Chapitre 3 : Compléments sur la dérivation

I°) Dérivées des fonctions usuelles

$f(x) =$	$f'(x) =$	f **est définie et dérivable sur**
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(\mathrm{x})$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ou $]0; +\infty[$

Exemples : Dans chaque cas, déterminer $f'(x)$.

1°) $f(x) = x^7$; $f'(x) = 7x^6$

2°) $f(x) = x^{22}$; $f'(x) = 22x^{21}$

3°) $f(x) = \sin(x) + 2x^5$; $f'(x) = \cos(x) + 2 \times 5x^4 = \cos(x) + 10x^4$

4°) $f(x) = 3\cos(x) + \frac{5}{x}$; $f'(x) = 3 \times (-\sin(x)) + 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -3\sin(x) - \frac{5}{x^2}$

II°) Fonctions composées et dérivation

Dans tout ce paragraphe, a, b, A, ω, ϕ sont des nombres réels.

$f(x) =$	$f'(x) =$	f **est définie et dérivable sur**
$(ax+b)^n$	$n \times a \times (ax+b)^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$A\cos(\omega t + \phi)$	$-A \times \omega \times \sin(\omega t + \phi)$	$\mathbb{R}$
$A\sin(\omega t + \phi)$	$A \times \omega \times \cos(\omega t + \phi)$	$\mathbb{R}$

Exemples : Dans chaque cas, déterminer $f'(x)$.

1°) $f(x) = (3x+4)^7$; $f'(x) = 7 \times 3 \times (3x+4)^6 = 21(3x+4)^6$

2°) $f(x) = 2\cos(5x+1)$; $f'(x) = -2 \times 5 \times \sin(5x+1) = -10\sin(5x+1)$

3°) $f(x) = -3\sin(7x-8)$; $f'(x) = -3 \times 7 \times \cos(7x-8)$

III°) Opérations sur les fonctions

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I ; soit k un réel non nul ; soit n un entier naturel.

	fonction f	**Fonction dérivée f'**
Produit	$u \times v$	$u'v + uv'$
Inverse	$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
Quotient ($v \neq 0$ sur I)	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemples : Formule du produit

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle I donné :

1°) $f(x) = x^2 \times cos(x)$

$f(x)$ est du type $u \times v$ avec $u = x^2$ et $v = \cos(x)$. On a alors $u' = 2x$ et $v' = -\sin(x)$

$f'(x) = u' \times v + u \times v' = 2x \times \cos(x) + x^2 \times (-\sin(x)) = 2x \times \cos(x) - x^2 \times \sin(x)$.

Enfin $f'(x) = 2x \times \cos(x) - x^2 \times \sin(x)$.

2°) $f(x) = (2x + 3)(5x + 4)$

$f(x)$ est du type $u \times v$ avec $u = 2x + 3$ et $v = 5x + 4$. On a alors $u' = 2$ et $v' = 5$.

$f'(x) = u' \times v + u \times v' = 2 \times (5x + 4) + (2x + 3) \times 5 = 10x + 8 + 10x + 15 = 20x + 23$

Enfin $f'(x) = 20x + 23$

Exemples : Formule de l'inverse

1°) $f(x) = \frac{1}{3x+4}$ $f(x)$ est du type $\frac{1}{v}$ avec $v = 3x + 4$. On a alors $v' = 3$

$$f'(x) = -\frac{v'}{v^2} = -\frac{3}{(3x + 4)^2}$$

2°) $f(x) = \frac{1}{cos(x)}$ $f(x)$ est du type $\frac{1}{v}$ avec $v = \cos(x)$. On a alors $v' = -\sin(x)$

$$f'(x) = -\frac{v'}{v^2} = -\frac{-\sin(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2}$$

Exemples : Formule du quotient

1°) $f(x) = \frac{2x+3}{7x-1}$

$f(x)$ est du type $\frac{u}{v}$ avec $u = 2x + 3$ et $v = 7x - 1$. On a alors $u' = 2$ et $v' = 7$.

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2 \times (7x - 1) - (2x + 3) \times 7}{(7x - 1)^2} = \frac{(14x - 2) - (14x + 21)}{(7x - 1)^2} = \frac{14x - 2 - 14x - 21}{(7x - 1)^2}$$

Attention à l'erreur classique ! Lorsqu'on a un signe moins devant une parenthèse, on change tous les signes à l'intérieur de la parenthèse !

Enfin $f'(x) = -\frac{23}{(7x-1)^2}$

2°) $f(x) = \frac{x^2}{3x+6}$

$f(x)$ est du type $\frac{u}{v}$ avec $u = x^2$ et $v = 3x + 6$. On a alors $u' = 2x$ et $v' = 3$.

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2x \times (3x + 6) - x^2 \times 3}{(3x + 6)^2} = \frac{(6x^2 + 12x) - 3x^2}{(3x + 6)^2} = \frac{3x^2 + 12x}{(3x + 6)^2}$$

Enfin $f'(x) = \frac{3x^2+12x}{(3x+6)^2}$