Nombres entiers et arithmétique

Des rappels

Les entiers naturels

Définition 0.1 On appelle ensemble des entiers naturels, l'ensemble contenant tous les entiers positifs : $0, 1, 2, 3, etc....$ Cet ensemble est noté $\mathbb{N}$.

Les entiers relatifs

Définition 0.2 On appelle ensemble des entiers relatifs ou encore ensemble des entiers, l'ensemble contenant les entiers positifs et négatifs : $-2, -1, 0, 1, 2, etc....$ Cet ensemble est noté $\mathbb{Z}$.

Multiples et diviseurs

Définition 0.3 On appelle multiple d'un nombre a ($a \in \mathbb{Z}$), tout entier $b \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, a sera appelé un diviseur de b.

■ **Exemple 0.4** 15 est un multiple de 5.
5 est un diviseur de 15.
-8 est un multiple de 4.
4 est un diviseur de -8. ■

R 0 est multiple de tout nombre entier ($0 = 0 \times a$ pour tout entier a).
Tout entier relatif est divisible par 1 ($a = a \times 1$).

■ **Contre-exemple 0.5** 17 n'est pas un multiple de 2.

Propriété 0.6 La somme de deux multiples d'un entier a est toujours un multiple de a. Il en est de même pour la différence et le produit.

Démonstration. .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■

■ **Exemple 0.7** En décomposant 124 comme la somme $100+24$, montrer que 124 est un multiple de 4. ■

Propriété 0.8 Un nombre entier est divisible par :

- 2 si le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- 5 si le chiffre des unités est 0 ou 5.
- 10 si le chiffre des unités est 0.
- 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

■ **Exemple 0.9** 198 est-il divisible par 9 ?
2015 est-il divisible par 5 ?
215 est-il divisible par 3 ? ■

Exercice 0.10 Donner tous les diviseurs de 24. ■

Nombres pairs et nombres impairs

Définition 0.11 On appelle nombre pair un nombre qui est un multiple de 2 (on peut l'écrire $2\times k$ avec k entier). On nomme alors nombre impair un nombre qui n'est pas multiple de 2 (on peut l'écrire $2\times k+1$ avec k entier).

Propriété 0.12 La somme de deux nombres pairs est un nombre pair. La somme de deux nombres impairs est un nombre pair. La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Propriété 0.13 Le carré d'un nombre impair est un nombre impair. Le carré d'un nombre pair est un nombre pair

Démonstration. .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■

Exercice 0.14 Pour chacun des exemples suivants, déterminer sans faire le calcul si le résultat est pair ou impair :

- $37+149$
- $142+358$
- $987+658$
- 67^2
- 42^2

■

Les nombres premiers

Définition 0.15 On appelle nombre premier un nombre qui ne possède que deux diviseurs (1 et lui-même).

■ **Exemple 0.16** Les nombres premiers débutent par les nombres : 2, 3, 5, 7, 11 etc... ■

■ **Contre-exemple 0.17** 9 n'est pas un nombre premier car $9 = 3 \times 3$.

Propriété 0.18 Tout nombre entier naturel s'écrit comme un produit (unique à l'ordre des termes près) de nombres premiers.

■ **Exemple 0.19** La décomposition de 12 en produit de nombres premiers est $2 \times 2 \times 3$. ■

Exercice 0.20 Donner la décomposition en nombres premiers de 35, 63 et 100. ■

R Le crible d'Eratostène est un algorithme qui permet de connaître l'ensemble des nombres premiers plus petit qu'un certain seuil.
Par exemple, si on veut connaître tous les nombres premiers plus petit que 50, on crée un tableau contenant l'ensemble des nombres inférieurs à 50.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

- On barre le chiffre 1.
- On entoure le chiffre 2 et on barre tous les multiples de 2 présents dans le tableau.
- On entoure le prochain chiffre non barré est on raye tous ses multiples.
- On réitère l'opération jusqu'à ce que tous les nombres soient entourés ou barrés.

Ce procédé a été inventé par Eratosthène de Cyène (276-194 avant JC)