Chapitre 10

Loi normale

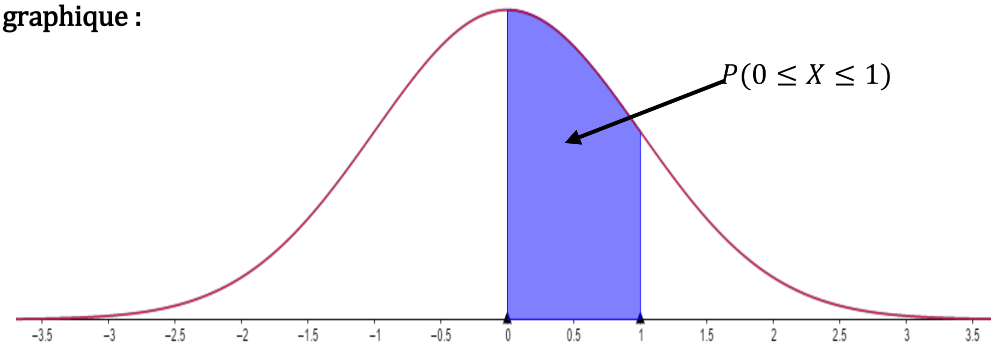
I - Loi normale

1°) Définition et propriétés

Définition : Soient μ et σ deux réel tel que $\lambda > 0$. Une variable aléatoire X suit la **loi normale de paramètres $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\sigma}$** si, pour tout intervalle $[c\,;d]$ inclus dans $\mathbb{R}$, $P(c \leq X \leq d)$ est l'aire du domaine délimité par :

- la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$ **(la formule n'est pas à connaitre)**
- l'axe des abscisses
- les droites d'équation $x = c$ et $x = d$.

Représentation graphique :



Propriété : Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\boldsymbol{N(\mu\,;\sigma)}$ alors les paramètres d'une loi normale sont son espérance et son écart-type : $\boldsymbol{E(X) = \mu}$ et $\boldsymbol{\sigma(X) = \sigma}$.

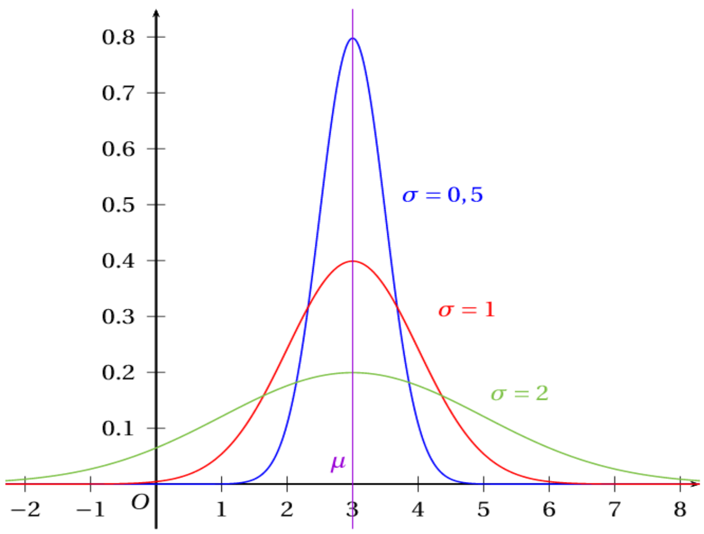
Remarques :

- Si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ on parle de loi normale centrée réduite.
- Les courbes des fonctions de densités associées à la loi normale sont dites « en cloche ».

Propriétés :

- **La courbe admet comme axe de symétrie la droite d'équation $\boldsymbol{x = \mu}$**
- **Plus σ est grand, plus la courbe « s'étale » autour de $\boldsymbol{\mu}$.**

Illustration :



Exemple : Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}6$.

1°) Faire un schéma de la fonction de densité.

2°) En utilisant la symétrie et sans utiliser la calculatrice :

a) Donner $P(X \leq 1)$

b) Donner $P(X \geq 1)$.

