end{matrix}\right.$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} f'(t) & f''(t) \\ g'(t) & g''(t) \end{bmatrix} \Rightarrow f'(t)\,g''(t) - g'(t)\,f''(t) = 0$

En développant : $\Rightarrow (x_2y_3 - x_3y_2)t^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)t + (x_1y_2 - x_2y_1)/3 = At^2 + Bt + C = 0$

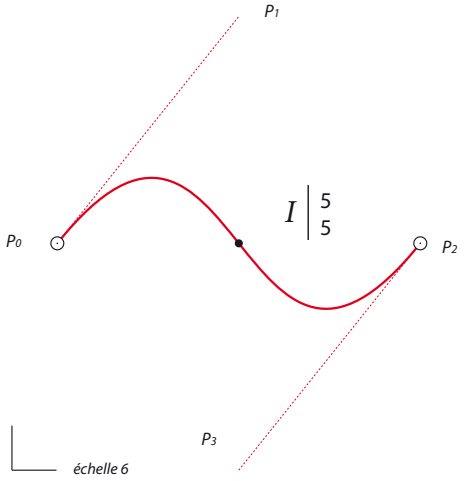
Si Δ>0 et A=0 => 1 pt d'inflexion
Si Δ>0 et A≠0 => 2 pts d'inflexions
Si Δ=0 => 1 pt rebroussement
Si Δ<0 => 1 pt croisement
Si A=0 et B=0 => 1 arc de parabole

---

1) courbe de type 1 *(avec un point d'inflexion)*

$\mathscr{C}_{31}$	X	Y
P_0	1	5
P_1	5	10
P_2	5	0
P_3	9	5

$\mathscr{C}_{31} \left|\begin{matrix} f(t) = 8t^3 - 12t^2 + 12t + 1 \\ g(t) = 30t^3 - 45t^2 + 15t + 5 \end{matrix}\right.$



$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 0t^2 + 240t - 120 = 0$ (Δ=57600 et A=0)

$\Rightarrow t = 0{,}5$

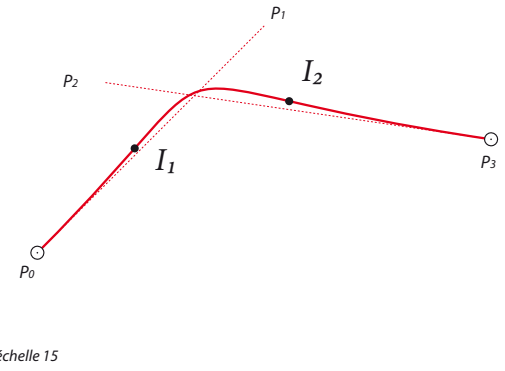
1 point d'inflexion en $I_{(0,5)} \left|\begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix}\right.$

---

2) courbe de type 2 *(avec deux points d'inflexions)*

$\mathscr{C}_{32}$	X	Y
P_0	1	1
P_1	3	3
P_2	1.6	2.5
P_3	5	2

$\mathscr{C}_{32} \left|\begin{matrix} f(t) = 8{,}2t^3 - 10{,}2t^2 + 6t + 1 \\ g(t) = 2{,}5t^3 - 7{,}5t^2 + 6t + 1 \end{matrix}\right.$



$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 36t^2 - 34{,}2t + 5{,}4 = 0$ (Δ=36)

$\Rightarrow t_1 \approx 0{,}2 \quad t_2 \approx 0{,}75$

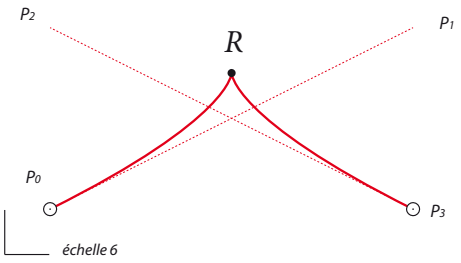
2 points d'inflexions en $I_1 \left|\begin{matrix} 1{,}858 \\ 1{,}920 \end{matrix}\right.$ $I_2 \left|\begin{matrix} 3{,}222 \\ 2{,}336 \end{matrix}\right.$

---

3) courbe de type 3 *(avec un point de rebroussement de 1ère espèce)*

$\mathscr{C}_{33}$	X	Y
P_0	1	1
P_1	9	5
P_2	1	5
P_3	9	1

$\mathscr{C}_{33} \left|\begin{matrix} f(t) = 32t^3 - 48t^2 + 24t + 1 \\ g(t) = 0t^3 - 12t^2 + 12t + 1 \end{matrix}\right.$



$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 384t^2 - 384t + 96 = 0$ (Δ=0)

$\Rightarrow t = 0{,}5$ *1 rebroussement en* $R \left|\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix}\right.$

14

4) courbe de type 4 *(avec un point de croisement ou point double)*

$\mathscr{C}_{34}$

	X	Y
P_0	4	2
P_1	7	6
P_2	1	4
P_3	7	3

$\mathscr{C}_{34} \left| \begin{array}{l} f(t) = 21t^3 - 27t^2 + 9t + 4 \\ g(t) = 7t^3 - 18t^2 + 12t + 2 \end{array} \right.$ $\quad x'y'' - y'x'' \Rightarrow \quad 189t^2 - 189t + 54 = 0 \quad (\Delta = -5103)$

Calcul du point double $\mathcal{D} \left| \begin{array}{l} f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow x_3t_1^3 + x_2t_1^2 + x_1t_1 + x_0 = x_3t_2^3 + x_2t_2^2 + x_1t_2 + x_0 \\ g(t_1) = g(t_2) \Rightarrow y_3t_1^3 + y_2t_1^2 + y_1t_1 + y_0 = y_3t_2^3 + y_2t_2^2 + y_1t_2 + y_0 \end{array} \right.$

$f(t_1) - f(t_2) = 0 \Rightarrow x_3(t_1^3 - t_2^3) + x_2(t_1^2 - t_2^2) + x_1(t_1 - t_2) = 0$

A l'aide des identitées remarquables suivantes : $(a^2-b^2) = (a+b)(a-b)$ et $(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\Rightarrow x_3(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) + x_2(t_1 - t_2)(t_1 + t_2) + x_1(t_1 - t_2) = 0$

Donc $x_3(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + x_2(t_1 + t_2) + x_1 = 0$

A présent le but est de définir t_2 à partir de t_1, nous allons donc faire en sorte que : $x_3 = 0$

Comme expliqué à la page 9 nous allons changer certains paramètres l'équation : $x_3(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + x_2(t_1 + t_2) + x_1 = 0$

En sachant que $\tan(\alpha) = \frac{y_3}{x_3}$ *et à l'aide de la formule du changement de base, appliquons une rotation de* $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ *sur l'équation concernée.*

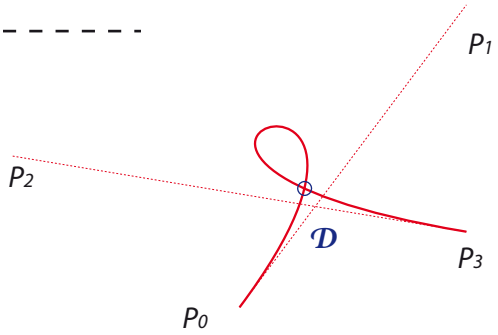
avec : $X_2 = x_2\sin(\alpha) - y_2\cos(\alpha)$ *et* $X_1 = x_1\sin(\alpha) - y_1\cos(\alpha) \Rightarrow 0(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + X_2(t_1 + t_2) + X_1 = 0 \Rightarrow t_2 = -\frac{X_1}{X_2} - t_1$

Résoudre $\left\{ \begin{array}{l} x_3(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + x_2(t_1 + t_2) + x_1 = 0 \\ t_2 = -\frac{X_1}{X_2} - t_1 \end{array} \right.$ *avec* $G = \frac{X_1}{X_2} = \frac{x_2\tan(\alpha) - y_1}{x_1\tan(\alpha) - y_2} = \frac{x_1\frac{y_3}{x_3} - y_1}{x_2\frac{y_3}{x_3} - y_2} = \frac{x_1y_3 - y_1x_3}{x_2y_3 - y_2x_3}$

$\Rightarrow \quad \frac{t_1^2}{G} + t_1 + G + \frac{x_1}{x_3G} - \frac{x_2}{x_3} = 0 \quad$ ou $\quad t_1^2 + Gt_1 + G^2 + \frac{x_1 - x_2G}{x_3} = 0$

- -

Exemple avec $\mathscr{C}_{34} \left| \begin{array}{l} f(t) = 21t^3 - 27t^2 + 9t + 4 \\ g(t) = 7t^3 - 18t^2 + 12t + 2 \end{array} \right.$

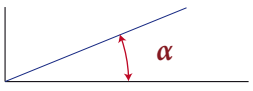


$\Rightarrow \quad G = -1$

$\Rightarrow \quad -t^2 + t - \frac{1}{7} = 0 \quad (\Delta = \frac{3}{7})$

$\Rightarrow \quad t_1 \approx 0{,}1727 \quad t_2 \approx 0{,}8273$

1 point de croisement en $\mathcal{D}$ $\left| \begin{array}{l} 4{,}857 \\ 3{,}571 \end{array} \right.$



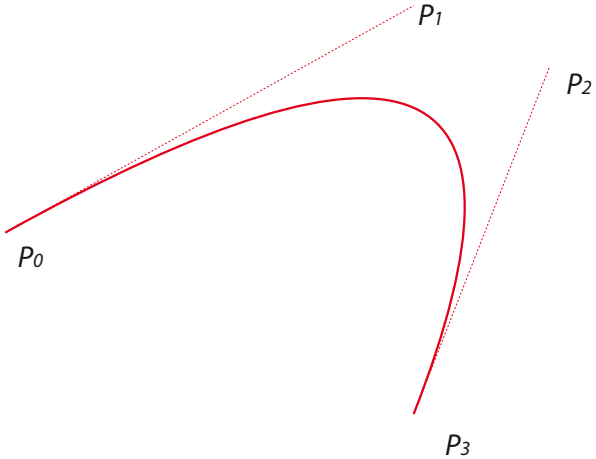
échelle 10

---

5) courbe de type 5 *(arc de parabole)*

Exemple $\mathscr{C}_2$

	X	Y
P_0	6	36
P_1	60	66
P_2	78	58
P_3	60	12



$\mathscr{C}_2 \left| \begin{array}{l} f(t) = 0t^3 - 108t^2 + 162t + 6 \\ g(t) = 0t^3 - 114t^2 + 90t + 36 \end{array} \right.$

$x'y'' - y'x'' \Rightarrow \quad 0t^2 + 0t - 2916 = 0$

échelle 1

15

Subdivisions récursives d'une B_2 avec la méthode de "De Casteljau" [1]

Cette méthode permet de calculer les coordonnées d'un point $M_{(t)}$ sans passer par les équations de Bézier

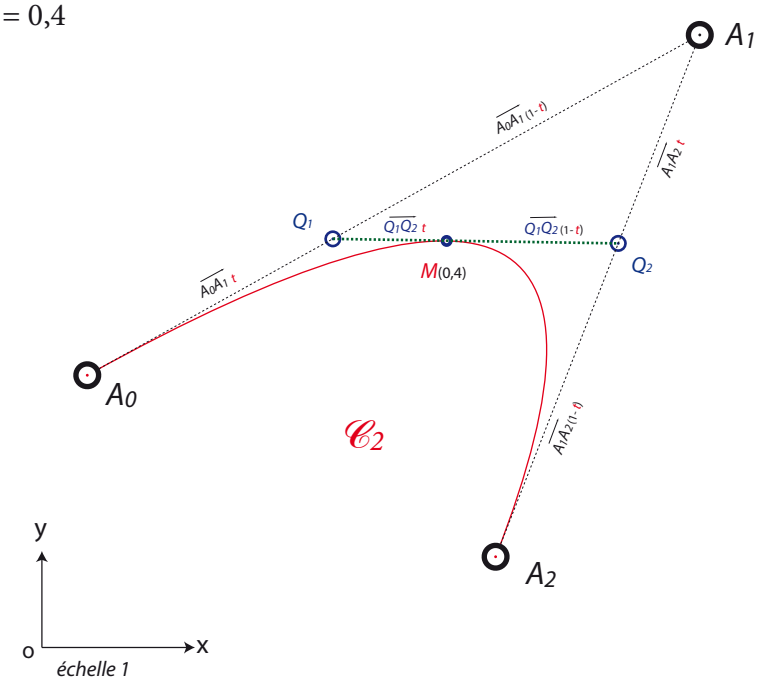
Les points A_0 A_1 A_2 définissent la courbe $\mathscr{C}_2$
et **M** un point de cette courbe de paramètre $t = 0{,}4$

$$Q_1 = (1-t)A_0 + t\,A_1 \quad ou \quad t\,(A_1 - A_0) + A_0$$
$$Q_2 = (1-t)A_1 + t\,A_2 \quad ou \quad t\,(A_2 - A_1) + A_1$$
$$\mathbf{M} = (1-t)Q_1 + t\,Q_2 \quad ou \quad t\,(Q_2 - Q_1) + Q_1$$

$\mathscr{C}_2$	X	Y
A_0	6	36
A_1	87	81
A_2	60	12

donc avec $t = 0{,}4$

	X	Y
Q_1	38,4	54
Q_2	76,2	53,4
M	53,52	53,76



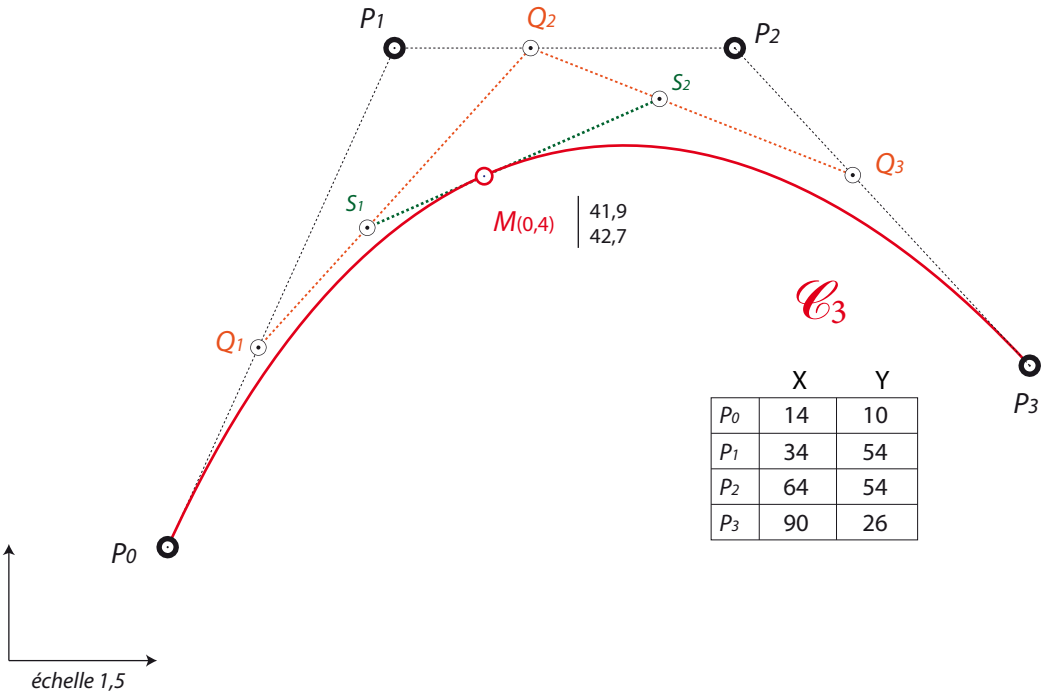
Subdivisions récursives d'une B_3

Les points P_0 P_1 P_2 P_3 sont les points de définitions de $\mathscr{C}_3$
et **M** un point de cette courbe de paramètre $t = 0.4$

$$Q_1 = (1-t)P_0 + t\,P_1$$
$$Q_2 = (1-t)P_1 + t\,P_2$$
$$Q_3 = (1-t)P_2 + t\,P_3$$
$$S_1 = (1-t)Q_1 + t\,Q_2$$
$$S_2 = (1-t)Q_2 + t\,Q_3$$
$$\mathbf{M} = (1-t)S_1 + t\,S_2$$

donc avec $t = 0.4$

	X	Y
Q_1	22	27,6
Q_2	46	54
Q_3	74,4	42,8
S_1	31,6	38,2
S_2	57,4	49,5
M	41,9	42,7



	X	Y
P_0	14	10
P_1	34	54
P_2	64	54
P_3	90	26

Et de ce fait nous pouvons diviser la courbe $\mathscr{C}_3$ en $M_{(0,4)}$ => 2 courbes définies par :

$\mathscr{C}_{3a}$ P_0 Q_1 S_1 M
$\mathscr{C}_{3b}$ M S_2 Q_3 P_3

16

Quelques applications pour une B_3

Méthode pour subdiviser une B_3 en un point $M_{(t)}$

Exemple avec $\mathscr{C}_3$ *et un point de subdivision* M *de paramètre* $t = 0{,}4$

$\mathscr{C}_3$	X	Y
P_0	14	10
P_1	34	54
P_2	64	54
P_3	90	26

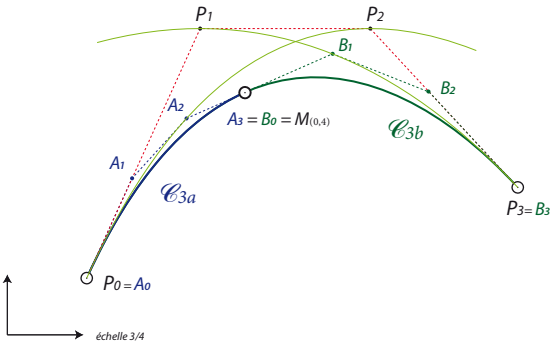
$A_0 = P_0$
$\mathbf{A_1} = t\,(P_1\text{-}P_0) + P_0$
$A_2 = t\big[\,t(P_2\text{-}P_1) + P_1 - \mathbf{A_1}\big] + \mathbf{A_1}$
$A_3 = \mathbf{M}_{(t)}$

avec $t = 0{,}4$

$B_0 = \mathbf{M}_{(t)}$
$B_1 = (1-t)\big[t(P_2\text{-}P_1) + P_1 - \mathbf{B_2}\big] + \mathbf{B_2}$
$\mathbf{B_2} = t\,(P_3\text{-}P_2) + P_2$
$B_3 = P_3$

$\mathscr{C}_{3a}$	X	Y
A_0	14	10
A_1	22	27,6
A_2	31,6	38,160
A_3	41,904	42,704

$\mathscr{C}_{3b}$	X	Y
B_0	41,904	42,704
B_1	57,360	49,552
B_2	74,4	42,8
B_3	90	26



Remarquons que $\mathbf{A_2}$ *est sur la parabole définie par* $P_0P_1P_2$ *et* $\mathbf{B_1}$ *sur* $P_1P_2P_3$

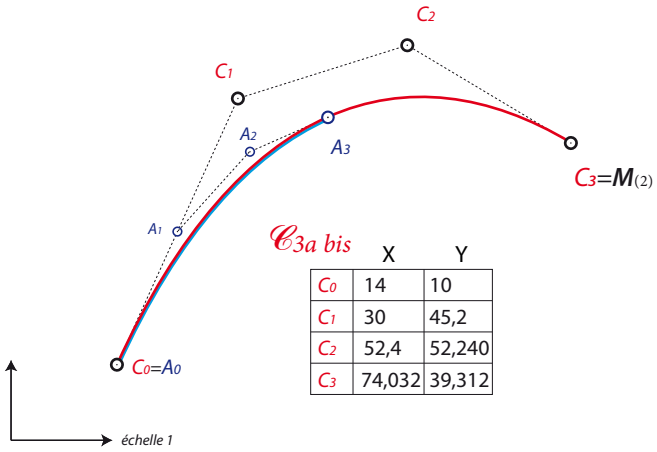
Méthode pour prolonger une B_3 jusqu'au point M de paramètre $t > 1$

Exemple avec $\mathscr{C}_{3a}$ *et* $t = 2$

$\mathscr{C}_{3a}$	X	Y
A_0	14	10
A_1	22	27,6
A_2	31,6	38,160
A_3	41,904	42,704

t de $M = 2$ donc $M_{(2)}$ | 74,032 ; 39,312

$C_0 = A_0$
$\mathbf{C_1} = t\,(A_1\text{-}A_0) + A_0$
$C_2 = (1\text{-}t)\mathbf{C_1} + t(1\text{-}t)A_1 + t^2A_2$
$C_3 = \mathbf{M}_{(t)}$



$\mathscr{C}_{3a}$ bis	X	Y
C_0	14	10
C_1	30	45,2
C_2	52,4	52,240
C_3	74,032	39,312

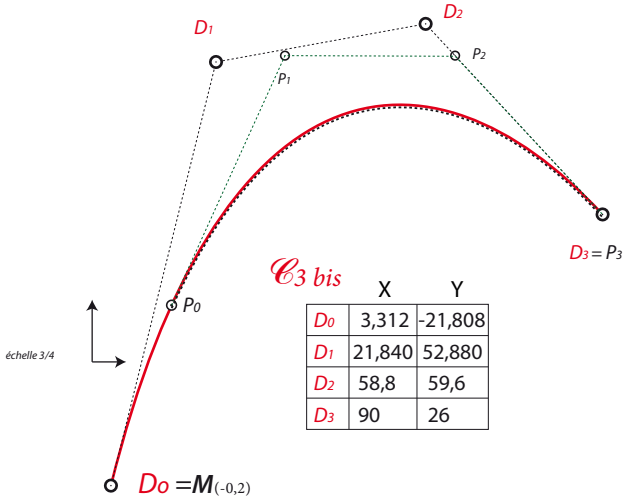
Méthode pour prolonger une B_3 jusqu'au point M de paramètre $t < 0$

Exemple avec $\mathscr{C}_3$ *et* $t = -0{,}2$

$\mathscr{C}_3$	X	Y
P_0	14	10
P_1	34	54
P_2	64	54
P_3	90	26

t de $M = -0{,}2$ donc $M_{(-0,2)}$ | 3,312 ; -21,808

$D_0 = \mathbf{M}_{(t)}$
$D_1 = (1\text{-}t)^2P_1 + t(1\text{-}t)P_2 + t\mathbf{D_2}$
$\mathbf{D_2} = t\,(P_3\text{-}P_2) + P_2$
$D_3 = P_3$



$\mathscr{C}_3$ bis	X	Y
D_0	3,312	-21,808
D_1	21,840	52,880
D_2	58,8	59,6
D_3	90	26

17

Fusion de 2 B_3

La subdivision De Casteljau permet de fusionner ces 2 courbes simplement .

