**Exercice 1.**

*Soit* $A$ et $B$ et $C$ *des parties d'un ensemble* $E$.
*Montrer que :*

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $(A \cup B) \cap \overline{(A \cup C)} = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$
4. $C_E^{(A\cap B)} = C_E^A \cap C_E^B$
5. $(A\cup B \subset A\cup C) et (A\cap B \subset A\cap C) \Rightarrow B \subset C$

---

**Exercice 2.**

*Déterminer* $A$ et $B$ *sachant :*
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$
$A \cap B = \{1; 2\}$
$A - B = \{5\}$

---

**Exercice 3.**

*On considère la fonction affine* $f$ *telle que :* $f(x) = -2x + 3$
*On Considère :*
$A = \{x \in \mathbb{R} : \quad -2 < f(x) \leq 3\}$
$B = \{y \in \mathbb{R} : \quad y = f(x) \text{ et } x \in [-3; 2[\}$
*Déterminer :*
$A \cup B$ ; $A \cap B$ ; $A - B$ ; $A \cap \mathbb{N}$ ; $B \cap \mathbb{Z}$.

---

**Exercice 4.**

*On pose :*
$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x + y = 0\}$
$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$

1. *Montrer que* $A \subset B$.
2. *Déterminer* $y$ *d* $\mathbb{R}$ *telle que* $(1; y) \in B$
   *Est-ce-que* $B \subset A$ ?
3. *Montrer que* $B = A \cup C$ *tel que* $C$ *une partie que l'on déterminera.*
4. *On considère les ensembles :*
   $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y^2 - 2xy + 2x - 2y = 0\}$
   $F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}\}$
   $G = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}\}$
   a. *Montrer que* $E = F \cup G$
   b. *Déterminer* $E \cap A$.

---

**Exercice 5.**

1. *Déterminer l'ensemble :*
   $E = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} : \quad x^2 + 2xy + y^4 = 0\}$
2. *En donnant un contre exemple, montrer que l'implication suivante est fausse :*
   $C \subset A \cup B \Rightarrow (C \subset A \text{ ou } C \subset B)$
3. *Soit* $E$ et $F$ *deux ensembles. Montrer que :*
   $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$
4. *Soit* $A$ et $B$ et $C$ *trois parties d'un ensemble* $E$. *Montrer que :*
   $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$

---

**Exercice 6.**

*Soit* $a$ et $b$ *deux réels distincts .On pose :*
$E = \{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 + 2bx + a = 0\}$
$F = \{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 + 2ax + b = 0\}$
.

1. *Soit* $x$ *un élément de* $\mathbb{R}$
   *Montrer que :* $x \in E \cap F \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$
2. *Montrer que :* $E \cap F \neq \Phi \Rightarrow a + b = \dfrac{-1}{4}$
3. *Montrer que :* $E \cap F = \Phi \Leftrightarrow a + b \neq \dfrac{-1}{4}$

---

**Exercice 7.**

*Soit* $f : I \mapsto J$ *une application définie par :*

$$f(x) = x^2$$

1. *Donner deux ensembles* $I$ *et* $J$ *tel que* $f$ *soit injective et non surjective.*
2. *Donner deux ensembles* $I$ *et* $J$ *tel que* $f$ *soit surjective et non injective.*
3. *Donner deux ensembles* $I$ *et* $J$ *tel que* $f$ *soit ni surjective ni injective.*
4. *Donner deux ensembles* $I$ *et* $J$ *tel que* $f$ *soit bijective.*

**Exercice 8.** *Déterminer (en justifiant) si l'application* $f$ *est; injective, surjective ou bijective dans chacune des cas suivants :*

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + x^3 \end{array}$$

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad f : \begin{array}{rcl} [0;1] & \rightarrow & [0;2] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

**Exercice 9.**

*Soit l'application :*

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 4x + 1 \end{array}$$

1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $f(x) = 0$
   *Est ce que* $f$ *est injective ?*
2. *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad f(x) \geq -3$
   *Est que* $f$ *est surjective ?*

**Exercice 10.**

*Soit l'application définie par :*

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+9}{x^2+1} \end{array}$$

1. *Déterminer :* $f^{-1}(\{1\})$
2. *Est ce que* $f$ *est bijective ?*

**Exercice 11.**

*On considère l'application :*

$$f : \begin{array}{rcl} [-1;+\infty[ & \mapsto & [-1;+\infty[ \\ x & \mapsto & x^2 + 2x \end{array}$$

1. *Montrer que* $f$ *est injective.*
2. *Déterminer l'image réciproque de l'intervalle* $[3;+\infty[$ *par l'application* $f$ *.*
3. *Montrer que* $f$ *est une bijection et déterminer sa bijection réciproque* $f^{-1}(x)$ *pour tout* $x$ *de* $[-1;+\infty[$ *.*