3°) Sachant que $P(1 \leq X \leq 1{,}6) = 0{,}34$ calculer :

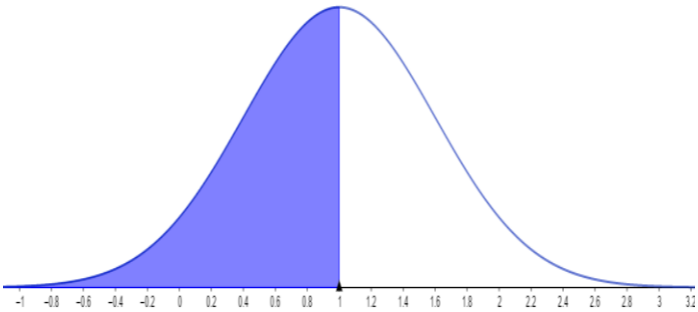
a) $P(0{,}4 \leq X \leq 1)$

b) $P(X \leq 1{,}6)$

c) $P(X \leq 0{,}4)$

1°) Rappelons que l'aire sous la courbe est égale à 1 u.a (fonction de densité)

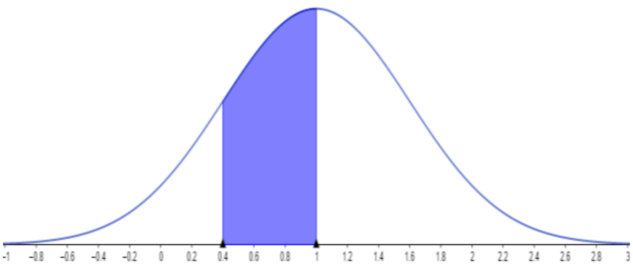
2°) a) A l'aide la symétrie de la courbe, on a $P(X \leq 1) = 0{,}5$ (moitié de la surface)

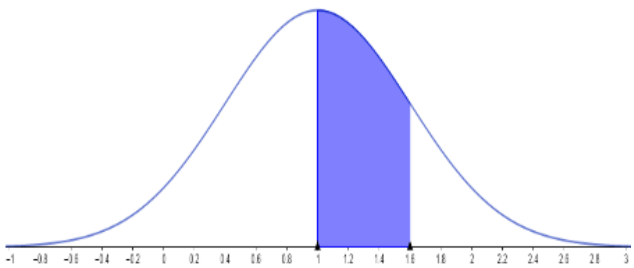


b) De la même manière $P(X \geq 1) = 0{,}5$ (c'est l'autre côté)

3°) a) Par symétrie de la courbe, on a :

$$P(0{,}4 \leq X \leq 1) = P(1 \leq X \leq 1{,}6) = 0{,}34$$





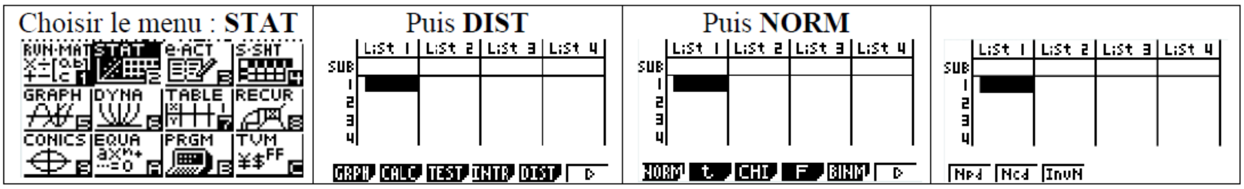
b) $P(X \leq 1{,}6) = P(X \leq 1) + P(1 \leq X \leq 1{,}5) = 0{,}5 + 0{,}34 = 0{,}84$ (faire le dessin si besoin)

c) Observons tout d'abord que $P(X \leq 0{,}4) + P(0{,}4 \leq X \leq 1) + P(X \geq 1) = 1$ (aire totale sous la courbe)

D'où : $P(X \leq 0{,}4) = 1 - P(0{,}4 \leq X \leq 1) - P(X \geq 1) = 1 - 0{,}34 - 0{,}5 = 0{,}16$