Exemple 1 : soit 2 courbes $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{B}$ ayant un raccordement de classe C^1 ($\mathcal{Q}'(A_3) = \mathcal{B}'(B_0)$)*

$\mathcal{Q}$	X	Y
A_0	8	18
A_1	25	30
A_2	40	35
A_3	56	35

$\mathcal{Q}$ $\begin{cases} x = f(t) = 3t^3 - 6t^2 + 51t + 8 \\ y = g(t) = 2t^3 - 21t^2 + 36t + 18 \end{cases}$

$\mathcal{B}$	X	Y
B_0	56	35
B_1	72	35
B_2	92	30
B_3	104	14

$\mathcal{B}$ $\begin{cases} x = f(t) = -12t^3 + 12t^2 + 48t + 56 \\ y = g(t) = -6t^3 - 15t^2 + 0t + 35 \end{cases}$

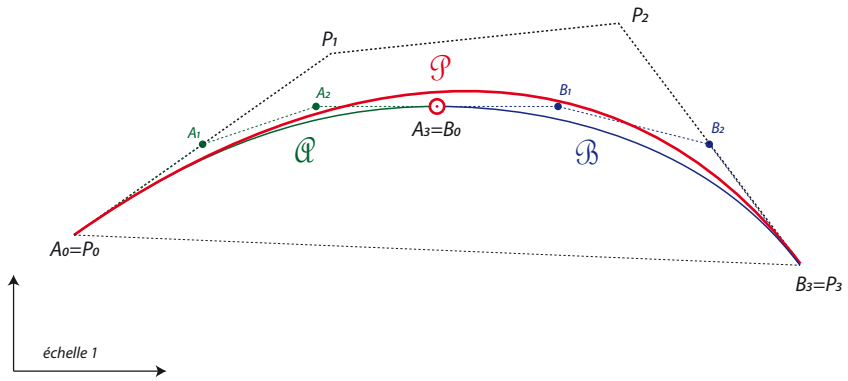
nous pouvons «naïvement» fusionner $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{B}$ avec : $t_{estimé} = \dfrac{\|\overrightarrow{A_2A_3}\|}{\|\overrightarrow{A_2A_3}\|+\|\overrightarrow{B_0B_1}\|} = 0{,}5$

$A_1 = t(\boldsymbol{P_1}-A_0)+A_0 \Rightarrow \boldsymbol{P_1} = \dfrac{A_1 - A_0\,(1-t)}{t}$

$B_2 = t(B_3-\boldsymbol{P_2}) + \boldsymbol{P_2} \Rightarrow \boldsymbol{P_2} = \dfrac{B_2 - tB_3}{(1-t)}$

$\mathcal{P}$	X	Y
P_0	8	18
P_1	42	42
P_2	80	46
P_3	104	14

$\mathcal{P}$ $\begin{cases} x = f(t) = -18t^3 + 12t^2 + 102t + 8 \\ y = g(t) = -16t^3 - 60t^2 + 72t + 18 \end{cases}$

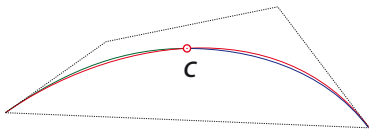


NB : cette méthode respecte les tangentes en P_0 et P_3 mais $\mathcal{P}$ ne passe pas par A_3 et B_3.
*Nous verrons à la section « courbe passant strictement par 3 points », page 29, qu'il est possible de faire varier P_1 ou P_2, afin que $\mathcal{P}_{bis}$ passe par la connexion **C** tout en conservant les tangentes en P_0 et P_3 (voir ci dessous) .*

$\mathcal{P}_a$	X	Y
P_0	8	18
P_1	34,61	36,78
P_2	80	46
P_3	104	14

t de C ≈ 0,4907912

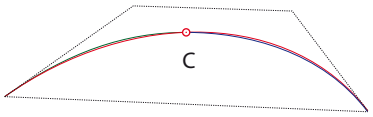
variation de P_1



$\mathcal{P}_b$	X	Y
P_0	8	18
P_1	42	42
P_2	84,02	40,64
P_3	104	14

t de C ≈ 0,4496878

variation de P_2



Exemple 2 : idem *Exemple 1* mais avec un raccordement de classe C^0 ($\mathcal{Q}_1'(A_3) \neq \mathcal{B}_1'(B_0)$) *

$\mathcal{Q}_1$	X	Y
A_0	8	18
A_1	25	30
A_2	40	40
A_3	56	35

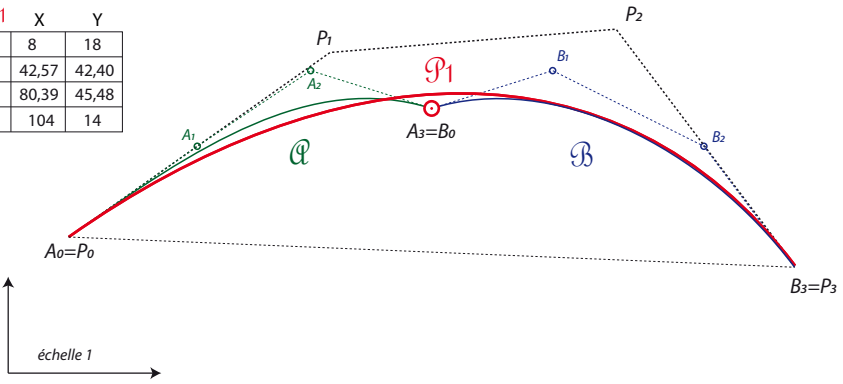
+

$\mathcal{B}_1$	X	Y
B_0	56	35
B_1	72	40
B_2	92	30
B_3	104	14

=>

$\mathcal{P}_1$	X	Y
P_0	8	18
P_1	42,57	42,40
P_2	80,39	45,48
P_3	104	14

$t_{estimé} = \dfrac{\|\overrightarrow{A_2A_3}\|}{\|\overrightarrow{A_2A_3}\|+\|\overrightarrow{B_0B_1}\|} = 0{,}5$



---

soit 2 courbes A et B liées en un point C .

A'=dérivée premiere en C , A"=dérivée seconde en C B'=dérivée premiere en C , B"=dérivée seconde en C

un raccordement de classe 0 (C^0) veut dire que $A' \neq B'$
un raccordement de classe 1 (C^1) veut dire que $A' = B'$
un raccordement de classe 2 (C^2) veut dire que $A' = B'$ et $A'' = B''$

18

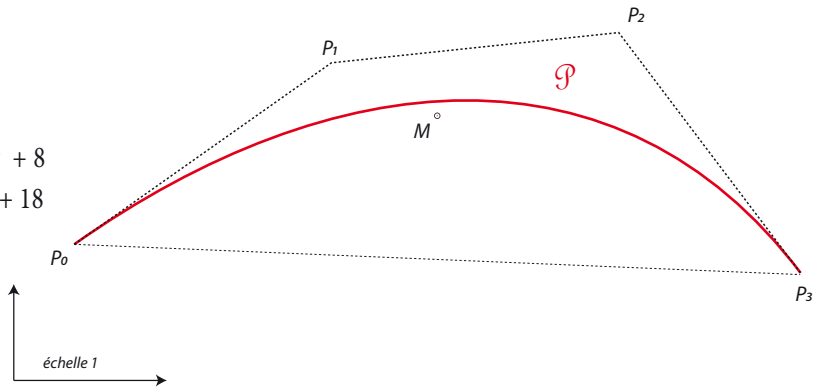
Distance d'un point à une B_3

Après un lissage, ajustement d'une suite de points M par une B_3 il est utile d'analyser statistiquement les écarts de ces points avec la B_3 calculée $\mathcal{P}$ et determiner l' Ecart Quadratique Moyen du lissage (EQM)*
Le but est de calculer la plus petite distance de M par rapport à $\mathcal{P}$.

Exemple 3 : avec la courbe $\mathcal{P}$ et un point $M \begin{vmatrix} 56 \\ 35 \end{vmatrix}$

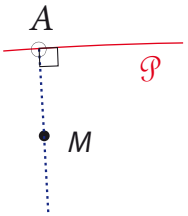
$\mathcal{P}$	X	Y
P_0	8	18
P_1	42	42
P_2	80	46
P_3	104	14

$$\mathcal{P} \begin{vmatrix} x = f(t) = -18t^3 + 12t^2 + 102t + 8 \\ y = g(t) = -16t^3 - 60t^2 + 72t + 18 \end{vmatrix}$$



*Il faut donc définir le point $A \in \mathcal{P}$ (le vecteur **normal** en A doit passer par M)*

Déterminons les équations pour résoudre le problème .



*Le coefficient directeur du vecteur **normal** en $A_{(t)}$ est :* $-\dfrac{f'(t)}{g'(t)} = \dfrac{yM - yA_{(t)}}{xM - xA_{(t)}}$

Nous pouvons donc poser : $-\dfrac{f'(t)}{g'(t)} = \dfrac{yM - g(t)}{xM - f(t)} \Rightarrow f'(t)\,(f(t) - xM) + g'(t)\,(g(t) - yM) = 0$

En utilisant la définition canonique d'une B3

$$\Rightarrow (3x_3t^2+2x_2t+x_1)(x_3t^3+x_2t^2+x_1t+x_0 - xM) + (3y_3t^2+2y_2t+y_1)(y_3t^3+y_2t^2+y_1t+y_0 - yM) = 0$$

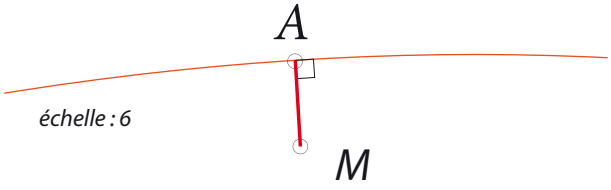
Après développement

$$\Rightarrow h(t) = 3(x_3^2+y_3^2)t^5 + 5(x_3x_2 + y_3y_2)t^4 + \left[2(x_2^2+y_2^2)+4(x_3x_1+y_3y_1)\right]t^3$$
$$+ \left[3(x_2x_1+y_2y_1 + x_3(y_0-yM)+y_3(x_0-xM))\right]t^2$$
$$+ \left[x_1^2+y_1^2 + 2x_2(x_0-xM)+2y_2(y_0-yM)\right]t + x_1(x_0-xM)+y_1(y_0-yM)$$

selon l'exemple =>
$$h(t) = 1740t^5 + 3720t^4 - 4464t^3 - 5880t^2 + 16476t - 6120$$
$$h'(t) = 8700t^4 + 14880t^3 - 13392t^2 - 11760t + 16476$$

Et en résolvant $h(t)=0$ *par la méthode de Raphson Newton*[5] $\Rightarrow t_{(A)} \approx 0{,}4617252$ $\quad A \approx \begin{vmatrix} 55{,}882 \\ 36{,}878 \end{vmatrix}$

donc $\|\overrightarrow{MA}\| \approx 1{,}882 = \text{écart}$



NB : la dichotomie peut ou doit commencer avec un t estimé.

Soit dans ce cas => $t_{estimé} = \dfrac{\|\overrightarrow{PoM}\|}{\|\overrightarrow{PoP_3}\|} = 0{,}52997$

Dans notre exemple il existe une seule solution sur l'intervalle [0 1]

$$*\text{EQM} = \frac{\sum_1^n (\text{écart}_{(n)}^2)}{n} = \text{MSE}$$

19

Rayon de courbure (cercle osculateur)

exemple avec :

$\mathscr{C}_3$

	X	Y
P_0	14	10
P_1	34	54
P_2	64	54
P_3	90	26

$$M_{(t)} \begin{vmatrix} x = f_{(t)} = -14t^3+30t^2+60t+14 \\ y = g_{(t)} = 16t^3-132t^2+132t+10 \end{vmatrix}$$

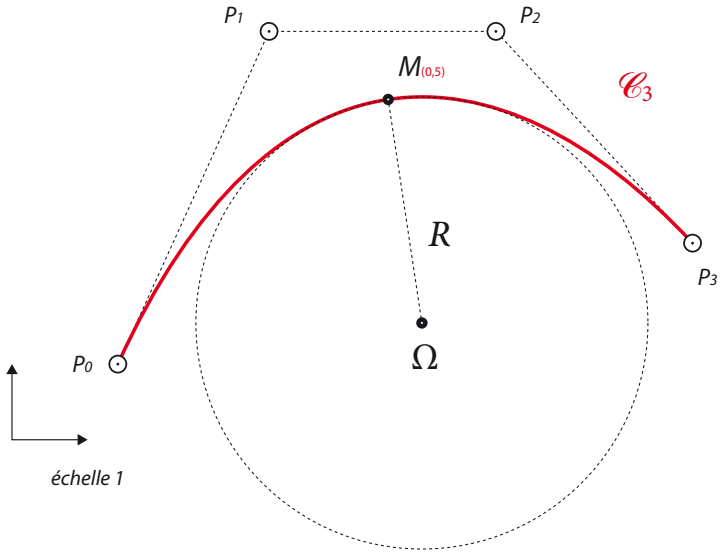
Calcul du rayon de courbure R *relatif à un point* $M_{(t)}$ *

$$R \text{ en } M_{(t)} = \frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''}$$

avec $M'_{(0,5)} \begin{vmatrix} x' = f'_{(0,5)} = 79,5 \\ y' = g'_{(0,5)} = 12 \end{vmatrix}$

et $M''_{(0,5)} \begin{vmatrix} x'' = f''_{(0,5)} = 18 \\ y'' = g''_{(0,5)} = -216 \end{vmatrix}$

$$R \text{ en } M_{(0,5)} = \frac{519729,318}{-17388} \approx -29,890$$



NB : si au point $M_{(t)}$ $x'y''-y'x'' < 0$ *la courbe est concave en ce point, sinon elle est convexe* [4]

⚠ si le paramètre t correspond à un point d'inflexion ou de rebroussement le rayon R sera indéfinis car $x'y''-y'x''=0$

Calcul du centre de courbure Ω

Dans le système de coordonnées de Serret - Frenet * *en* $M_{(0,5)} \begin{vmatrix} 49,75 \\ 45 \end{vmatrix}$

nous avons $\overrightarrow{N} \begin{vmatrix} \frac{(-y')}{(x'^2+y'^2)^{0,5}} = \frac{-12}{80,4} \approx -0,1493 \\ \frac{(x')}{(x'^2+y'^2)^{0,5}} = \frac{79,5}{80,4} \approx 0,9887 \end{vmatrix}$

$$\Omega_{(t)} \begin{vmatrix} (xN)(R)+xM_{(t)} \\ (yN)(R)+yM_{(t)} \end{vmatrix} \qquad \Omega_{(0,5)} \begin{vmatrix} \frac{(-y')(x'^2+y'^2)^{3/2}}{(x'y''-y'x'')(x'^2+y'^2)^{1/2}} + xM_{(0,5)} \approx 54,211 \\ \frac{(x')(x'^2+y'^2)^{3/2}}{(x'y''-y'x'')(x'^2+y'^2)^{1/2}} + yM_{(0,5)} \approx 15,445 \end{vmatrix}$$

Donc $x\Omega_{(t)} = \frac{(-y')(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''} + xM_{(t)}$ $y\Omega_{(t)} = \frac{(x')(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''} + yM_{(t)}$

* *http://prof.math.free.fr/textes/cours/normal/courbure_html/index.html*

20

Paramétrisation d'une fonction du troisième degré sur un intervalle borné.

Soit la fonction : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1x + 1$ *que l'on veut paramétriser sur l'intervalle* [-1 0,5]

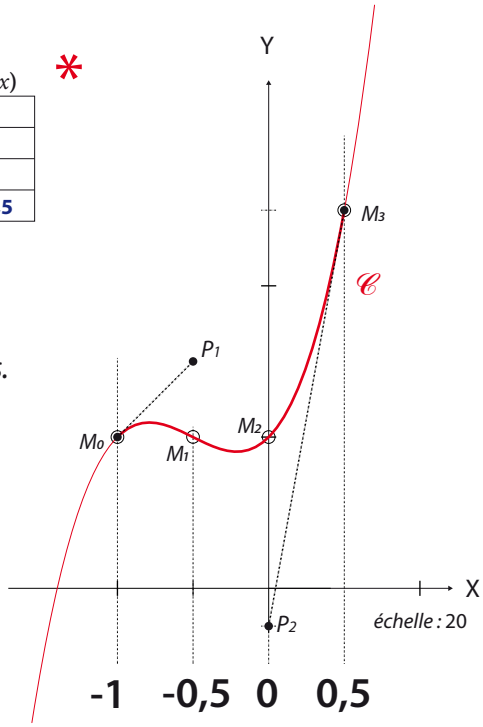
a) *pour commencer choisir 4 points de la courbe* $\mathscr{C}$

M₀ est au début de lintervalle
M₁ , M₂, 2 points intermédiaires
M₃ est la fin de l'intervalle

=> $\overrightarrow{OM}(t)$

	x	$f(x)$
M_0	-1	1
M_1	-0,5	1
M_2	0	1
M_3	0,5	2,5

*



b) *Calculer les paramètres* t *en M₀, M₁ , M₂, M₃*

Dans ce cas là le calcul est simple car t *est proportionnel aux abscisses.*

t *en* $M_0 = 0$, t *en* $M_3 = 1$

$$t \text{ en } M_1 = \frac{xM_1 - xM_0}{xM_3 - xM_0} = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}$$

$$t \text{ en } M_2 = \frac{xM_2 - xM_0}{xM_3 - xM_0} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$$

enfin avec :

$$\begin{array}{c|c} t & 1 \quad t \quad t^2 \quad t^3 \\ 0 & \\ 1/3 & \\ 2/3 & \\ 1 & \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,33 & 0,11 & 0,037 \\ 1 & 0,67 & 0,44 & 0,296 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}_n} \times \overset{\text{matrice de passage}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{M}_3}} \times \begin{bmatrix} xP & yP \\ xP_0 & yP_0 \\ xP_1 & yP_1 \\ xP_2 & yP_2 \\ xP_3 & yP_3 \end{bmatrix}_{\overrightarrow{OP}} = \begin{bmatrix} xM(t) & yM(t) \\ -1 & 1 \\ -0,5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0,5 & 2,5 \end{bmatrix}_{\overrightarrow{OM}(t)} *$$

$$\overrightarrow{OP} = \left[\mathcal{T}_n \times \mathcal{M}_3\right]^{-1} \times \overrightarrow{OM}(t) =$$

$\mathscr{C}$	X	Y
P_0	-1	1
P_1	-0,5	1,5
P_2	0	-0,25
P_3	0,5	2,5

$\mathscr{C}$ *est une B₃ de type 1.*

*

La **réciproque** est possible par une interpolation polynomiale de type : Hermite, Lagrange, Newton, Vandermonde...