**Exercice 12.**

1. *Montrer que :*

$$\forall x \in [0;+\infty[: \qquad -1 \leq \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \leq 1 \; .$$

2. *Soit l'application :*

$$f : \begin{array}{rcl} [0;+\infty[ & \rightarrow & [-1;1] \\ x & \mapsto & \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \end{array}$$

   *Montrer que* $f$ *est une bijection et déterminer sa bijection réciproque* $f^{-1}$ *.*

**Exercice 13.**

*On considère l'application définie par :*

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^2 & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (m;n) & \mapsto & 2^m(2n+1) \end{array}$$

*Montrer que* $f$ *est injective.*

**Exercice 14.**

1. *Soit* $f$ *et* $g$ *deux applications définies par :*

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^2 & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (n;m) & \mapsto & mn \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}^2 \\ n & \mapsto & (n;(n+1)^2) \end{array}$$

   *Est-ce-que* $f$ *et* $g$ *injectives ? surjectives ? bijectives ?*
2. *Soient* $f$ *et* $g$ *définies par :*

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & E\left(\dfrac{n}{2}\right) \end{array}$$

   *(*$E$ *est la partie entière )*
   *Est-ce-que* $f$ *et* $g$ *injectives ? surjectives ? bijectives ?*
   *Déterminer* $fog$ *et* $gof$
   *Que remarquez-vous ?*

**Exercice 15.**

*On considère l'application* $h$ *définie par :*

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & [0;1[ \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{x+1} \end{array}$$

1. *Montrer que $h$ est une bijection et déterminer sa réciproque $h^{-1}$ .*
2. *Soit $n$ de $\mathbb{N}-\{0;1\}$*
   *On pose :* $h^{(n)}=hoho\dots oh$ *( $n$ fois).*
   *Avec* $h^{(1)}=h(x)$
   *Déterminer* $h^{(2)}(x)$ ; $h^{(3)}(x)$
3. *Conjecturer l'expression $h^{(n)}(x)$ et démontrer la conjecture.*

---

## Exercice 16.

*Soient $f$ et $g$ deux applications telles que :*

$f:E\to F \qquad g:F\to G$

1. *Montrer que si $f$ et $g$ Sont injectives alors $gof$ est injective .*
2. *Montrer que si $f$ et $g$ Sont surjectives alors $gof$ est surjective .*
3. *Que peut-on déduire pour $gof$ si $f$ et $g$ sont bijectives ?*
4. *Montrer que si $gof$ est injective alors $f$ injective.*
5. *Montrer que si $gof$ est surjective alors $f$ surjective.*
6. *Que peut-on déduire dans les cas suivants ?*
   $gof=Id_E$
   $gof=Id_F$
   $fof=Id_E$

---

## Exercice 17.

*Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{0;1\}$ telle que :*
$\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;2\}$

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$$

1. *Montrer que :*
   $$\forall t\in\mathbb{R}-\{0;1\} \qquad f(t)+2f(\frac{1}{t})=\frac{2t+1}{t-1}$$
2. *Déduire l'expression de $f(t)$ en fonction de $t$ .*

---

## Exercice 18.

*Soit $A$ une partie d'un ensemble $E$ .*
*On considère l'application :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ & X & \mapsto & A\cap X \end{array}$$

1. *Déterminer :* $f(\overline{A})$ ; $f(A)$ ; $f(E)$
2. *Est-ce-que $f$ est une bijection ? (justifier).*

---

## Exercice 19.

*déterminer toutes les applications $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que :*

$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2):\quad f(xy)=f(x)f(y)-x-y$

---

## Exercice 20.

*Soit $f$ une application de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$ telle que :*
$\forall n\mathbb{N}^*:\quad f(f(n))=f(n+1)-f(n)$
*Montrer que :*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*:\quad f(n)\geq n$$

---

## Exercice 21.

*Soit $E$ et $F$ deux ensembles et $f$ une application de $E$ vers $F$ .*

1. *Montrer que pour toute partie $A$ de $E$ on a :*
   $$A\subset f^{-1}(f(A))$$
2. *Montrer que pour toutes parties $B$ de $F$ on a :*
   $$f\left(f^{-1}(B)\right)\subset B$$
3. *Montrer que $f$ est injective si et seulement si pour toutes partie $A$ de $E$ on a :*
   $$A=f^{-1}(f(A))$$
4. *Montrer que $f$ est surjective si et seulement pour toutes partie $B$ de $F$ on a :*
   $$f\left(f^{-1}(B)\right)=B$$

---

*Andrew John Wiles est un mathématicien britannique, professeur à l'université d'Oxford, en Angleterre. Il est célèbre pour avoir démontré Le grand théorème de Fermat en 1994. Ce problème avait résisté à la sagacité des mathématiciens pendant 350 ans.*