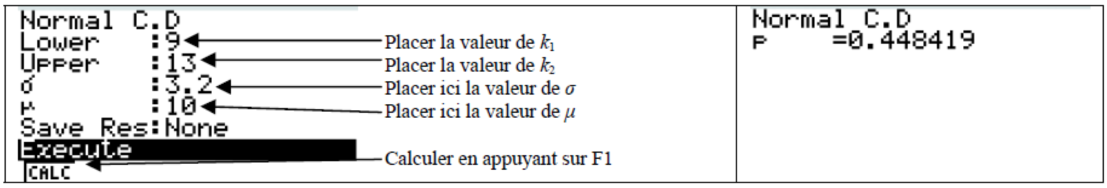
2°) *Utilisation de la calculatrice*

CASIO : Prenons ici une variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres $\mu = 10$ et $\sigma = 3{,}2$



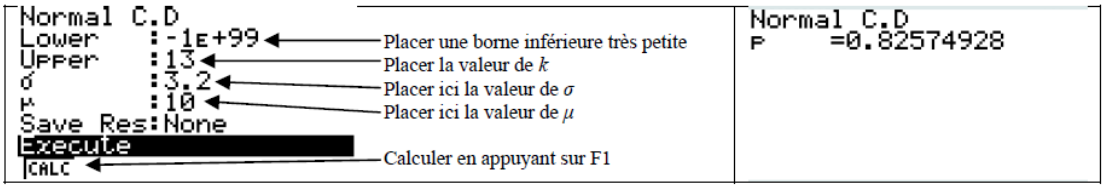
Calcul de $P(k_1 \leq X \leq k_2)$: choisir Ncd

Pour calculer $P(9 \leq X \leq 13)$



Calcul de $P(X \leq k)$: choisir Ncd

Pour calculer $P(X \leq 13)$



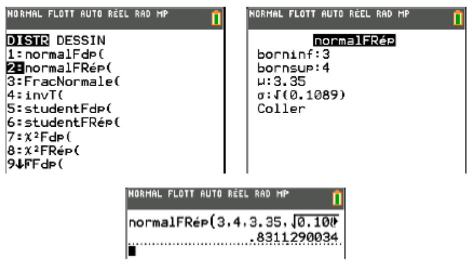
Remarque : Calculer $P(X \leq 13)$ revient à calculer $P(-\infty \leq X \leq 13)$ et comme on ne peut pas taper $-\infty$ sur la calculatrice on tape le nombre *Lower* : -10^{99} nombre négatif très grand.
De même, si on doit calculer $P(X \geq 13)$, on tapera *Upper :* 10^{99} (nombre très grand positif)

TI 83 : Prenons ici une variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres $\mu = 3{,}35$ et $\sigma = 0{,}1089$

Calcul de $P(3 \leq X \leq 4)$

Rubrique **distrib** (touches **2nde** **var**)

Sélectionner à l'aide des curseurs **2 : normalFRép(** et **entrer**.
Renseigner la boite de dialogue comme ci-contre puis valider avec la touche **entrer**. La séquence a été "collée" dans l'écran de calcul, valider à nouveau avec la touche **entrer**.

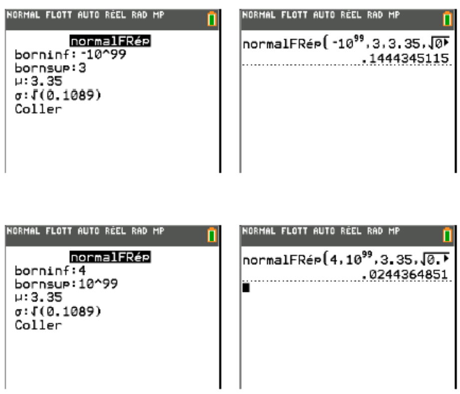


Calcul de $P(X \leq 3)$ *et* $P(X \geq 4)$

Pour calculer $P(X<3)$ on peut saisir comme borne inférieure une valeur très petite par exemple -10^{99}.

Utiliser l'instruction précédente **2 : normalFRép(** , renseigner la boite de dialogue comme ci-contre puis valider deux fois avec la touche **entrer**.
La probabilité qu'un bébé pèse à la naissance moins de 3 kg est 0,144.

Pour calculer $P(X > 4)$ on peut saisir comme borne supérieure une valeur très grande par exemple 10^{99}.
Utiliser l'instruction précédente **2 : normalFRép(** , renseigner la boite de dialogue comme ci-contre puis valider deux fois avec la touche **entrer**.