Exemple avec la matrice de **Vandermonde :**

$\mathcal{C}$ = *les coefficients du polynôme*
$\mathcal{F}$ = *les images* $f(x_n)$ *du polynôme*
n = *le nombre de points*

$$\underset{\mathcal{V}}{\begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}} \underset{\mathcal{C}}{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}} = \underset{\mathcal{F}}{\begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(xn) \end{pmatrix}}$$

Avec $n = 4$

$$\underset{\mathcal{V}}{\begin{pmatrix} x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -0,5 & 0,25 & -0,125 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}} \underset{\mathcal{C}}{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}} = \underset{\mathcal{F}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2,5 \end{pmatrix}} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{V}^{-1} \times \mathcal{F} = \underset{\mathcal{C}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

http://cermics.enpc.fr/scilab_new/site/Tp/Calcul_scient/interpolation-R/interpolation-R.html#x1-20001

21

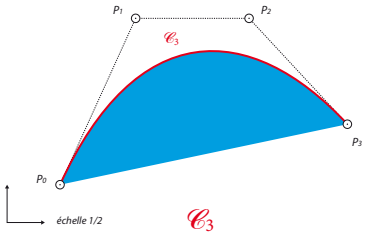
Aire d'une B_3

a) Aire d'une B_3 fermée *(méthode WEB).*

En posant exceptionnellement : $X_0 = xP_0$, $Y_0 = yP_0$; $X_1 = xP_1$, $Y_1 = yP_1$ *etc...*

formule de l'aire = 3 / 20 [$(Y_1-Y_0)(X_2+X_3-2X_0)$
$- (X_1-X_0)(Y_2+Y_3-2Y_0)$
$- 2[X_0(Y_2-Y_3) + Y_0(X_3-X_2) + Y_3X_2-Y_2X_3]$]

Dans cet exemple, aire de $\mathscr{C}_3 = 1414{,}8\ mm^2$



$\mathscr{C}_3$

P_0	14	10
P_1	34	54
P_2	64	54
P_3	90	26

---

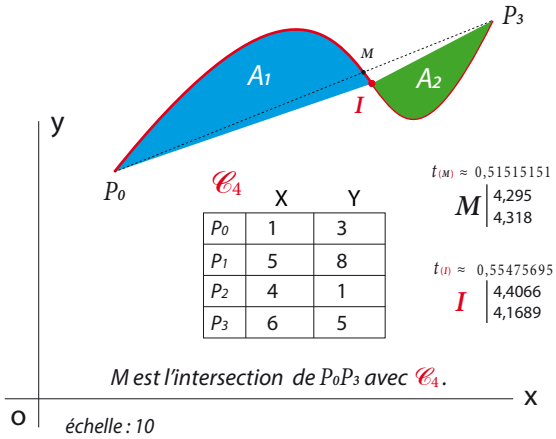
b) Aire d'une B_3 fermée acceptant un point d'inflexion sur]0 1[

L'aire de $\mathscr{C}_4 = 1{,}2\ mm^2$?? ***Non !!*** *le résultat est* ***faux***

car le point M ne coïncide pas avec le point d'inflexion ***I*** .

Donc la formule ne s'applique que pour des B_3 ***continues*** *sur*]0 1[
sans points stationnaires ou de croisement sur]0 1[.

Généralement , si 1 ou 2 points stationnaires sont sur]0 1[
il faut subdiviser la courbe en 2 ou 3 parties.
Puis additionner les aires correspondantes .



$\mathscr{C}_4$

	X	Y
P_0	1	3
P_1	5	8
P_2	4	1
P_3	6	5

$t_{(M)} \approx 0{,}51515151$ M 4,295 4,318

$t_{(I)} \approx 0{,}55475695$ I 4,4066 4,1689

M est l'intersection de P_0P_3 *avec* $\mathscr{C}_4$.

Dans notre exemple Il est nécessaire de scinder la courbe en 2 parties : A_1 *et* A_2

Donc l'aire ***vraie*** *de* $\mathscr{C}_4 = 2{,}4958 - 0{,}8116 =$ **$1{,}6842\ mm^2$**

A_1 *aire* ≈ 2,4958

P_0	1	3
P_1	3,2190	5,7738
P_2	3,8993	4,8545
P_3	4,4066	4,1689

A_2 *aire* ≈ -0,8116

P_0	4,4066	4,1689
P_1	4,8138	3,6187
P_2	5,1095	3,2190
P_3	6	5

NB : constatons que si une courbe est concave son aire est positive, sinon elle est convexe et négative

---

c) Aire d'une B_3 sur un intervalle [a b] .

NB : ***a*** *est le paramétre* ***t*** *du début de l'intervale et* ***b*** *celui de la fin .*

En utilisant la formule : aire = $\int_a^b (g_{(t)}f'_{(t)})$ et la définition canonique d'une B_3 $M_{(t)} \begin{vmatrix} x = f_{(t)} = x_3t^3+x_2t^2+x_1t+x_0 \\ y = g_{(t)} = y_3t^3+y_2t^2+y_1t+y_0 \end{vmatrix}$

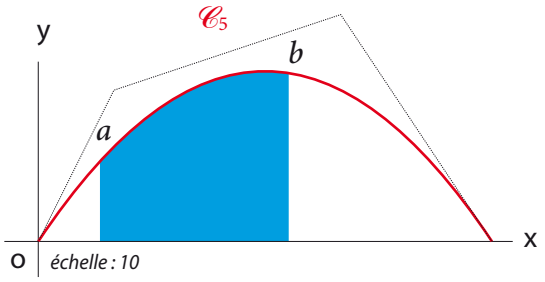
$$g_{(t)}f'_{(t)} = h_{(t)} = 3x_3y_3t^5+(3x_3y_2+2x_2y_3)t^4+(3x_3y_1+2x_2y_2+x_1y_3)t^3+(3x_3y_0+2x_2y_1+x_1y_2)t^2+(2x_2y_0+x_1y_1)t+x_3y_0$$

$$H_{(t)} = \frac{3x_3y_3t^6}{6} + \frac{(3x_3y_2+2x_2y_3)t^5}{5} + \frac{(3x_3y_1+2x_2y_2+x_1y_3)t^4}{4} + \frac{(3x_3y_0+2x_2y_1+x_1y_2)t^3}{3} + \frac{(2x_2y_0+x_1y_1)t^2}{2} + \frac{x_3y_0t}{1} + C$$

Dans cet exemple :

$f_{(t)} = -3t^3+6t^2+3t+0 \quad f'_{(t)} = -9t^2+12t+3$
$g_{(t)} = -3t^3-3t^2+6t+0$

$h_{(t)} = 27t^5-9t^4-99t^3+63t^2+18t+0$
$H_{(t)} = 4{,}5t^6-1{,}8t^5-24{,}75t^4+21t^3+9t^2+C$



$\mathscr{C}_5$

	X	Y
P_0	0	0
P_1	1	2
P_2	4	3
P_3	6	0

L'aire de $\mathscr{C}_5$ *sur l'intervalle* [0,2 0,6] = $H_{(0,6)} - H_{(0,2)} \approx 4{,}15027\ mm^2$

NB : P0P3 doit être sur l'axe **OX**
L'intervalle [a b] *doit être continu*

22

Abscisse curviligne S (longueur) d'une B_3

La théorie veut que la longueur d'une courbe paramétrique = $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

Pour une B_3 $S = \int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2+\left(g'(t)\right)^2} = \int_a^b \sqrt{(3x_3t^2+2x_2t+x_1)^2 + (3y_3t^2+2y_2t+y_1)^2}$

*NB : les variables **a** et **b** sont les valeurs des paramètres t*

Mais dans la pratique nous ne pouvons pas developper cette intégrale .
Par contre, via une **approximation**, il est possible d'estimer convenablement cette longueur.

Pour ma part je divise la courbe en 100 parties sur l'intervalle [a b] avec un pas de (b-a) / 100.
Je calcule les coordonnées des points M correspondants allant de M_0 à M_{100}.
Je détermine le centre du cercle passant par $M_0\, M_1\, M_2$
Je peut donc calculer son rayon, son angle au centre θ et enfin la longueur de l'arc .

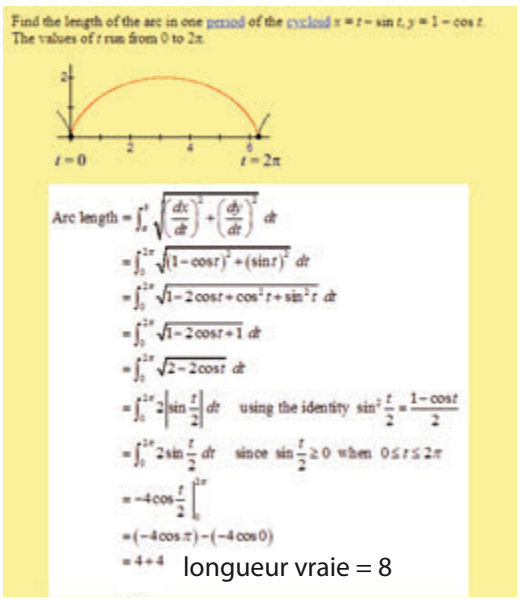
Ainsi de suite avec $M_2\, M_3\, M_4$, $M_4\, M_5\, M_6$, etc... jusque $M_{98}\, M_{99}\, M_{100}$ je peut estimer S

Exemple avec $\mathscr{C}_5$ sur l'intervalle [0,2 0,6] => *pas* = (0,6 - 0,2) / 100 = 0,004

Donc S de $\mathscr{C}_5$ sur [0,2 0,6] ≈ 2,705 mm

t	n	xM	yM	xC	yC	corde	rayon	θ	Lg, arc
0,200	0	0,8160	1,0560						
0,204	1	0,8362	1,0737	3,15	-1,60	0,05	3,53	0,015 rad	0,05
0,208	2	0,8566	1,0912						
0,212	3	0,8771	1,1086	3,15	-1,59	0,05	3,53	0,015 rad	0,05
0,216	4	0,8977	1,1258						
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,584	96	3,2008	1,8833						
0,588	97	3,2286	1,8809	2,96	-1,07	0,06	2,97	0,019 rad	0,06
0,592	98	3,2564	1,8782						
0,596	99	3,2842	1,8752	2,96	-1,08	0,06	2,97	0,019 rad	0,06
0,600	100	3,3120	1,8720						

Exemple d'une paramétrique pour vérifier la précision de la méthode ci-dessus



avec l'approximation: $S \approx 8{,}0000007976$

23

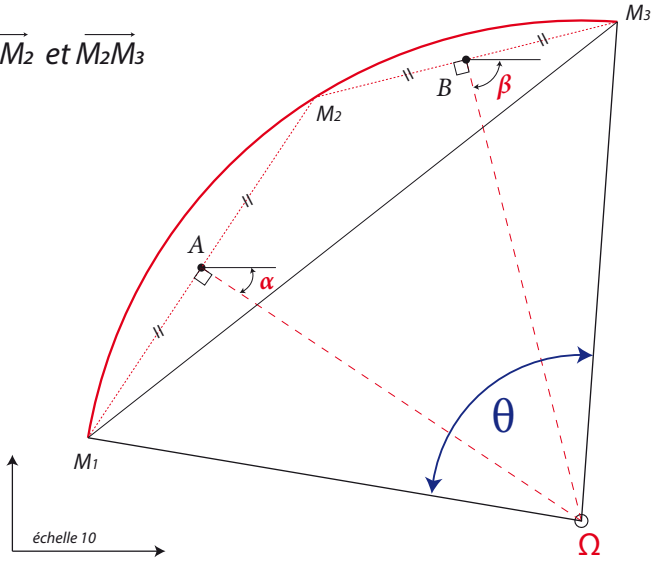
Simulation d'un arc de cercle par une B_3

	X	Y
M_1	1	1,5
M_2	4	6
M_3	8	7
A	2,5	3,75
B	6	6,5

NB : pour avoir une bonne précision l'angle au centre θ de l'arc doit être $\leq 90°$

1) Calculs pour définir le cercle passant par $M_1\ M_2\ M_3$.

Le centre Ω de ce cercle est déterminé par
l'intersection des médiatrices de : $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_2M_3}$



définition des coordonnées de A et B

$xA = \frac{(xM_1+xM_2)}{2}$ $\quad yA = \frac{(yM_1+yM_2)}{2}$ .... *similairement pour B*

calculs des coefficients directeurs de : α , β

$\tan(\alpha) = -\frac{(xM_2-xM_1)}{(yM_2-yM_1)}$ $\quad \tan(\beta) = -\frac{(xM_3-xM_2)}{(yM_3-yM_2)}$

donc avec la méthode de ***Delambre*** *(voir page 37)*

l'intersection => $x\Omega = 7,525$ $\quad y\Omega = 0,4$

si $y(M_1) = y(M_2)$ alors $x\Omega = xA$, $y\Omega = \tan(\beta)\ (xA-xB)+yB$
si $y(M_2) = y(M_3)$ alors $x\Omega = xB$, $y\Omega = \tan(\alpha)\ (xB-xA)+yA$
si $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$ alors les points M sont colinéaires

=> *rayon* $R = ||\overrightarrow{M_1\Omega}|| \approx 6,617$ *corde* $C = ||\overrightarrow{M_1M_3}|| \approx 8,902$ => $\theta = 2\arcsin(\frac{C}{2R}) \approx 84,542°$

---

2) Calculs pour définir T

$T = M_1 \tan(\alpha_0) \cap M_3 \tan(\alpha_3)$ *avec* $\tan(\alpha_0) = -\frac{(x\Omega-xM_1)}{(y\Omega-yM_1)}$ $\quad \tan(\alpha_3) = -\frac{(x\Omega-xM_3)}{(y\Omega-yM_3)}$ => $T \begin{vmatrix} 2 \\ 7,432 \end{vmatrix}$

3) Calculs pour définir les **angles orientés*** suivants :

$\alpha_0 = \text{Arctan}\left(\frac{yT-yM_1}{xT-xM_1}\right) \approx 80,431°$ $\quad \alpha_3 = \text{Arctan}\left(\frac{yT-yM_3}{xT-xM_3}\right)+180° \approx -4,116+180 \approx 175,884°$

---

4) Calculs pour définir la B_3

Astuce : ne connaissant pas le paramètre t de M_2 il faut définir le point M_2'

qui doit être sur la bissectrice de $\overset{\frown}{M_1\Omega M_3}$ *, ainsi t de M_2' =* **0,5**

=> $xM_2' = \Delta x_{(\Omega T)}\left(\frac{R}{||\Omega T||}\right) + x\Omega \approx 3,437$ $\quad yM_2' = \Delta y_{(\Omega T)}\left(\frac{R}{||\Omega T||}\right) + y\Omega \approx 5,603$ $\quad \begin{pmatrix} \Delta x_{(\Omega T)} = xT-x\Omega \\ \Delta y_{(\Omega T)} = yT-y\Omega \end{pmatrix}$

avec

	Pts	X	Y
P_0=	M_1	1	1,5
	M_2'	3,437	5,603
P_3=	M_3	8	7
	T	2	7,432

Polynôme de Bernstein avec t=0,5

B_0	B_1	B_2	B_3
$(1-t)^3$	$3t(1-t)^2$	$3t^2(1-t)$	t^3
0,125	0,375	0,375	0,125

résoudre $\begin{cases} xM_2' = B_0\ xP_0 + B_1\ (\varphi_0 \cos(\alpha_0)+xP_0) + B_2\ (\varphi_3 \cos(\alpha_3)+xP_3) + B_3\ xP_3 \\ \varphi = \varphi_0 = \varphi_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \varphi_0 = \varphi_3 = \frac{xM_2' - 0,5\ (xP_0 + xP_3)}{0,375\ [\cos(\alpha_0)+\cos(\alpha_3)]} \approx 3,410940045$$

Enfin

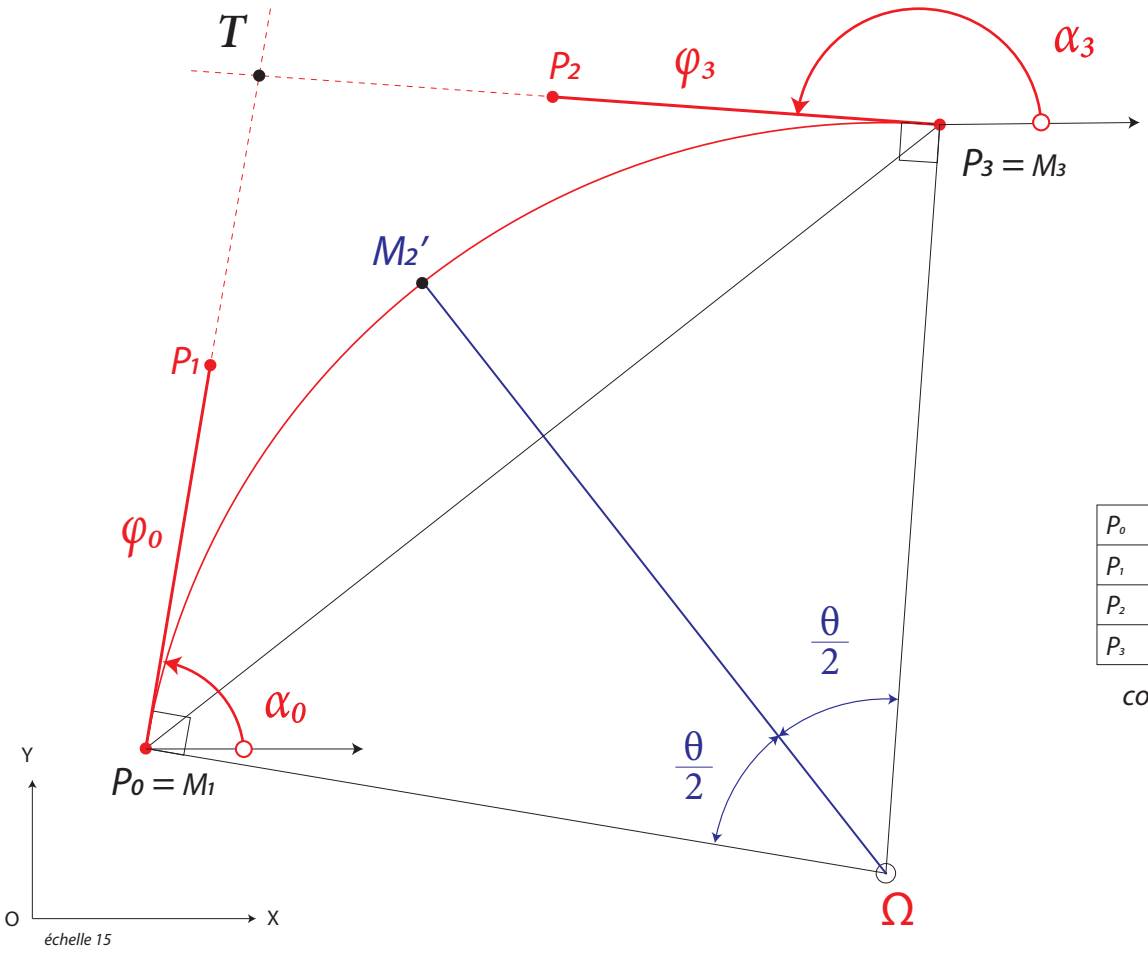
$xP_1 = xM_1 + \varphi_0 \cos(\alpha_0) \approx 1,567$ $\quad xP_2 = xM_3 + \varphi_3 \cos(\alpha_3) \approx 4,598$

$yP_1 = yM_1 + \varphi_0 \sin(\alpha_0) \approx 4,863$ $\quad yP_2 = yM_3 + \varphi_3 \sin(\alpha_3) \approx 7,245$

	X	Y
P_0	1	1,5
P_1	1,567	4,863
P_2	4,598	7,245
P_3	8	7

* *pour en savoir plus sur les angles orientés et coordonnées polaires voir pages 38 , 39*

24



	X	Y
P_0	1	1,5
P_1	1,567	4,863
P_2	4,598	7,245
P_3	8	7

courbe type 4

Voici 3 autres méthodes de calcul de φ

a) Mr. D. Krauss *avec :*

$S = \sin(\theta)$, $C = \cos(\theta)$, $K_0 = \frac{1}{3}\left[-S + \sqrt{S^2 + 6(1-C)}\right]$ $K_1 = \frac{4}{3}\tan(\frac{\theta}{4})$

$\alpha = 6\,(3K_0 + S)$ $\beta = 9\,(1-C)K_1 + 12\,S)$ $x = -0{,}118433799202707$ $K_{idéal} = \frac{\beta K_1 - \alpha\, x\, K_0}{\beta - \alpha\, x}$

$\varphi = K_{idéal} \times Rayon \approx 3{,}652064764$

---

b) Mr. Thomas W. Sederberg

$\varphi = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{1+2\cos\frac{\theta}{2}} \times Rayon \approx 3{,}876190288$

c) https://pomax.github.io/bezierinfo/#circles_cubic

$\varphi = \frac{4}{3}\tan(\frac{\theta}{4}) \times Rayon \approx 3{,}410940045$

Tableau comparatif

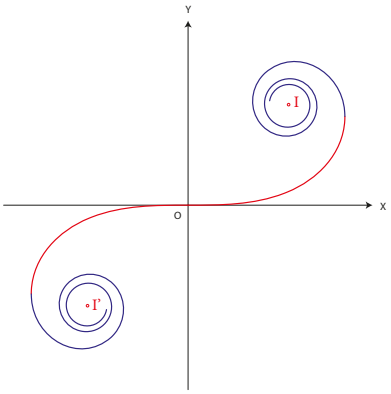
	Rayon = 10 θ = 90°			
t	ΔR perso	ΔR Krauss	ΔR Sederberg	ΔR Pomax
0,1	0,0015	0,0013	0,0240	0,0015
0,2	0,0027	0,0019	0,0745	0,0027
0,3	0,0021	0,0007	0,1267	0,0021
0,4	0,0007	-0,0011	0,1642	0,0007
0,5	0,0000	-0,0020	0,1777	0,0000
φ	5,52284749831575	5,51915630759849	5,85786437628077	5,52284749830793
EMQ	0,0000029	0,0000022	0,0161408	0,0000029

25

La clothoïde [2]

Avant propos.

La particularité d'une clothoïde, appelée aussi spirale de «Cornu», est que son **rayon** de courbure est progressif .
Au fur et a mesure l'on avance sur la courbe ce **rayon** diminue.



Dans le domaine des travaux public ,
le début de la clothoïde est utilisé pour raccorder des axes routiers.
La spirale permet d'aborder progressivement une partie circulaire sans changement brusque de direction.

En france, la législation impose
un rayon de virage circulaire pour chaques catégories de routes.

Par exemple pour une autoroute de catégorie L120, où la vitesse est limitée à 130 Km/h, le rayon du virage circulaire doit être >= à 665m.

Quelques définitions mathématiques .

coordonnées de I *:* $x = y = \dfrac{A\sqrt{\pi}}{2}$

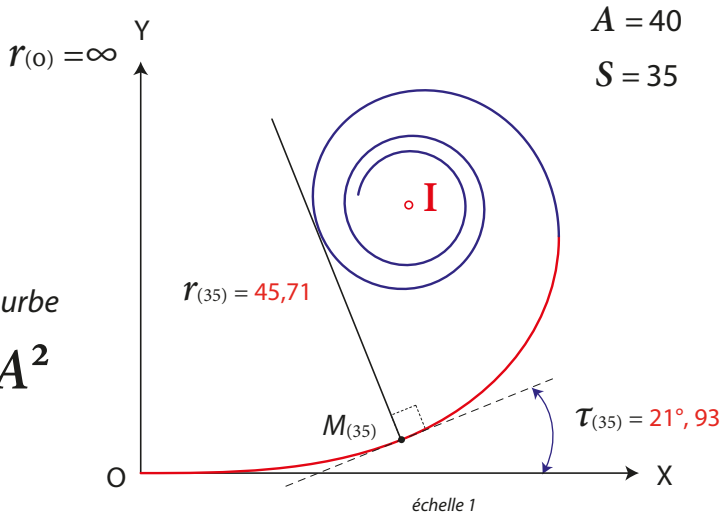
A *est appelé paramètre de la clothoïde*

Soit : s *l'abscisse curviligne de la clothoïde*
r *son rayon de courbure*
τ *l'angle en radian d'une tangente de la courbe*

L'équation intrinsèque de la spirale est : $s\,r = A^2$

$$\tau = \frac{s^2}{2A^2} = \frac{s}{2r}$$

Exemple 1)



Les coordonnées d'un point de la courbe sont :

$$x = \int \cos\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds \qquad y = \int \sin\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds$$

Ces intégrales dites de Fresnel ne peuvent pas s'exprimer à partir de fonctions élémentaires, mais un calcul à l'aide d'un développement limité au voisinage de O *est possible :*

$$xM_{(s)} = s - \frac{s^5}{40A^4} + \frac{s^9}{3\,456A^8} - \frac{s^{13}}{599\,040A^{12}} + \ldots$$

$$yM_{(s)} = \frac{s^3}{6A^2} - \frac{s^7}{336A^6} + \frac{s^{11}}{42\,240A^{10}} - \frac{s^{15}}{9\,676\,800A^{14}} + \ldots$$

dans l'exemple 1 avec $S = 35$ *et* $A = 40$

$$xM_{(35)} = 34{,}49$$

$$yM_{(35)} = 4{,}42$$

26

Simulation d'un arc de clothoïde par une B_3

Exemple 2)

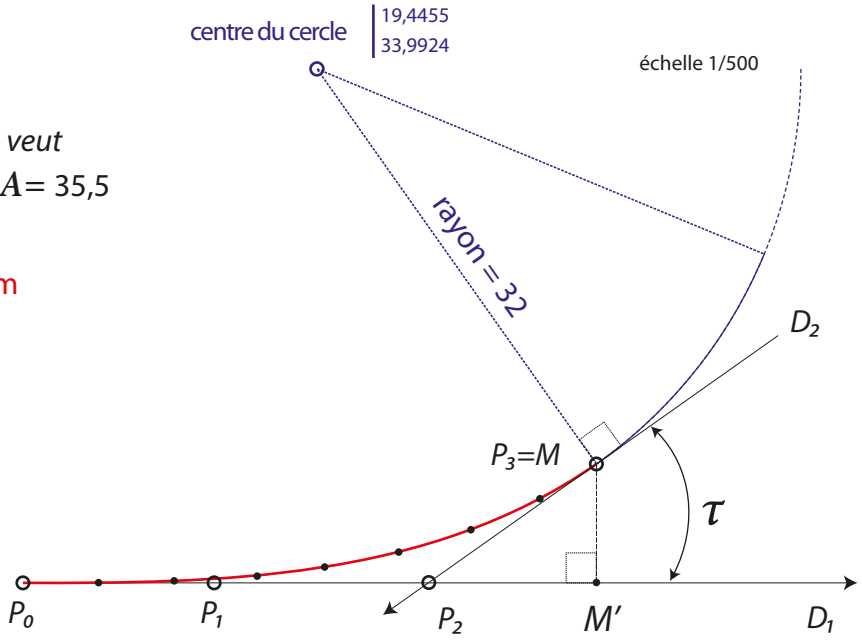
Soit un arc de cercle de rayon 32 m que l'on veut raccorder par une clothoide de paramètre $A = 35{,}5$

$s\,r = A^2$ *donc* $s_{(32)} = 35{,}5^2/32 \approx 39{,}383$ m

$$\tau_{(39{,}383)} = \frac{39{,}383}{2*32} \approx 35{,}257°$$

$xM_{(39{,}383)} \approx 37{,}9174$

$yM_{(39{,}383)} \approx 7{,}8623$



Définition de la courbe de Bézier

Soit : les droites D_1 , D_2 *et* M' *qui est le projeté orthogonal de* M *sur la droite* D_1

P_0 *est à l'origine de la clothoïde*
P_1 *est à* 1/3 de $\overrightarrow{P_0M'}$
P_2 *est l'intersection de* D_1 *et* D_2
P_3 *est le point* M

donc la courbe de Bézier ≈

	X	Y
P_0	0	0
P_1	12,639	0
P_2	26,796	0
P_3	37,917	7,862

Tableaux comparatifs

Calcul traditionnel		abscisse curviligne tous les	5 m	
param. A	35,5	rayon de l'arc de cercle à raccorder	32 m	
s	X	Y	τ	r
0,00	0,000	0,000	0,000°	infinis
5,00	5,000	0,017	0,568°	252,05
10,00	9,998	0,132	2,273°	126,03
15,00	14,988	0,446	5,115°	84,02
20,00	19,950	1,056	9,093°	63,01
25,00	24,847	2,057	14,207°	50,41
30,00	29,620	3,538	20,459°	42,01
35,00	34,182	5,575	27,847°	36,01
39,383	**37,917**	**7,862**	**35,257°**	**32,00**

approximation par la courbe de bézier				A moyen	35,6
X	Y	*écart des Y*	r *estimé*	s *estimé*	A *estimé*
0,000	**0,000**	*0,000*	infinis		
5,000	**0,017**	*-0,001*	248,5	5,00	35,3
9,998	**0,135**	*-0,002*	128,6	10,00	35,9
14,988	**0,446**	*0,000*	86,0	15,00	35,9
19,950	**1,048**	*0,008*	63,5	20,00	35,6
24,847	**2,038**	*0,019*	49,7	25,00	35,2
29,620	**3,515**	*0,023*	40,9	30,00	35,0
34,182	**5,563**	*0,012*	35,9	35,00	35,4
37,917	**7,862**	*0,000*	**34,1**	**39,389**	36,6

Nous pouvons constater que avec un angle $\tau \approx 35°$ *la précision se dégrade vers la fin de la courbe.*

Si $\tau \approx 20°$ *l'écart maxi est de* 0,014 *et avec* $\tau \approx 40°$ *l'écart maxi est de* 0,040.
Donc la précision diminue si τ *augmente .*

L'utilité de cette approximation est que la courbe de Bézier peut être calculée sur $\mathbb{R}^2$.
Elle permet , par exemple, de visualiser un avant projet à petite échelle.
De verifier le paramètre A.

Mais ATTENTION : la méthode traditionnelle fait Foi et Loi.

27

B2 passant strictement par 3 points

1) Les tangentes en A_0 et A_2 sont libres.

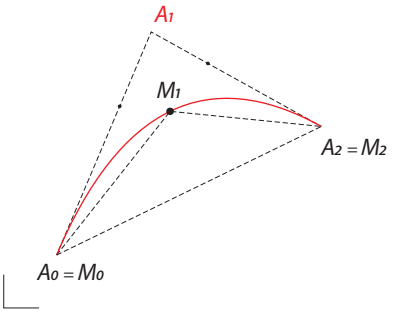
Dans ce cas il existe une infinités de solutions
car tout dépend de l'estimation du paramètre ***t*** *de* M_1 .

soit	X	Y
$A_0 = M_0$	7	7
M_1	22	26
$A_2 = M_2$	42	24

t estimé de $M_1 = \mathbf{0,5}$

$xA_1 = (xM_1-(1-t)^2\ xA_0- t^2\ xA_2) / 2t(1-t)= \mathbf{19,5}$

$yA_1 = (yM_1-(1-t)^2\ yA_0- t^2\ yA_2) / 2t(1-t) = \mathbf{36,5}$



---

2) La tangente en A_0 est imposée .

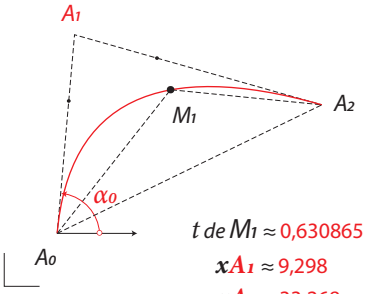
Dans ce cas il faut ***calculer*** *le paramètre* ***t*** *de* M_1

avec les mêmes points de 1) *et* $\alpha_0 = 85°$

$\vec{\alpha_0} = \tan(\alpha_0)$

résoudre $\begin{cases} xM_1 = t^2\ (xA_0 + xA_2 - 2xA_1) + 2t\ (xA_1 - xA_0) + xA_0 \\ yM_1 = t^2\ (yA_0 + yA_2 - 2yA_1) + 2t\ (yA_1 - yA_0) + yA_0 \\ \tan(\alpha_0) = \vec{\alpha_0} = \dfrac{yA_1 - yA_0}{xA_1 - xA_0} \end{cases}$

$\Rightarrow t^2\ [\ \vec{\alpha_0}(xA_0 - xA_2) + yA_2 - yA_0\ ] + \vec{\alpha_0}(xM_1 - xA_0) + yA_0 - yM_1 = 0$



t de $M_1 \approx 0{,}630865$
$xA_1 \approx 9{,}298$
$yA_1 \approx 33{,}268$

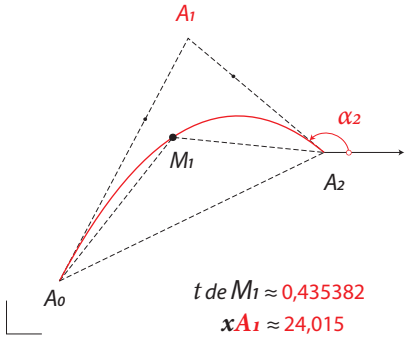
---

3) La tangente en A_2 est imposée .

Calcul de ***t*** *de* M_1 *avec les mêmes points de* 1) *et* $\alpha_2 = 140°$ ou $-40°$

résoudre $\begin{cases} xM_1 = t^2\ (xA_0 + xA_2 - 2xA_1) + 2t\ (xA_1 - xA_0) + xA_0 \\ yM_1 = t^2\ (yA_0 + yA_2 - 2yA_1) + 2t\ (yA_1 - yA_0) + yA_0 \\ \vec{\alpha_2} = \dfrac{yA_1 - yA_2}{xA_1 - xA_2} \end{cases}$

$\Rightarrow t^2\ [\ \vec{\alpha_2}(xA_2 - xA_0) + yA_0 - yA_2] + 2t\ [\ \vec{\alpha_2}(xA_0 - xA_2) + yA_2 - yA_0] + \vec{\alpha_2}(xM_1 - xA_0) - yM_1 + yA_0 = 0$



t de $M_1 \approx 0{,}435382$
$xA_1 \approx 24{,}015$
$yA_1 \approx 39{,}091$

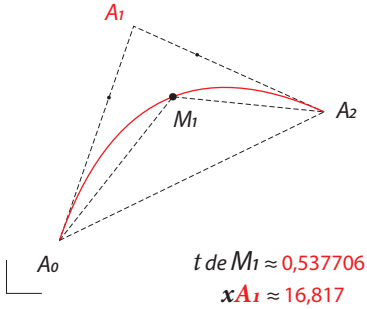
---

4) M_1 est le sommet de la parabole .

Avec les mêmes points de 1)
et à l'aide des équations des dérivées première et seconde :

résoudre $\begin{cases} xM_1 = t^2\ (xA_0 + xA_2 - 2xA_1) + 2t(xA_1 - xA_0) + xA_0 \\ yM_1 = t^2\ (yA_0 + yA_2 - 2yA_1) + 2t(yA_1 - yA_0) + yA_0 \\ \dfrac{g'(t)}{f'(t)} = -\dfrac{f''(t)}{g''(t)} \end{cases}$ *avec* $\begin{matrix} x_0 = xA_0 & y_0 = yA_0 \\ x_2 = xA_2 & y_2 = yA_2 \end{matrix}$

$$\begin{aligned} & + t^3\ [(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2] \\ \Rightarrow\ & - 3t^2\ [(x_0^2 + x_0x_2 + x_0\,xM_1 - x_2\,xM_1) + (y_0^2 + y_0y_2 + y_0\,yM_1 - y_2\,yM_1)] \\ & + t\ [(3x_0^2 - x_0x_2 - 5x_0\,xM_1 + x_2\,xM_1 + 2xM_1^2) + (3y_0^2 - y_0y_2 - 5y_0\,yM_1 + y_2\,yM_1 + 2yM_1^2)] \\ & - (x_0 - xM_1)^2 - (y_0 - yM_1)^2 = 0 \end{aligned}$$



t de $M_1 \approx 0{,}537706$
$xA_1 \approx 16{,}817$
$yA_1 \approx 35{,}331$

28

B_3 passant strictement par 3 points

a) P_1 est fixe et la tangente en P_3 est imposée .

avec : $xP_1 = 11$ $yP_1 = 22$ *et* $\alpha_3 = 120°$ *ou* $-40°$

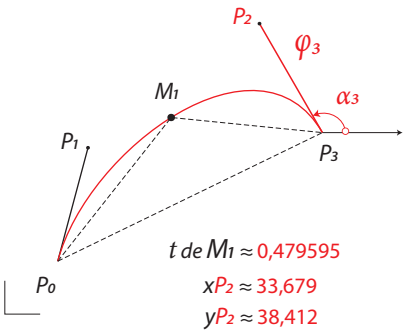
M_1	22	26
P_0	7	7
P_1	11	22
P_2	??	??
P_3	42	24

résoudre

$$\begin{cases} xM_{(t)} = [xP_3 - xP_0 + 3(xP_1 - x\mathbf{P_2})]t^3 + 3(xP_0 + x\mathbf{P_2} - 2xP_1)t^2 + 3(xP_1 - xP_0)\,t + xP_0 \\ yM_{(t)} = [yP_3 - yP_0 + 3(yP_1 - y\mathbf{P_2})]t^3 + 3(yP_0 + y\mathbf{P_2} - 2yP_1)t^2 + 3(yP_1 - yP_0)\,t + yP_0 \\ x\mathbf{P_2} = (\varphi_3 \cos(\alpha_3) + xP_3) \quad y\mathbf{P_2} = (\varphi_3 \sin(\alpha_3) + yP_3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} t^3\,[\,\vec{\alpha_3}(xP_0 - 3xP_1 + 2xP_3) - (yP_0 - 3yP_1 + 2yP_3)\,] \\ +3t^2[\,\vec{\alpha_3}(-xP_0 + 2xP_1 - xP_3) - (-yP_0 + 2yP_1 - yP_3)\,] \\ +3t\,[\,\vec{\alpha_3}(xP_0 - xP_1) - (yP_0 - yP_1)\,] \\ \quad + \vec{\alpha_3}(xM_1 - xP_0) - (yM_1 - yP_0) = 0 \end{array} \qquad \text{calcul de } t_{(M_1)} \qquad (A)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} x\mathbf{P_2} = [\,xM_1 - (1-t)^3\,xP_0 - 3t(1-t)^2\,xP_1 - t^3\,xP_3\,] \,/\, [3t^2(1-t)] \\ y\mathbf{P_2} = [\,yM_1 - (1-t)^3\,yP_0 - 3t(1-t)^2\,yP_1 - t^3\,yP_3\,] \,/\, [3t^2(1-t)] \end{array} \qquad \text{Donc } \varphi_3 = \|\vec{P_3P_2}\|$$



t de $M_1 \approx 0{,}479595$

$xP_2 \approx 33{,}679$

$yP_2 \approx 38{,}412$

---

b) P_2 est fixe et la tangente en P_0 est imposée .