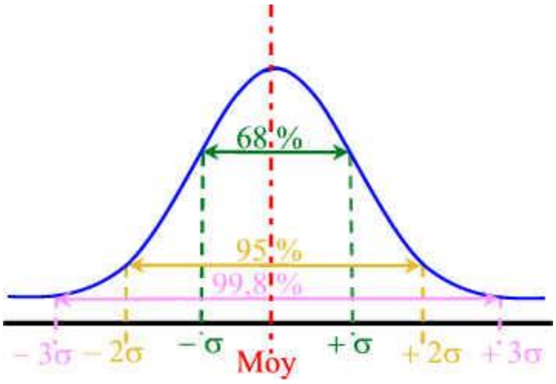
Remarque : Calculer $P(X \leq 3)$ revient à calculer $P(-\infty \leq X \leq 3)$ et comme on ne peut pas taper $-\infty$ sur la calculatrice on tape le nombre *borninf* : -10^{99} (nombre négatif très grand).
De même, si on doit calculer $P(X \geq 4)$, on tapera *bornsup:* 10^{99} (nombre très grand positif)

3°) Valeurs remarquables

Propriété : Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres μ et σ

Alors :

- $P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) \approx 0,68$
- $P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) \approx 0,95$
- $P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) \approx 0,997$

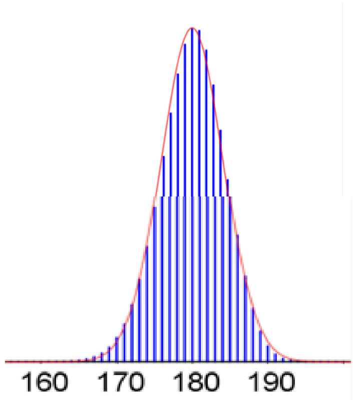


Exemple : Si X suit une loi normale de paramètres $\mu = 1,5$ et $\sigma = 0,2$ alors :

- $P(1,5-0,2 \le X \le 1,5+0,2) = P(1,3 \le X \le 1,7) \approx 0,68$
- $P(1,5-2\times 0,2 \le X \le 1,5+2\times 0,2) = P(1,1 \le X \le 1,9) \approx 0,95$
- $P(1,5-3\times 0,2 \le X \le 1,5+3\times 0,2) = P(0,9 \le X \le 2,2) \approx 0,997$

4°) Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Propriété : Lorsque $n \ge 30, np \ge 5$ et $n(1-p) \ge 5$,
la loi binomiale de paramètres n et p peut être approchée par la loi normale de paramètres $\mu = n \times p$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$



Exemple : Dans une usine, une machine remplit des bouteilles.
On note E l'événement "une bouteille prélevée au hasard est conforme au cahier des charges ". On suppose que P(E)= 0,9.
On prélève au hasard 200 bouteilles dans le stock pour vérification. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque prélèvement de 200 bouteilles, associe le nombre de bouteilles conformes.

1°) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2°) Justifier que la loi binomiale peut être approchée par une loi normale
Préciser les valeurs des paramètres µ et σ à 0,01près.

3°) En utilisant cette approximation, déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 190 bouteilles conformes dans le prélèvement (résultat à 0,01près).

1°) On répète 200 fois de suite de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,9$ dont le succès est : « la bouteille prélevée est conforme au cahier des charges ». La variable aléatoire X, qui compte le nombre de succès, suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,9$.

2°) On vérifie les trois critères :

- $n = 200 \ge 30$.
- $n \times p = 200 \times 0,9 = 180 \ge 5$
- $n(1-p) = 200 \times (1-0,9) = 20 \ge 5$

Les trois conditions étant vérifiées, on peut approcher la loi binomiale par un loi normale de paramètres :
$\mu = n \times p = 200 \times 0,9 = 180$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \times 0,9 \times (1-0,9)} = 4,24$

3°) A l'aide de la calculatrice et en utilisant la loi normale de paramètres $\mu = 180$ et $\sigma = 4,24$ on a :
$P(X \ge 160) = 0,01$