avec : $xP_2 = 40$ $yP_2 = 34$ *et* $\alpha_0 = 60°$

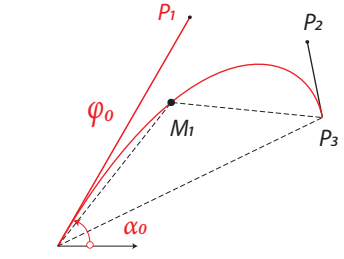
M_1	22	26
P_0	7	7
P_1	??	??
P_2	40	34
P_3	42	24

résoudre

$$\begin{cases} xM_{(t)} = [xP_3 - xP_0 + 3(x\mathbf{P_1} - xP_2)]t^3 + 3(xP_0 + xP_2 - 2x\mathbf{P_1})t^2 + 3(x\mathbf{P_1} - xP_0)\,t + xP_0 \\ yM_{(t)} = [yP_3 - yP_0 + 3(y\mathbf{P_1} - yP_2)]t^3 + 3(yP_0 + yP_2 - 2y\mathbf{P_1})t^2 + 3(y\mathbf{P_1} - yP_0)\,t + yP_0 \\ x\mathbf{P_1} = \varphi_0 \cos(\alpha_0) + xP_0 \quad y\mathbf{P_1} = \varphi_0 \sin(\alpha_0) + yP_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} t^3[\,\vec{\alpha_0}(-xP_3 - 2xP_0 + 3xP_2) - (-yP_3 - 2yP_0 + 3yP_2)\,] \\ +3t^2[\,\vec{\alpha_0}(xP_0 - xP_2) - (yP_0 - yP_2)\,] \\ \quad + \vec{\alpha_0}(xM_1 - xP_0) - (yM_1 - yP_0) = 0 \end{array} \qquad \text{calcul de } t_{(M_1)} \qquad (B)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} x\mathbf{P_1} = [\,xM_1 - (1-t)^3\,xP_0 - 3t^2(1-t)\,xP_2 - t^3\,xP_3\,] \,/\, [3t(1-t)^2] \\ y\mathbf{P_1} = [\,yM_1 - (1-t)^3\,yP_0 - 3t^2(1-t)\,yP_2 - t^3\,yP_3\,] \,/\, [3t(1-t)^2] \end{array} \qquad \text{Donc } \varphi_0 = \|\vec{P_0P_1}\|$$



t de $M_1 \approx 0{,}302471$

$xP_1 \approx 24{,}472$

$yP_1 \approx 37{,}262$

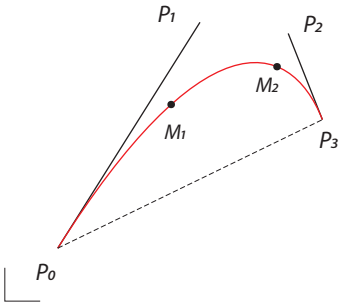
B_3 passant strictement par 4 points *(source : Mr. Krauss)*

soit

	X	Y
$P_0 = M_0$	7	7
M_1	22	26
M_2	36	31
$P_3 = M_3$	42	24

Dans ce cas il faut estimer t_1 *de* M_1 *et* t_2 *de* M_2

Exemple avec $t_1 = 0{,}3$ *et* $t_2 = 0{,}7$



Résoudre

$$\begin{cases} 3t_1(1-t_1)^2\,xP_1 + 3t_1^2(1-t_1)\,xP_2 = xM1 - (1-t_1)^3\,xP_0 - t_1^3\,xP_3 \\ 3t_2(1-t_2)^2\,xP_1 + 3t_2^2(1-t_2)\,xP_2 = xM2 - (1-t_2)^3\,xP_0 - t_2^3\,xP_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (1-t_1)\,xP_1 + t_1\,xP_2 = \underbrace{[\,xM1 - (1-t_1)^3\,xP_0 - t_1^3\,xP_3\,] \,/\, [3t_1(1-t_1)]}_{\mathbf{xa_1}} \\ (1-t_2)\,xP_1 + t_2\,xP_2 = \underbrace{[\,xM2 - (1-t_2)^3\,xP_0 - t_2^3\,xP_3\,] \,/\, [3t_2(1-t_2)]}_{\mathbf{xa_2}} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} xP_1 = \dfrac{\mathbf{xa_1}\,t_2 - \mathbf{xa_2}\,t_1}{t_2 - t_1} \\ xP_2 = \dfrac{\mathbf{xa_2}(1-t_1) - \mathbf{xa_1}(1-t_2)}{t_2 - t_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (1-t_1)\,yP_1 + t_1\,yP_2 = \underbrace{[\,yM1 - (1-t_1)^3\,yP_0 - t_1^3\,yP_3\,] \,/\, [3t_1(1-t_1)]}_{\mathbf{ya_1}} \\ (1-t_2)\,yP_1 + t_2\,yP_2 = \underbrace{[\,yM2 - (1-t_2)^3\,yP_0 - t_2^3\,yP_3\,] \,/\, [3t_2(1-t_2)]}_{\mathbf{ya_2}} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} yP_1 = \dfrac{\mathbf{ya_1}\,t_2 - \mathbf{ya_2}\,t_1}{t_2 - t_1} \\ yP_2 = \dfrac{\mathbf{ya_2}(1-t_1) - \mathbf{ya_1}(1-t_2)}{t_2 - t_1} \end{cases}$$

	X	Y
P_0	7	7
P_1	25,810	36,873
P_2	37,476	35,397
P_3	42	24

NB : toutes ces définitions strictes peuvent engendrer des résultats incohérents ou aucunes solutions.

29

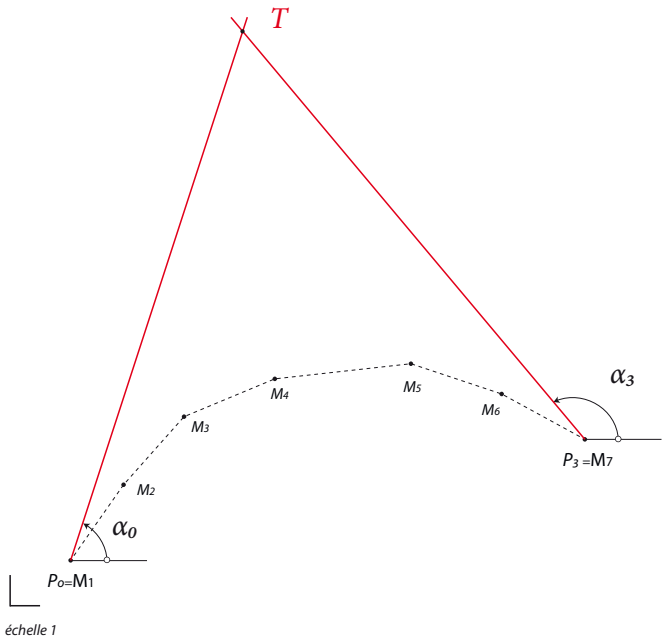
Lissage, ajustement, de points par une B_3 avec l'algorithme «*lissage*» .

Méthode «*Belharra*» .

Exemple 1)

Données de départ (calculs préliminaires)

	X	Y	t estimé	
P_0= M1	8	6	0	α_0 = **72 °**
M_2	15	16	0,14865	||P0T|| = 73,55
M_3	23	25	0,29331	xT= 30,729
M_4	35	30	0,45957	yT= 75,952
M_5	53	32	0,69247	
M_6	65	28	0,85921	||P3T|| = 70,43
P_3= M7	76	22	1	α_3 = **130 °**



A) *Utilisons les formules de* Ⓐ *qui permettent de définir* $\varphi_{3(Mn)}$ *par rapport à* P_1 *et un point Mn*

avec Ⓐ *nous pouvons calculer 5 valeurs possibles de* P_2 : $P_{2(M2)}$, $P_{2(M3)}$, $P_{2(M4)}$, $P_{2(M5)}$, $P_{2(M6)}$

et par conséquent : $\varphi_{3(M2)}$, $\varphi_{3(M3)}$, $\varphi_{3(M4)}$, $\varphi_{3(M5)}$, $\varphi_{3(M6)}$

$$t^3\,[\,\vec{\alpha_3}(xP_0 - 3xP_1+2xP_3)-(yP_0 - 3yP_1+2yP_3)\,]$$
$$+3t^2[\,\vec{\alpha_3}(-xP_0 + 2xP_1-xP_3)-(-yP_0 + 2yP_1 -yP_3)\,]$$
$$+3t\,[\,\vec{\alpha_3}(xP_0-xP_1)-(yP_0-yP_1)]$$
$$+\,\vec{\alpha_3}(xMn-xP_0)-(yMn-yP_0)=0 \qquad \text{calcul de } t_{(Mn)}$$

Ⓐ

avec $t = t_{(Mn)}$

$$xP_{2(t)} = [\,xMn -(1-t)^3\,xP_0 - 3t(1-t)^2\,xP_1 - t^3\,xP_3\,] / [3t^2(1-t)]$$
$$yP_{2(t)} = [\,yMn -(1-t)^3\,yP_0 - 3t(1-t)^2\,yP_1 - t^3\,yP_3\,] / [3t^2(1-t)]$$

$\Rightarrow \varphi_{3(Mn)}$

NB: après avoir résolus l'équation du 3eme degré il faut choisir un ***t*** *qui appartient à l'intervalle* **]0 1[** ***sinon utiliser le t estimé .***

NB : Au départ de l'algorithme $P_{1(Moyen)} = T$ *Les suivants serons calculés dans* **B)**

Définissons $\varphi_{3(moyen)}$ *avec une moyenne pondérée .*

Le poid de $\varphi_{3(Mn)}$ *est l'inverse de la distance :* $Mn\,P_{2(Mn)} = ||\,Mn\,P_{2(Mn)}\,||^{-1}$

Cela veut dire que plus $P_{2(Mn)}$ *est près de* M_n *plus son poid est fort.*

$||\,M_2\,P_{2(M2)}\,||^{-1}=w_2$
$||\,M_3\,P_{2(M3)}\,||^{-1}=w_3$
$||\,M_4\,P_{2(M4)}\,||^{-1}=w_4$
$||\,M_5\,P_{2(M5)}\,||^{-1}=w_5$
$||\,M_6\,P_{2(M6)}\,||^{-1}=w_6$

$$\varphi_{3(Moyen)} = \frac{\varphi_{3(M2)}\,w_2 + \varphi_{3(M3)}\,w_3 + \varphi_{3(M4)}\,w_4 + \varphi_{3(M5)}\,w_5 + \varphi_{3(M6)}\,w_6}{w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6}$$

$\Rightarrow P_{2\,(Moyen)}$

$$xP_2 = \varphi_{3(Moyen)}\cos(\alpha_3) + xP_3$$
$$yP_2 = \varphi_{3(Moyen)}\sin(\alpha_3) + yP_3$$

puis aller à **B)** (page suivante)

30

	$t^3[\ \vec{\alpha_0}(-xP_3 -2xP_0+3xP_2)-(-yP_3 -2yP_0 +3yP_2)]$ $+3t^2[\ \vec{\alpha_0}(xP_0 - xP_2)-(yP_0 - yP_2)]$ $+\ \vec{\alpha_0}(xMn-xP_0\ )-(yMn-yP_0) = 0$ *calcul de* $t_{(Mn)}$	Ⓑ
avec $t = t_{(Mn)}$	$xP_{1(t)} = [\ xMn -(1-t)^3\ xP_0 - 3t^2(1-t)\ xP_2 - t^3\ xP_3\ ] / [3t(1-t)^2]$ $yP_{1(t)} = [\ yMn -(1-t)^3\ yP_0 - 3t^2(1-t)\ yP_2 - t^3\ yP_3\ ] / [3t(1-t)^2]$	$=> \varphi_{0(Mn)}$

NB : P_2 est calculé dans **A)**

B) *Avec : P_2 et les formules de* Ⓑ

Définissons les 5 valeurs possibles de φ_0 *:* $\varphi_{0(M2)}$, $\varphi_{0(M3)}$, $\varphi_{0(M4)}$, $\varphi_{0(M5)}$, $\varphi_{0(M6)}$

$||\ M_2\ P_{1(M2)}\ ||^{-1} = w_2$
$||\ M_3\ P_{1(M3)}\ ||^{-1} = w_3$
$||\ M_4\ P_{1(M4)}\ ||^{-1} = w_4$
$||\ M_5\ P_{1(M5)}\ ||^{-1} = w_5$
$||\ M_6\ P_{1(M6)}\ ||^{-1} = w_6$

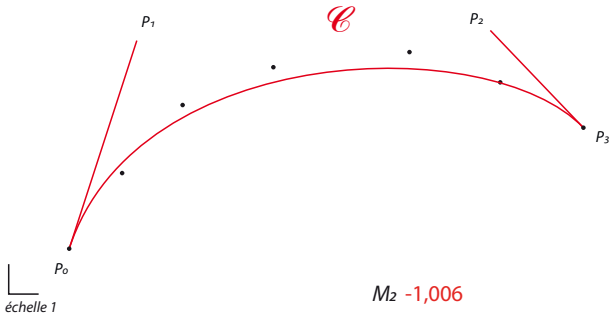
$$\varphi_{0(Moyen)} = \frac{\varphi_{0(M2)}\ w_2 + \varphi_{0(M3)}\ w_3 + \varphi_{0(M4)}\ w_4 + \varphi_{0(M5)}\ w_5 + \varphi_{0(M6)}\ w_6}{w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6}$$

$$=> P_{1\ (Moyen)} \qquad xP_1 = \varphi_{0(Moyen)} \cos(\alpha_0) + xP_0 \qquad yP_1 = \varphi_{0(Moyen)} \sin(\alpha_0) + yP_0$$

Ensuite répetons le processus **A)** *avec P1 calculé ,* **B)** *avec P2 calculé etc.....*

Voici le résultat aprés 30 itérations (avec les φ equilibrés)

$\mathscr{C}$	X	Y
P_0	8	6
P_1	16,942	33,521
P_2	63,693	34,862
P_3	76	22



analyse statistique, écart des points M avec $\mathscr{C}$ *(méthode page 19)*

M_2 -1,006
M_3 1,185
M_4 1,383
M_5 1,403
M_6 0,600

$$EQM = \frac{\sum_i^n (\ écart_{(n)}{}^2\ )}{n} = 1{,}3317$$

Conseils et contraintes

1) La progression doit être continue : pas de points d'inflexion sur celle ci , $P_0 \neq P_3$.

2) Les φ ne doivent pas dépasser le point d'intersection T sinon la courbe aura un point d'inflexion sur son domaine de définition]0 1[=> Remède : $\varphi_0 = ||P_0T||/2$ ou $\varphi_3 = ||P_3T||/2$

3) Les φ doivent être équilibrés (il ne faut pas que φ_0 soit grand et φ_3 trés petit (et vice versa) .

=> personnellement j'applique ces règles : **a)** *si* $\frac{\varphi_3}{\varphi_0} < 0{,}4 => \varphi_3 = \varphi_0 \times 0{,}8$ **b)** *si* $\frac{\varphi_0}{\varphi_3} < 0{,}4 => \varphi_0 = \varphi_3 \times 0{,}8$

31

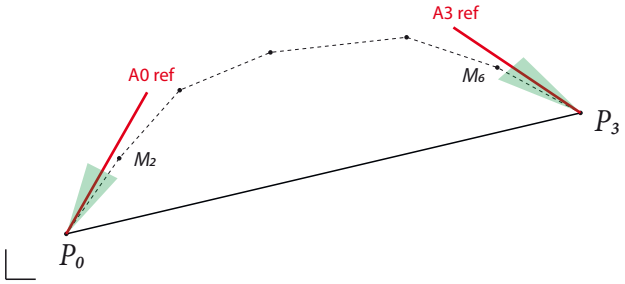
Allons plus loin !!

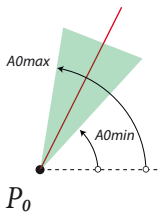
L'algorithme «***lissage***» a ses limites car les angles α_0 et α_3 sont fixes.
Pour avoir un processus de lissage complet il faut créer l'algorithme : ***«MasterLiss»*** qui gère les variation de ces angles .

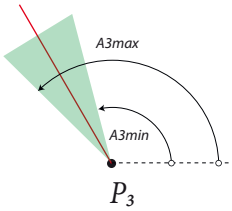
a) *Avant tout, pour eviter des boucles inutiles l'algo determine les angles orientés* **A0ref** *et* **A3ref** *qui sont probablement une bonne référence pour le lissage final.*

b) *Pour se fixer une amplitude de lissage en* **A** *et* **B** *(en vert sur les images ci dessous)*
Il faut définir les angles orientés suivant avec un **Δ°** *fixé a l'avance* **(10° par exemple)** *:*

A0min = A0ref - Δ , A0max = A0ref + Δ
A3min = A3ref - Δ , A3max = A3ref + Δ







c) *l'algorithme «**MasterLiss**» peut continuer , 4 cas sont possibles*

*les angles α_0 et α_3 sont libres «**Masterliss**» effectue 20*20 = 400 boucles (incrément de 1°)*

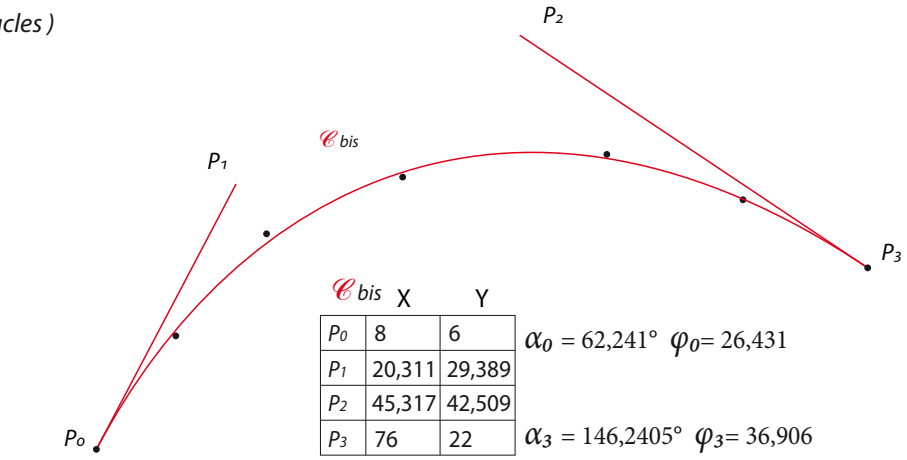
l' angle α_0 est fixe et α_3 est libre (20 boucles)

l' angle α_0 est libre et α_3 est fixe (20 boucles)

les angles α_0 et α_3 sont fixes (1boucle)

Exemple 1bis) α_0 et α_3 sont libres.

*«**Masterliss**» a détecté 70 Eqm < 1*
48 Eqm < 0,5
14 Eqm < 0,25



Cbis	X	Y
P0	8	6
P1	20,311	29,389
P2	45,317	42,509
P3	76	22

α_0 = 62,241° φ_0= 26,431

α_3 = 146,2405° φ_3= 36,906

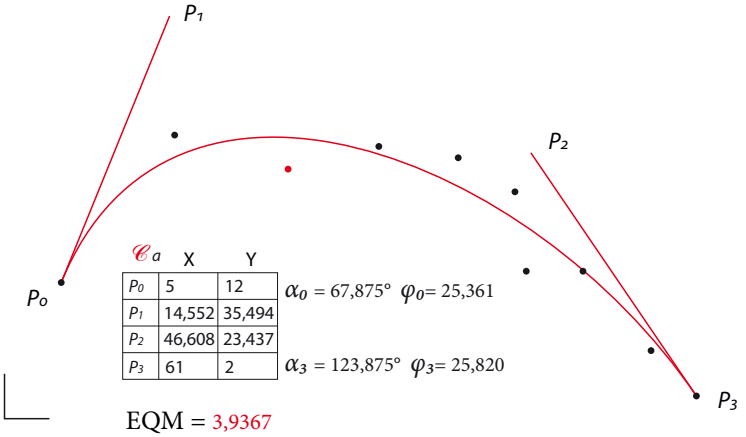
échelle 1,5

EQM = 0,16871 = MSE

---

un autre exemple : la progression est désordonnée (sauf M1 *et* M10 *)*

	X	Y
P0=M1	5	12
M2	25	22
M3	15	25
M4	33	24
M5	46	13
M6	45	20
M7	40	23
M8	51	13
M9	57	6
P3=M10	61	2



Ca	X	Y
P0	5	12
P1	14,552	35,494
P2	46,608	23,437
P3	61	2

α_0 = 67,875° φ_0= 25,361

α_3 = 123,875° φ_3= 25,820

EQM = 3,9367

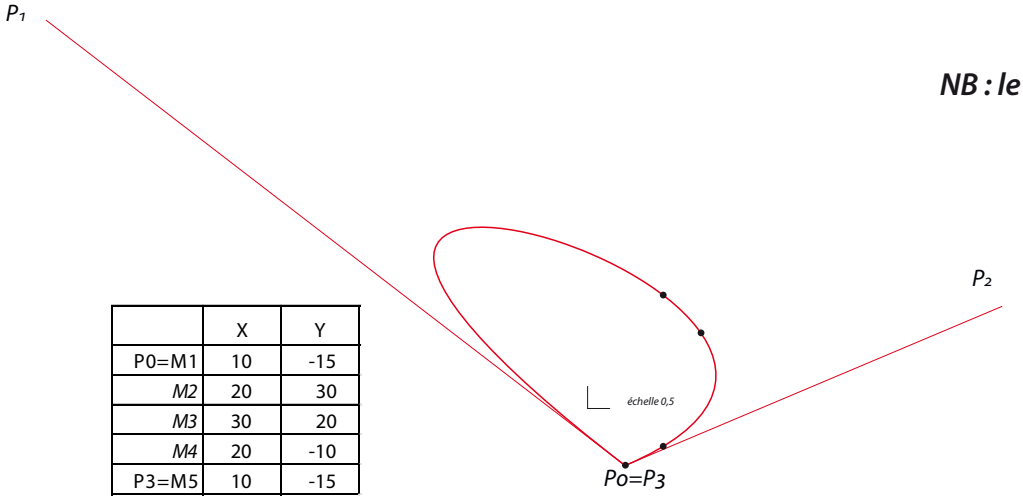
échelle 1,5

32

Un autre algorithme de lissage (*plus lent*) : « *MasterlissFree* »

Cet algorithme ausculte sur 180° en P_0 et P_3 la progression des points *M* (Polyligne).
Il permet, autant que possible, de lisser des progressions : bizarres, avec 1 point d'inflexion etc...

NB : le résultat peut être incorrect / imprécis



	X	Y
P0=M1	10	-15
M2	20	30
M3	30	20
M4	20	-10
P3=M5	10	-15

P_0	10	-15
P_1	-143,261	102,724
P_2	109,645	27,020
P_3	10	-15

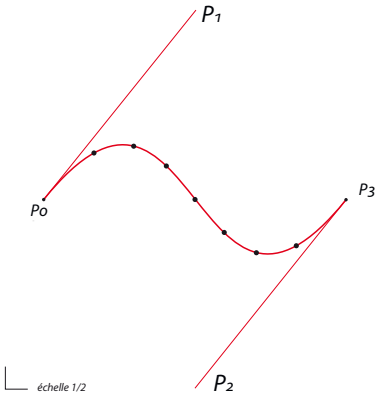
$\alpha_0 = 142{,}47°$ $\varphi_0 = 193{,}256$

$\alpha_3 = 22{,}865°$ $\varphi_3 = 108{,}143$

EQM = 0,00003

---

progression créé avec :
x*P0*=10 y*Po*=50 x*P1*=50 y*P1*=100
x*P2*=50 y*P2*=0 x*P3*=90 y*P3*=50



	X	Y
Po = M1	10,160	50,160
M2	23,451	62,475
M3	33,960	64.273
M4	42,594	59,039
M5	50,180	50,180
M6	57,906	41,461
M7	66,410	36,098
M8	76,969	37,945
P3 = M9	90,120	50,120

P_0	10,16	50,16
P_1	50,411	100,253
P_2	50,148	0,240
P_3	90,12	50,12

$\alpha_0 = 51{,}2°$ $\varphi_0 = 64{,}26$

$\alpha_3 = 231{,}293°$ $\varphi_3 = 63{,}92$

EQM = 0,09138

Bon à savoir : comment détecter les points d'inflexion d'une polyligne ?

Tout d'abord il faut claculer les α *à l'aide des Angles orientés* Aor1, Aor2 *etc....*

=> α_1=Aor2-Aor1 , α_2=Aor3-Aor2 etc...

Attention aux cas particuliers

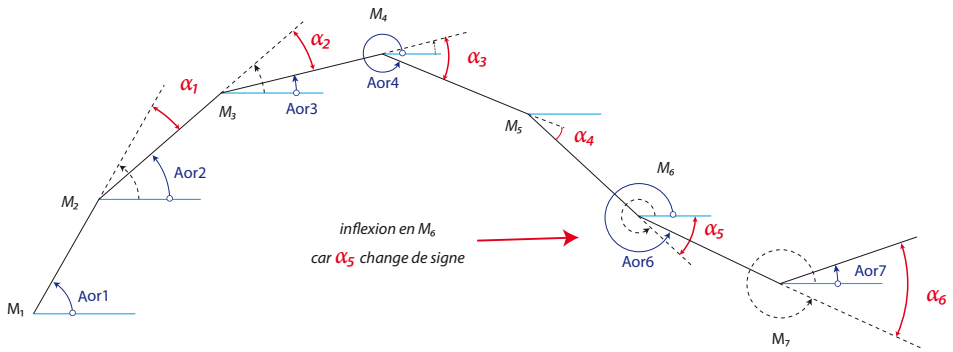
1) si on passe de Aor(n-1) [0° 90] *vers Aor*(n) [270° 360°] => α(n) = -360 + *Aor*(n) - *Aor*(n-1) *(exemple au point M4)*

2) si on passe de Aor(n-1) [270° 360] *vers Aor*(n) [0 90°] => α(n) = 360 + *Aor*(n) - *Aor*(n-1) *(exemple au point M7)*

dans notre exemple :

α_5 ***change de signe :*** **>0 !!** *cela veut dire qu'il y a un point d'inflexion, en* M_6

par contre si nous inversons la progression (M_7 *vers* M_1*)* *l'inflexion est en* M_5



33

Comment résoudre un équation du 3ème degré ?

L'équation se présente sous la forme : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Dans un premier temps nous allons simplifier les termes de cette équation

1) divisons tous les coefficients par : a

$$\frac{ax^3}{a} + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx^2}{a} + \frac{d}{a} = 0 \quad => \quad x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

2) changons de variable en posant : $x = \left(z - \frac{B}{3}\right)$

$$=> \; 1\left(z - \frac{B}{3}\right)^3 + B\left(z - \frac{B}{3}\right)^2 + C\left(z - \frac{B}{3}\right) + D = 0$$

3) En développant et simplifiant => $z^3 + pz + q = 0$

$$p = \left(C - \frac{B^2}{3}\right) \quad et \quad q = \left(\frac{2B^3}{27} + D - \frac{BC}{3}\right)$$

Le discriminant Δ *de* $z^3 + pz + q = q^2 + \frac{4p^3}{27}$

Le signe et la valeur de Δ *impliquent 3 cas*

1er cas : si $\Delta > 0$ ***il existe 1 racine réelle :***

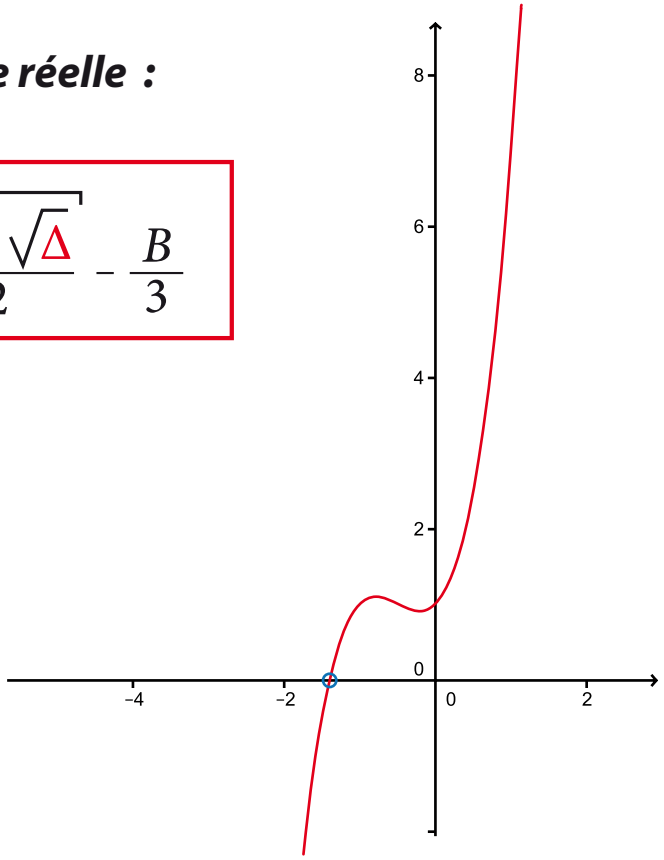
$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} - \frac{B}{3}$$

Exemple 1 $\quad 2x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$

$$=> z^3 - 0{,}25z + 0{,}5 = 0$$

$$\Delta \approx 0{,}25$$

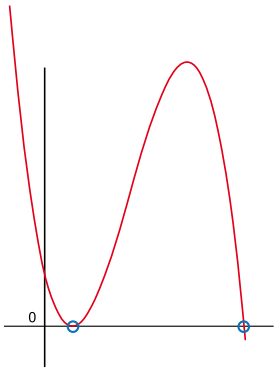
$$x_1 \approx -1{,}398$$



34

2 ème cas : si $\Delta = 0$ ***il existe «2» racines réelles :***

$$x_1 = \frac{3q}{p} - \frac{B}{3} \qquad x_2 = x_3 = -\frac{3q}{2p} - \frac{B}{3}$$



Exemple 2 $x^3 - 15x^2 + 27x - 13 = 0$ $\Delta = 0$

$$\Rightarrow\ z^3 - 48z - 128 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 13 \qquad x_2 = x_3 = 1$$

---

3 ème cas : si $\Delta < 0$ ***il existe 3 racines réelles :***

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\text{Arccos}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)}{3}\right) - \frac{B}{3}$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\text{Arccos}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)+2\pi}{3}\right) - \frac{B}{3}$$

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\text{Arccos}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)+4\pi}{3}\right) - \frac{B}{3}$$

Exemple 3 $2x^3 - 3x^2 - 4x + 2 = 0$

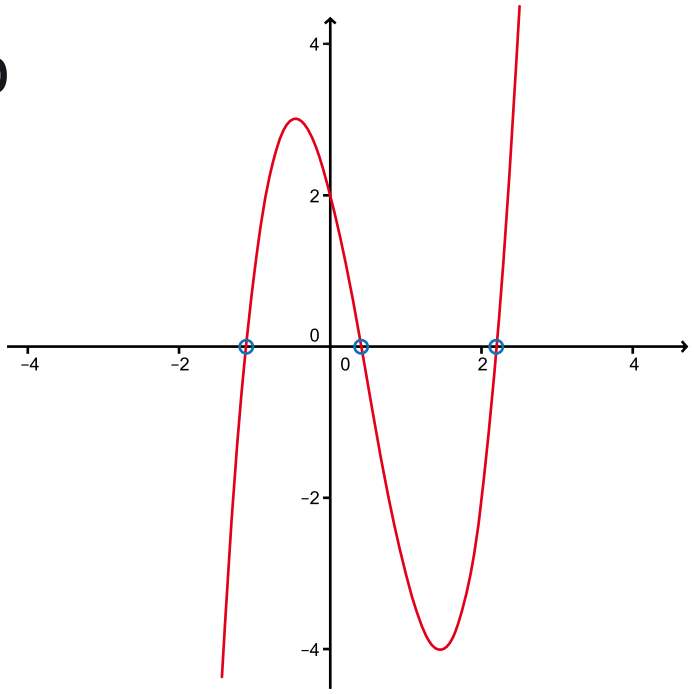
$$\Rightarrow\ z^3 - 2{,}75z - 0{,}25 = 0$$

$$\Delta \approx -3{,}02$$

$$x_1 \approx 2{,}02$$

$$x_2 \approx -1{,}11$$

$$x_3 \approx 0{,}41$$



35

Changements de paramètres par rotation avec la formule du « changement de base » (*modifiée*)

Dans cet exemple le but est d'effectuer à la courbe $\mathscr{P}$ une rotation α
par rapport à un centre de rotation Ω et éventuellement une translation Δx , Δy

Par calcul matriciel

$$P' \begin{pmatrix} xP' \\ yP' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (xP - x\Omega) \\ (yP - y\Omega) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\Omega + \Delta x \\ y\Omega + \Delta y \end{pmatrix}$$

ou

par une formule directe

$$P' \left| \begin{array}{l} xP' = \cos\alpha\,(xP - x\Omega) - \sin\alpha\,(yP - y\Omega) + x\Omega + \Delta x \\ yP' = \sin\alpha\,(xP - x\Omega) + \cos\alpha\,(yP - y\Omega) + y\Omega + \Delta y \end{array} \right.$$

$\mathscr{P}$	X	Y
P_0	45	15
P_1	72	60
P_2	15	45
P_3	75	15
Origine	0	0

avec

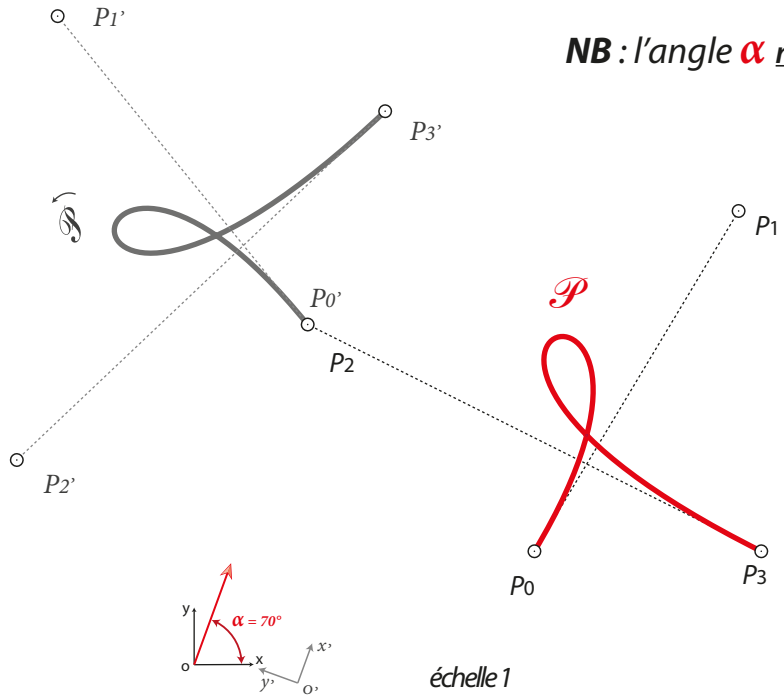
$\alpha = 70°$

$\Omega = P_0$ | 45 ; 15

$P_2 - P_0$ | $\Delta x = -30$; $\Delta y = 30$

=>

$\mathscr{P}$	X	Y
$P_{0'}$	15	45
$P_{1'}$	-18,05	85,76
$P_{2'}$	-23,45	27,07
$P_{3'}$	25,26	73,19
Origine'	13,70	-2,42



NB : *l'angle* α ***ne doit pas être*** *orienté*

Réciproquement

$$P \begin{pmatrix} xP \\ yP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (xP' - x\Omega - \Delta x) \\ (yP' - y\Omega - \Delta y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\Omega \\ y\Omega \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} xP \\ yP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (xP' - x\Omega - \Delta x) \\ (yP' - y\Omega - \Delta y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\Omega \\ y\Omega \end{pmatrix}$$

$$P \left| \begin{array}{l} xP = \cos(-\alpha)(xP' - x\Omega - \Delta x) - \sin(-\alpha)(yP' - y\Omega - \Delta y) + x\Omega \\ yP = \sin(-\alpha)(xP' - x\Omega - \Delta x) + \cos(-\alpha)(yP' - y\Omega - \Delta y) + y\Omega \end{array} \right.$$

ou

$$P \left| \begin{array}{l} xP = \cos(\alpha)(xP' - x\Omega - \Delta x) + \sin(\alpha)(yP' - y\Omega - \Delta y) + x\Omega \\ yP = -\sin(\alpha)(xP' - x\Omega - \Delta x) + \cos(\alpha)(yP' - y\Omega - \Delta y) + y\Omega \end{array} \right.$$

36

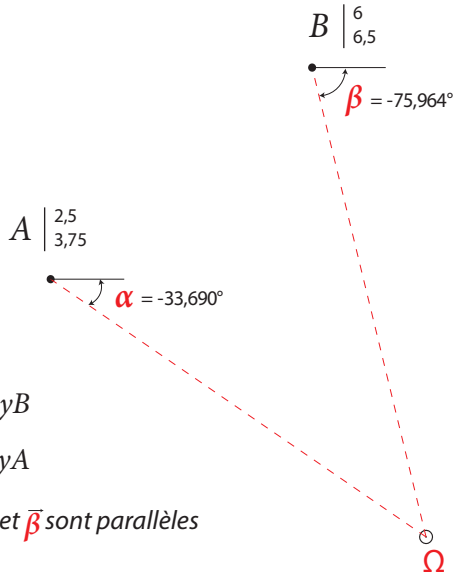
Intersection de 2 droites par la méthode de Mr. *Delambre* adaptée au sens trigonométrique.

(droite définie par un point et son coefficient directeur)

exemple avec les données de la page 24

$$x\Omega = xA + \frac{(yA-yB)-(xA-xB)\tan(\beta)}{\tan(\beta)-\tan(\alpha)} = 7{,}525$$

$$y\Omega = yA + (x\Omega-xA)\tan(\alpha) = 0{,}4$$



si α = 90° ou -90° alors $x\Omega = xA$ et $y\Omega = \tan(\beta)\,(xA-xB)+yB$

si β = 90° ou -90° alors $x\Omega = xB$ et $y\Omega = \tan(\alpha)\,(xB-xA)+yA$

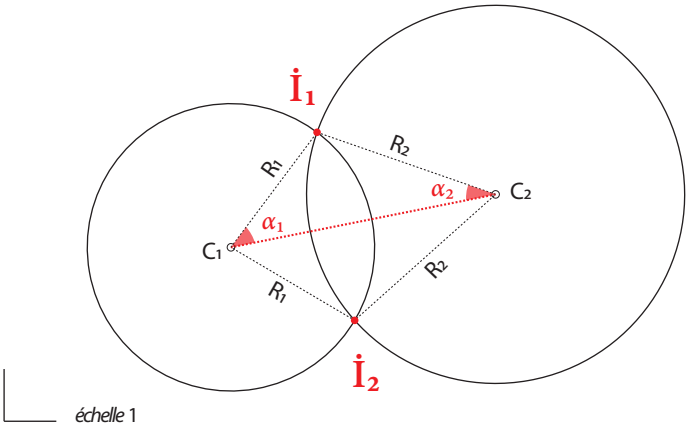
si $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$ l'intersection est indéfinie *car les vecteurs $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ sont parallèles*

Intersection de 2 cercles, méthode topographique [3]

Données initiales

	X	Y		
C_1	**30**	**23**	R_1	**19**
C_2	**65**	**30**	R_2	**25**

$\|C_1C_2\| =$ **35,693**



Définition de : α_1 , α_2

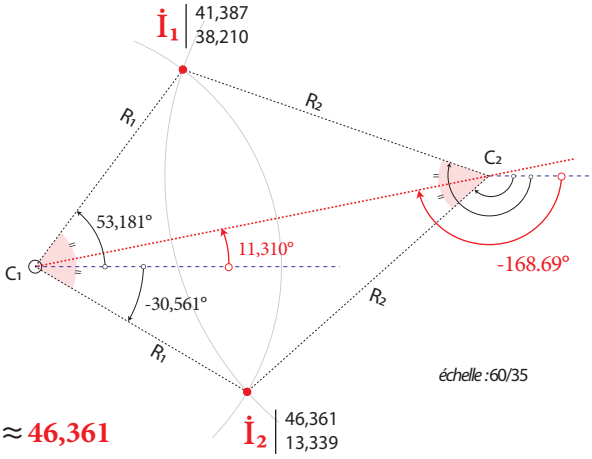
$$\cos(\alpha_1) = \frac{R_1^2 + \|C_1C_2\|^2 - R_2^2}{2R_1\|C_1C_2\|} \Rightarrow \alpha_1 \approx 41{,}871°$$

$$\cos(\alpha_2) = \frac{R_2^2 + \|C_1C_2\|^2 - R_1^2}{2R_2\|C_1C_2\|} \Rightarrow \alpha_2 \approx 30{,}482°$$

Définition des angles orientés : $C_1\dot{I}_1$, $C_1\dot{I}_2$

Aor $C_1\dot{I}_1 = \text{atan2}(xC_2-xC_1\ ;\ yC_2-yC_1) \times \frac{180}{\text{pi()}} + \alpha_1 \approx 53{,}181°$

Aor $C_1\dot{I}_2 = \text{atan2}(xC_2-xC_1\ ;\ yC_2-yC_1) \times \frac{180}{\text{pi()}} - \alpha_1 \approx -30{,}561°$



Définition de : $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ *par coordonnées polaires à partir de* C_1

$x\dot{I}_1 = \cos(\text{Aor } C_1\dot{I}_1)R_1 + xC_1 \approx$ **41,387** $\quad x\dot{I}_2 = \cos(\text{Aor } C_1\dot{I}_2)R_1 + xC_1 \approx$ **46,361**

$y\dot{I}_1 = \sin(\text{Aor } C_1\dot{I}_1)R_1 + yC_1 \approx$ **38,210** $\quad y\dot{I}_2 = \sin(\text{Aor } C_1\dot{I}_2)R_1 + yC_1 \approx$ **13,339**

Cas particuliers

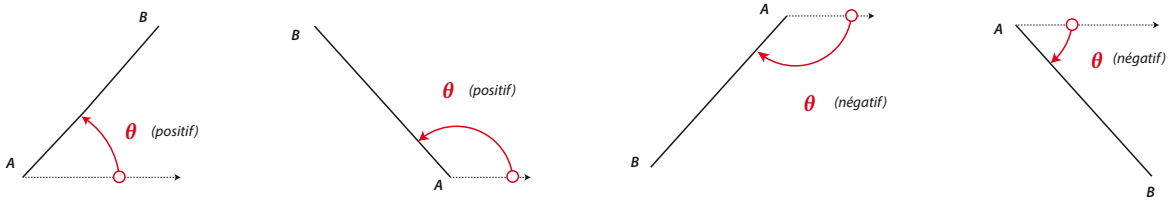
si $\|C_1C_2\| = R_1 + R_2$ *=> les cercles sont tangents extérieurement*

si $\|C_1C_2\| = |R_1 - R_2|$ *=> les cercles sont tangents intérieurement*

37

Angles orientés.

Un angle orienté θ *débute toujours sur un axe paralléle à celui du repère orthonormé :* ox
Il peut être positif ou négatif.
*Dans le domaine des «nombres complexes» cet angle est l'**argument** θ.*



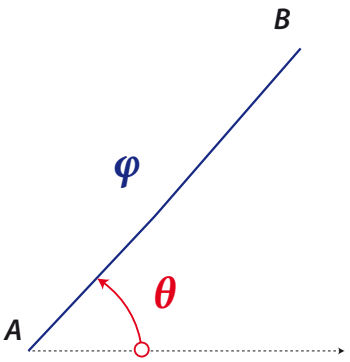
*Constatons que, grace à cet angle, **B** est bien **orienté** par rapport à **A***

Coordonnées polaires.

*Les coordonnées polaires de **B** par rapport à **A** sont : la distance **AB** φ et l'angle orienté* θ
*Dans le domaine des «nombres complexes» la distance **AB** est le **module** **R***
*Les coord. polaires permettent de définir les coordonnées cartésiennes de **B** par rapport à **A***

$$xB = xA + \varphi \cos(\theta)$$

$$yB = yA + \varphi \sin(\theta)$$



Quelques formules importantes

$$\Delta x_{(AB)} = xB - xA = \varphi \cos(\theta)$$

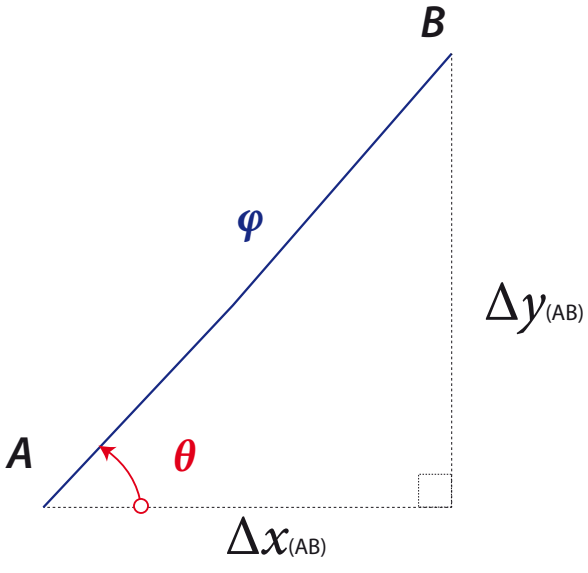
$$\Delta y_{(AB)} = yB - yA = \varphi \sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{\Delta y_{(AB)}}{\Delta x_{(AB)}}$$

$$\varphi = \sqrt{(\Delta x_{(AB)})^2 + (\Delta y_{(AB)})^2}$$

$$\varphi = \frac{\Delta x_{(AB)}}{\cos(\theta)} = \frac{\Delta y_{(AB)}}{\sin(\theta)}$$

$$\theta = \text{atan2}(\Delta x_{(AB)} ; \Delta y_{(AB)})$$

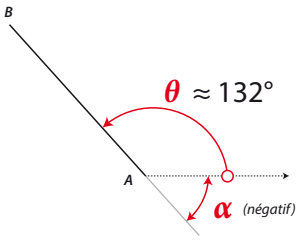


38

Pourquoi définir un angle orienté ?

exemple avec A $\begin{vmatrix} -15 \\ 5 \end{vmatrix}$ B $\begin{vmatrix} -33 \\ 25 \end{vmatrix}$ $\varphi \approx 26{,}9$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y(AB)}{\Delta x(AB)} = \dfrac{-18}{20} \Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\left(\dfrac{-18}{20}\right) \approx -48°$



*calculons les coordonnées de **B** à l'aide de φ et α*

$xB = xA + \varphi \cos(\alpha) = 3$? *il devrait être négatif*

$yB = yA + \varphi \sin(\alpha) = -15$? *il devrait être positif*

les résultats sont incohérents !!

Dans cet exemple θ doit être $= 180° - |-48°| \Rightarrow \theta \approx 132°$ *c'est l'angle **supplémentaire** de* $|\alpha|$

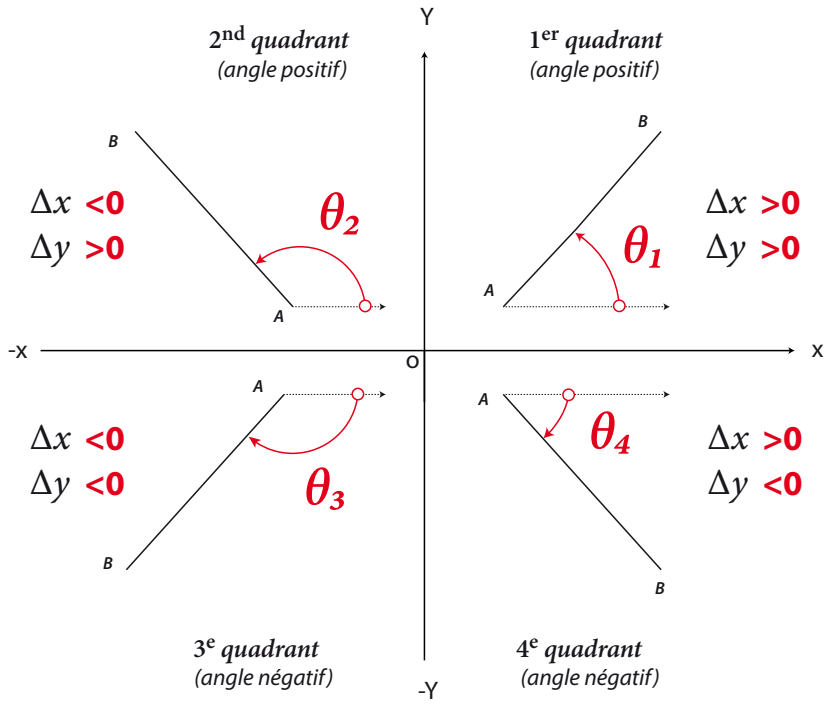
*Pour définir correctement un angle orienté il faut connaitre la position de **AB** par rapport aux 4 quadrants du repère orthonormé.*

1) si $\Delta x_{(AB)} > 0$ et $\Delta y_{(AB)} > 0$ *alors **AB** est orienté vers le 1er quadrant* $\Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\left(\dfrac{\Delta y_{(AB)}}{\Delta x_{(AB)}}\right) \Rightarrow \theta_1 = |\alpha|$

2) si $\Delta x_{(AB)} < 0$ et $\Delta y_{(AB)} > 0$ *alors **AB** est orienté vers le 2nd quadrant* $\Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\left(\dfrac{\Delta y_{(AB)}}{\Delta x_{(AB)}}\right) \Rightarrow \theta_2 = 180° - |\alpha|$

3) si $\Delta x_{(AB)} < 0$ et $\Delta y_{(AB)} < 0$ *alors **AB** est orienté vers le 3e quadrant* $\Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\left(\dfrac{\Delta y_{(AB)}}{\Delta x_{(AB)}}\right) \Rightarrow \theta_3 = |\alpha| - 180°$

4) si $\Delta x_{(AB)} > 0$ et $\Delta y_{(AB)} < 0$ *alors **AB** est orienté vers le 4e quadrant* $\Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\left(\dfrac{\Delta y_{(AB)}}{\Delta x_{(AB)}}\right) \Rightarrow \theta_4 = -|\alpha|$



les tableurs ont intégrés ce calcul particulier par la fonction : **Atan2**$(\Delta x\,;\Delta y)$

39

Le cercle et ses tangentes

a) calcul des tangentes : $IT = IT'$

$$= \mathbf{R}\tan(\frac{\theta}{2}) = \mathbf{R}\,\mathrm{cotan}(\frac{\alpha}{2}) \;= OI\,\sin(\frac{\theta}{2}) = OI\,\cos(\frac{\alpha}{2})$$

$$= \frac{HI}{\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{HI}{\cos(\frac{\alpha}{2})} = \frac{TH}{\cos(\frac{\theta}{2})} = \frac{TH}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

$$= \sqrt{HI^2 + TH^2} \;= \sqrt{OI^2 - OT^2} \;= \sqrt{IM \times IM'} = \sqrt{HI \times OI}$$

b) calcul du rayon : R

$$= \boldsymbol{IT}\tan(\frac{\alpha}{2}) = \boldsymbol{IT}\,\mathrm{cotan}(\frac{\theta}{2}) = OI\,\sin(\frac{\alpha}{2}) = OI\,\cos(\frac{\theta}{2})$$

$$= \frac{TH}{\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{TH}{\cos(\frac{\alpha}{2})} = \frac{OH}{\cos(\frac{\theta}{2})} = \frac{OH}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

$$= \sqrt{TH^2 + OH^2} \;= \sqrt{\,OI^2 - \boldsymbol{IT}^2} = \sqrt{OH \times OI} \;= \frac{\mathbf{C}^2}{8\mathbf{F}} + \frac{\mathbf{F}}{2}$$

c) calcul de la corde : TT' = C

$$= 2\mathbf{R}\cos(\frac{\alpha}{2}) = 2\mathbf{R}\sin(\frac{\theta}{2}) \;= 2\,\boldsymbol{IT}\sin(\frac{\alpha}{2}) = 2\,\boldsymbol{IT}\cos(\frac{\theta}{2})$$

$$= 2\,OH\,\mathrm{cotan}(\frac{\alpha}{2}) = 2\,OH\tan(\frac{\theta}{2}) \;= 2\,HI\tan(\frac{\alpha}{2}) = 2\,HI\,\mathrm{cotan}(\frac{\theta}{2})$$

$$= 2\sqrt{\boldsymbol{IT}^2 - HI^2} \;= 2\sqrt{OT^2 - OH^2} \;= 2\sqrt{OH \times HI} \;= 2\sqrt{2\times\mathbf{R}\times\mathbf{F} - \mathbf{F}^2}$$

d) calcul de la flèche : OM-OH = HM = F

$$= \mathbf{R}\,(\,1 - \cos(\frac{\theta}{2})\,) = \mathbf{R}\,(1 - \sin(\frac{\alpha}{2})\,) = \mathbf{R} - \sqrt{\mathbf{R}^2 - \mathbf{C}^2/4}$$

40

e) longueur de l'arc $\overset{\frown}{TMT'} = \dfrac{\pi\, R\, \theta}{180°}$

f) aire du secteur circulaire $OTMT' = \dfrac{\pi\, R^2 \theta}{360°}$



g) aire du segment circulaire $TMT' = \dfrac{\pi\, R^2 \theta}{360°} - \dfrac{R^2 \sin(\theta)}{2}$



h) aire de la pointe $ITMT' = IT \times R - \dfrac{\pi\, R^2 \theta}{360°}$

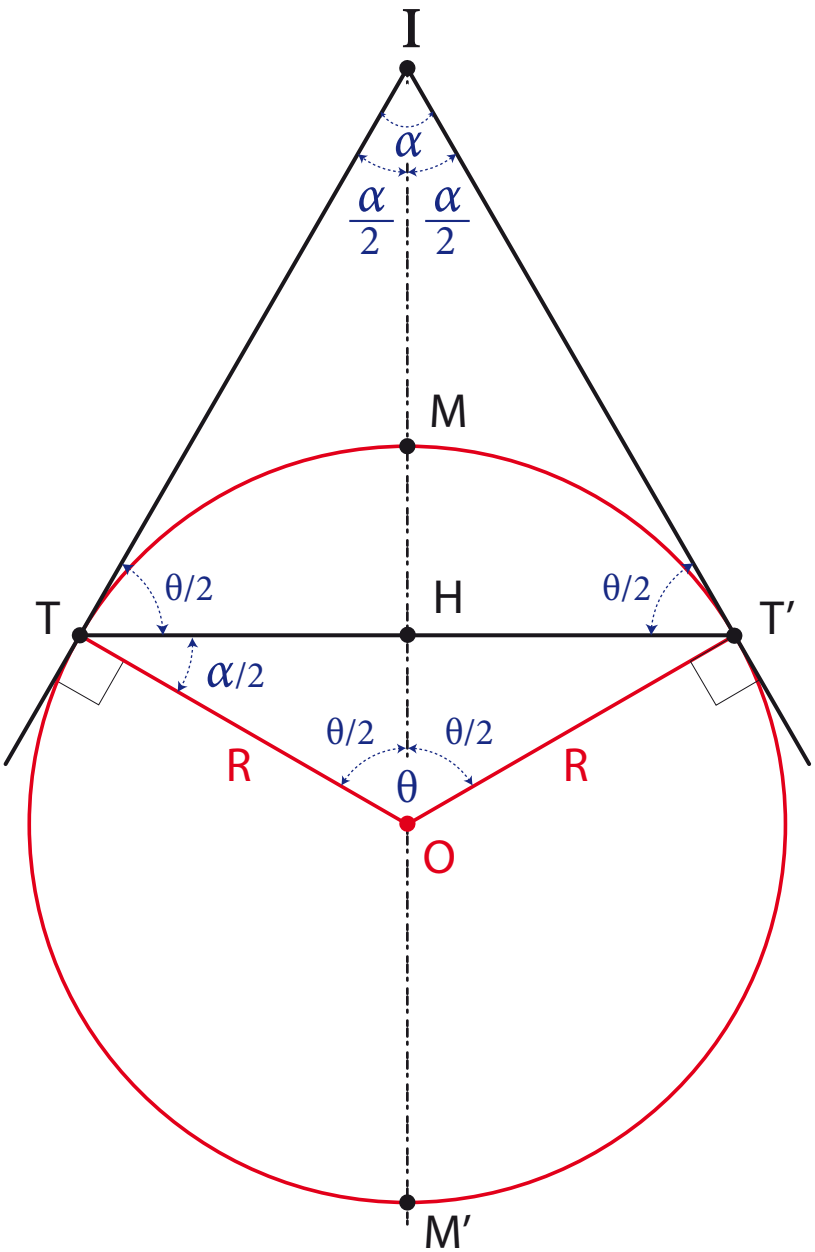


i) angle $\theta = 2 \arcsin\left(\dfrac{C}{2R}\right)$

Dans cet exemple

$\alpha = 60°$ $\theta = 120°$

R	50
IT= IT'	86,60254
OI	100
HI	75
TH	43,30127
OT	50
IM	50
IM'	150
OH	25
TT'=**C**	86,60254
F	25
lg arc TMT'	104,720
aire OTMT'	2617,994
aire TMT'	1892,230
aire ITMT'	1712,133



41

Constantes

```
maxLissage=   500                  nombre maximum de points de la polyligne
Phi =         0.552284749831575    cest la valeur de φ d'un arc de cercle simulé de rayon 1 , son angle au centre = 90°
radian =      0.01745329251994329577  cest la valeur de de 1° en radian
cPi =         3.14159265358979323846
c0 =          0.00000000000000000001  utile pour éviter des divisions par 0
infinity =    9938196601125010515179  simule une infinitée
Epsmach =     2E-16                pour les calculs matriciels
```

Type Tableaux

```
coordM =       Array[1..maxLissage] Of Double   coordonnées des points M (x, y, et/ou z)
coordP =       Array[1..maxLissage] Of Double   coordonnées des points P (x, y, et/ou z)
pointBezier =  Array[0..3,0..3]     Of Double   points de définition des courbes de Bézier B3
B3trace =      Array[0..3,0..3]     Of Longint  nécessaire au tracage des courbes
PointInfo =    Array[1..100]        Of Integer  généré par DetInflex
```

```
Mat  = Array[1..maxlissage,1..maxlissage] of double
Mat1 = Array[1..maxlissage] of double
VECT = ARRAY[1..maxlissage] of double          utilisés pour les calculs matriciels
```

Variables globales

```
t,t1,t2          : double    paramètres 't' des équations paramètriques
A0,A3,D0,D3      : Double    respectivement angles orientés de P0P1 P3P2 α0 , α3 et les normes P0P1 P3P2 φ0 et φ3
xB3,yB3          : Double    coordonnées d'un point de paramètre t d'une B3 : généré par B3coord
typ              : Integer   renseigne le type de courbe de bézier (1 à 5) procédure B3type
Psta01           : Integer   renseigne si la B3 a 0 1 ou 2 points stationnaires ou de croisement sur ]0 1[   B3type Génère Psta01
a2v              : coordM    tableau des angles entre 2 vecteurs construit par Angle2v
nbINF,nbDIS      : integer   nombre d'inflexions et/ou de discontinuitées d'une polyligne (Angle2v)
INFat,DISat      : Pointinfo situe les points d'inflexions ou de discontinuités d'une polyligne (Angle2v)
NBsol,sol1,sol2,sol3  : double  nombre de solutions et solutions déterminés par Solve2 et Solve3
Xint,Yint             : double  résultat de l'intersection de 2 droites généré par Inter2D
RDC,xRC,yRC           : double  rayon de courbure et coordonnées de son centre relatif au point M(t) , généré par B3rdc
xNB,yNB,xNBr,yNBr     : coordM  coordonnées déterminées par Newbase et NewbaseReci
B3clotho      : pointbezier  résultat de  ClothoB3
B3pro         : pointBezier  résultat de  B3prolonge
B3prosub      : pointBezier  résultat de  B3prosubAB
B3fus         : pointBezier  résultat de  B3fusion
B3a,B3b       : pointBezier  résultat de  B3subdivise
AireA,AireB,AireC   : double
Ba,Bb,Bc            : pointBezier  générés par B3aire
NBaire              : integer
xC,yC,xI,yI,rayon,corde,fleche,angleOcentre,AOCvrai  : Double
AireSecteur,aireSegment,airePointe,longArc           : Double   dans procédure Arcinfo
testColin           : integer      test de colinéarité généré par Arc2B3 si 0 pas de colinéarité , si 1 oui
Arc1,Arc2,Arc3,Arc4 : pointbezier  généré par Arc2B3
NBarc               : integer      nombres d'arcs générés par Arc2B3
B3arc90             : pointbezier  arc de cercle simulé, son angle au centre est <= 91° résultat de Arc0_90
c1,c2,c3,c4         : pointbezier  génère un cercle unité par 4 B3 grace à CercleUnite
cc1,cc2,cc3,cc4     : pointbezier  construit un cercle ou une ellipse par  CercleB3
XCreg,YCreg,EQMregcirc,statRC,Radreg,Rmin,Rmax : double  résultats de RegCirc
B3poly,B3param      : pointbezier
EQMpoly,statPoly    : Double       générés par RegPoly et ParamB3
B3liss, B3free, B3fitted,B3preced : pointbezier
EQMliss,statLiss                  : double     résultats des procédures de lissage
EQMfree,statFree                  : double
NBliss                            : integer = 0 IMPORTANT nécessaire pour un lissage multiple
B3pass,B2pass,B1pass : mat   matrices de passage
Matprod,MatprodAB    : mat   produit de matrices
Matsom,Transmat      : mat   somme et transposée d'une matrice
MATinv,MatX          : mat   inverse d'une matrice et solution d'un système linéaire de matrices : AX = B
DET                  : double  déterminant d'une matrice
coef,coef_1          : mat1  coefficients d'un polynôme
```

function **Fact**(*N*:integer):longint *factorielle*

function **Tan**(*alpha*:double):double *tangente d'un angle en radian*

function **Atan1**(*x1,y1,x2,y2*:double):double *Angle simple entre 2 points (en radian)*

function **Atan2**(*x1,y1,x2,y2*:double):double *angle orienté 1 vers 2 (1er et 2ème quadrant positif, 3ème et 4ème négatif)*

function **Atan4**(*x1,y1,x2,y2*:double):double *angle orienté 1 vers 2* **toujour positif**

function **Norme**(*x1,y1,x2,y2*:double):double *norme, distance entre 2 points*

function **Cuberoot**(*Num*:double):double *racine cubique d'un nombre*

function **Sgn**(*X*:double):double *signe d'un nombre* **1** *il est positif* **-1** *négatif*

function **PolyEval**(*X*:double;*coef3*:mat1;*deg*:integer):double *f(x) d'un polynôme*

NB le sens de `coef3` *doit être par exemple :* 1 +1x +3x² +2x³ `deg` *est le degré du polynôme*

function **MoyPond**(*X,poidX*:coordM;*deb,fin*:integer):double *moyenne pondérée*

X est un tableau de nombres, `poidX` *les poids respectifs de ces nombres.*
`deb,fin` *permet de calculer cette moyenne sur une partie de ce tableau.*

function **moyenne**(*X*:coordM;;*deb,fin*:integer;*op*:integer):double *4 moyennes possibles*

si `op` = 1 *moyenne simple, si* 2 *géométrique, si* 3 *harmonique, si* 4 *quadratique*

function **EQM**(*Ecart*:coordM;*deb,fin*:integer):double *Ecart Quadratique Moyen utile aux processus de lissages.*

function **AirePolygon**(*xM,Ym*:coordM;*N*:integer):double *calcule la valeur absolue de l'aire d'un polygone*

function **Nettoie**(*Ligne*:string):string *nettoie* `Ligne` *en vue d'extraire les X Y d'une polyligne , voire Z ou les valeurs d'une matrice.*

NB la ligne doit contenir : des espaces et/ou tabulations, des ' `.` *' et/ou '* `,` *' et des chiffres.*
IMPORTANT : un CR est obligatoire sur toutes les fin de lignes du fichier. txt contenant les données à extraire (en particulier la dernière).
La procédure **lirePoint** *située dans le/les progammes 'Main' construit les tableaux :* `xP,yP` *et/ou* `zP` `nbl` *est le nombre de points.*
similairement **LireMat** *construit* `MatP` *, le nombre de lignes et de colonnes seront disponibles dans* `ML,MC`:integer
NB la/les lignes , d'éventuels commentaires, doivent être précédées du caractère '%' ; **LireB3** *lit les pts. de définition d'une* B_3 *et t construit* `B3point`

procedure **Angle2v**(*xM,Ym*:coordM;*N*:integer) *construit le tableau* `a2v`*, de taille* `N`-2 *contenant les angles entre 2 vecteurs*

procedure **DetInflex**(*xM,Ym*:coordM;*N,aff*:integer) *détecte les points d'inflexions et de discontinuités par rapport à* `a2v`
le nombres de points d'inflexions et de discontinuités sont dans `nbINF,nbDIS`
leur position dans la polyligne est dans `INFat,DISat` *si* `aff` > 0 *les datas de précision* `aff` *seront affichés sur la console DOS*

procedure **Solve2**(*a,b,c*:longint) *résoud une équation du second degré et renseigne* `NBsol,sol1,sol2`

procedure **Solve3**(*a,b,c,d*:longint) *résoud une équation du 3ème degré et renseigne* `NBsol,sol1,sol2,sol3`

function **t_unique**(*tk*:double):double *compare* t_k *avec* `sol1,sol2,sol3` *(*t_k *est un paramètre* `t` *estimé)*
renvoie, si elle existe, la solution unique inclue dans [0 1] *. Si plusieurs solutions dans* [0 1] *la plus rapprochée de* t_k *sera choisie.*
Si pas de solutions dans [0 1] *la fonction retournera la valeur* t_k

procedure **inter2D**(*xA,xA,tgtA,xB,yB,tgtB*:double) *intersection de 2 droites par la méthode de Delambre (modifiée)*
`tgtA` *et* `tgtB` *sont les tangentes des angles dirigés vers le point d'intersection. Résultat dans* `Xint,Yint`

function **Alphadef**(*x1,y1,x2,y2,x3,y3*:double):double
renvoie l'angle orienté de la tangente au cercle passant par 3 pts au point x1 y1

procedure **NewBase**(*xM,Ym*:coordM;*N*:integer;*alpha,Xom,Yom,dx,dy,echelle*:double)
changement de base des coordonnées xM,yM
`alpha` *= angle de rotation ,* `Xom,Yom` *= centre de rotation,* `dx,dy` *= déplacement ,* `echelle` *= mise à l'echelle , résultats dans* `xNB,yNB`

procedure **NewBreci**(*xM,Ym*:coordM;*N*:integer;*alpha,Xom,Yom,dx,dy,echelle*:double)
réciproque du changement de base, résultats dans `xNBr,yNBr`

procedure **CercleUnite** *définis un cercle unité par 4 B3* `c1,c2,c3,c4` *(sens trigonométrique)*
son centre est en x=0, y=0 et commence au point x=1 y=0

procedure **CercleB3**(*xC,yC,Rad,echX,echY,rotation*:double) *construit un cercle ou un ellipse par 4 B3*
`xC,yC` *= centre du cercle ,* `Rad` *son rayon,* `echx,echY` *échelles , angle de* `rotation` *(*`0` *si cercle)*
tous les calculs se font par rapport au centre du cercle/ellipse. Résultat dans `cc1,cc2,cc3,cc4`

function **AOC**(*x1,y1,x2,y2,x3,y3*:double):double *calcule l'angle au centre* **vrai** *d'un arc passant par un triplet (il peut* ∈]0 360°] ou]0 -360°] *)*

procedure **Arc0_90**(*x1,y1,x2,y2,x3,y3*:double) *simule un arc de cercle passant par le triplet . l' AOC maximum est de 91°, la courbe B3arc90 est générée*

procedure **Arc2B3**(*xx1,yy1,xx2,yy2,xx3,yy3*:double) *définis un arc de cercle passant par le triplet |AOC|* ∈]0 360°])
le nombre d'arcs nécessaires est renseigné par NBarc *les B3 générées sont :* Arc1,Arc2,Arc3,Arc4

function **ARClong**(*x1,y1,x2,y2,x3,y3*:double):double *renvoie la longueur d'un arc passant par 3 points*
utilisé par **B3long , clothoAmoyen** *NB : l'angle au centre vrai doit* ∈]0 180[

procedure **Arcinfo**(*x1,y1,x2,y2,x3,y3*:double) *calcule divers éléments d'un arc de cercle passant par 3 points*
centre du cercle : xC,yC *intersection des tangentes :* *xI,yI,rayon,corde,fleche , angleOcentre* ∈]0 180[
AOCvrai , aireSecteur, aireSegment, airePointe, longArc

procedure **B3coord**(*B3def*:pointBezier;*t*:double) *coordonnées d'un point M(t) :* xB3,yB3 *de la courbe B3def*

procedure **B3write**(*B3def*:pointBezier;*aff*:integer) *si aff* >0 *les données de précision aff sont affichées sur la console DOS*
*Calcule les points de définitions d'une B3 ainsi que ses angles (**en degré**)* α_0 ,α_3 *dans* A0,A3 *et ses distances* φ_0 ,φ_3 *dans D0,D3*

procedure **B3type**(*B3def*:pointBezier;*aff*:integer) *détermine le type de la B3 dans Typ et Psta01 = nb de Pts sta. sur* [0 1]
1 *=> 1 point d'inflex,* 2 *=> 2 points d'inflex,* 3 *=> 1 point de rebroussement,* 4 *=> 1 point de croisement,* 5 *=> une parabole,* 0 *=>une droite*
si aff >0 *affiche les coordonnées de ces points stationnaires ainsi que leur paramètres t1 , t2*

function **B3long**(*B3def*:pointBezier):double *longueur (abscisse curviligne) d'une B3 sur* [0 1]

function **B3rdc**(*B3def*:pointBezier;*t*:double):double *rayon de courbure d'une B3 en un point M(t)*
calcule aussi les coordonnées du centre de courbure xRC,yRC et CCtest
Si CCtest = -1 *cela veut dire que la courbe est concave en ce point , sinon convexe*

procedure **ClothoB3**(*angledep,xdep,ydep,xfin,yfin,xcercle,ycercle*:double;*sens*:integer)
simule un arc de clothoïde par une B3, la courbe B3clo est générée.
xdep,ydep,angledep = *coordonnées et angle de l'axe routier au départ de la clotho*
xfin,yfin = *coord. du début de la partie circulaire à raccorder.* *xcercle,ycercle=* *coordonnées du centre du cercle*
si sens *=1 alors la clotho entre dans un secteur circulaire* ***sinon elle en sort***

function **ClothoAmoyen**(*B3def*:pointBezier):double *renvoie le paramètre A moyen d'une clothoïde simulée*

procedure **B3fusion**(*B1,B2*:pointBezier;*option*:integer) *fusionne 2 courbes liées dans B3fus*
si option=1 B3fus passera par le point de contact sinon elle n'y passera peut-être pas.

procedure **B3sudivise**(*B3def*:pointBezier;*tsub*:double) *subdivise une B3 en 2 parties en M(tsub) => B3a B3b*

procedure **B3prolonge**(*B3def*:pointBezier;*t*:double) *prolonge une B3 jusqu'à un point M(t) :* *t* <0 ou >1 *=> B3pro*

procedure **B3proSubAB**(*B3ini*:pointBezier;*tA,tB*:double) *extrait une partie de la B3, sens =* *tA vers tB => B3prosub*

function **B3aireSimple**(*B3def*:pointBezier):double *aire simple d'une B3 sur* [0 1]
NB il ne doit pas avoir de points stationnaires ou de croisements sur]0 1[

function **B3aireAB**(*B3def*:pointBezier;*tA,tB*:double):double *aire sur* [*tA tB*]
NB il ne doit pas avoir de points stationnaires ou de croisements sur]*tA tB*[

procedure **B3aire**(*B3def*:pointBezier;*aff*:integer):double *prend en compte les points stationnaires ou de croisements sur*]0 1[
le nombre d'aires est renseigné par NBaire , les aires et B3 générées sont : *aireA,aireB,aireC et Ba,Bb,Bc*

function **DistoB3**(*B3def*:pointBezier;*xM,yM,testim*:double):double *distance minimum d'un point M à une B3*
le paramètre estimé *testim* *est nécessaire pour optimiser la dichotomie*
Si la distance est négative cela veut dire que le point M est à l'intérieur de la courbe.

44

procedure **Lissage**(*xM,yM*:coordM;*N*:integer;*A0,A3*:double) *lisse, ajuste les points M par : B3fitted*
les angles A0,A3 sont fixes, N est le nombre de points à lisser
Méthode BELHARRA (crée par Alexandre Christophe GLON le 19-09-2019)

procedure **MasterLiss**(*xM,yM*:coordM;*deb,fin*:integer;*Alpha0,Alpha3*:double) *Lisse les points M et génere B3liss*
Grace à deb,fin elle lisse qu'une partie de la polyligne . Très utile si on veut effectuer un lissage multiple, successif .
Si la valeur de l'angle Alpha0 et/ou Alpha3 est >=100 cela voudra dire que A0 et/ou A3 sont libres et peuvent varier.
Dans le cas contraire le/les angles sont fixes, aucune variation ne sera appliquée sur les angles concernés.
NB: ces angles (en radian) doivent être orientés , par précaution j'ai fait en sorte qu'ils soient tous positifs.
La précision du lissage est renseignée par statLiss = EQMliss Statistiquement c'est l' Ecart Quadratique Moyen = EQM ou MSE
Cette procédure est adaptée pour une suite continue de points M sans points doubles ou stationnaires.
IMPORTANT sauf cas extrêmes B3liss n'aura pas de points stationnaires ou doubles sur]0 1[

procedure **MasterLissFree**(*xM,yM*:coordM;*deb,fin*:integer) *Lisse les points M par B3free (méthode plus lente)*
Elle ausculte la polyligne en variant les distances D0 et D3 et les angles A0, A3 sur 180°.
Elle permet de lisser des progressions bizarres etc.. mais le résultat est parfois incohérent, imprécis.
La précision du lissage (EQM) est renseignée par statFree = EQMfree

procedure **RegCirc**(*xM,yM*:coordM;*N*:integer) *Lisse la polyligne par une Régression Circulaire (méthode des moindres carrés)*
XCreg,YCreg,Radreg,Rmin,Rmax, statRC = EQMregCirc , sont les résultats de cette régression .

procedure **RegPoly**(*xx,yy*:coordM;*deb,fin,DEG,op*:integer) *Lisse par Régression Polynômiale (méthode des moindres carrés)*
deb,fin permet de selectionner une partie des points . DEG est le degré du polynome recherché.
si op = 1 une chagement de repère est effectué dans xx,yy faisant en sorte que le 1er point soit aligné horizontalement avec le dernier.
Les coef. du polynôme sont générés dans le tableau coef, leurs sens est par exemple : $1 +1x +3x^2 +2x^3$ *(coef_1 est en sens inverse)*
Enfin cette procédure paramètise la fonction si son degré =3 ou 2 => B3Param EQM = statPoly = EQMpoly

procedure **ParamB3**(*coefpoly*:Mat1;*Xdeb,Xfin*:double) *Paramètrise une fonction de degré* **3** *ou 2 ou 1 sur l'intervalle* [*Xdeb Xfin*]
coefpoly doit être dans le sens $1 +1x +3x^2 +2x^3$ *. La courbe B3Param est générée.*
NB : la paramètrisation d'une fonction de 2ème ou 1er degré est possible en construisant coefpoly comme par exemple : $3 -5x +2x^2 +c0x^3$ / $3 -5x +c0x^2 +c0x^3$

procedure **Interpolation**(*xM,yM*:coordM;*N*:integer) *interpolation de points par la méthode de Vandermonde.*
Le résultat est généré dans coef et coef_1

procedure **MatPass** *active les matrices de passages B3pass , B2pass et B1pass*

function **DetMat**(*A*:mat;*N*:integer) *renvoie le déterminant d'une matrice carrée A sa taile est NxN*

procedure **MATsomme**(*A,B*:mat;*N,k*:integer) *Somme de 2 matrices carrées, résultat dans Matsom si k=1 => A+B si K=-1 => A-B*

procedure **MATmul**(*A,B*:mat;*N*:integer) *Multiplication de 2 matrices carrées, résultat dans Matprod*

procedure **MATmulAB**(*A*:mat;*L1,C1*:integer;*B*:mat;*L2,C2*:integer;) *AxB résultat = MatprodAB de taille L1 C2*
L1,C1 est le nombre de Lignes et de Colonnes de la matrice A , pour B c'est L2,C2 IMPORTANT L2 doit etre égal à C1

procedure **Transpose**(*A*:mat;*L1,C1*:integer) *Transpose la matrice A de taille L1,C1, résultat = Transmat de taille C1,L1*

procedure **InvMat**(*AA,BB*:mat;*N,M*:integer) *résoud un système linéaire de matrices :* **AX = B** *par la méthode de Gauss-Jordan*
NxN est la taille de la matrice AA, celle de BB peut être NxM si M=1 => résolution d'un système linéaire «simple» .
Si M≠0 la procédure calcule le résultat X dans MatX *et le déterminant de AA dans DET*
Si M=0 l'inverse de la matrice AA est calculé dans MatInv ainsi que DET *de AA . Lancer la procédure comme ceci :* **InvMat**(*AA,AA,N,0*)

procedure **Affmat**(*A*:mat;*L1,C1*:integer) *Affiche la matrice A de taille L1,C1, sur la console DOS*

procedure **TraceB3**(*B3*:pointBezier;*Aff*:integer) *Trace une B3 si Aff=* 1 *trace les normes P0P1 et P3P2 , si* 2 *trace aussi 'P0' P1' P2' P3'*

procedure **TraceB3M**(*B3*:pointBezier;*Mx,My*:coordM;*N,aff*:integer) *Trace la B3 et les point M si Aff=* 1 *trace aussi P0P1 et P3P2*

procedure **TraceB**(*B3bis*:B3trace;*DXgr,DYgr,aff*:longint) *Nécessaire à* **Trace_4B3** *et* **Trace_4B3M**

procedure **Trace_4B3**(*Ba,Bb,Bc,Bd*:pointBezier;*aff*:integer) *Trace 4 B3 si aff=1 trace les points de contacts entre les courbes*
si aff=2 trace aussi les normes P0P1 P3P2

procedure **Trace_4B3M**(*Ba,Bb,Bc,Bd*:pointBezier;*Mx,My*:coordM;*N,aff*:integer) *Trace 4 B3 et les points M*
si aff=1 trace les points de contacts entre les courbes si aff=2 trace aussi les normes P0P1 P3P2

procedure **TraceB3etCercle**(*B3*:pointBezier;*xC,yC,Radius*:double;*sens,Aff*:integer) *trace une clothoïde et son cercle*

procedure **TraceRegCirc**(*xC,yC,Radius*:double;*Mx,My*:coordM; *N*:integer) *trace une regression circulaire*

NB : les traçages ne tiennent pas compte des décimales