Correction

Exercice 1 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 4x - 3$ pour tout x réel.

   La fonction f est dérivable comme fonction polynôme et pour tout réel x, on a :

   $f'(x) = 4$.
2. $g(x) = 5x^2 - 2x + \frac{1}{x}$ pour tout x réel non nul.

   La fonction g est dérivable comme fonction polynôme et pour tout réel x, on a :

   $g'(x) = 10x - 2 - \frac{1}{x^2}$.
3. $h(x) = -8x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 6x + 17$ pour tout x réel.

   La fonction h est dérivable comme fonction polynôme et pour tout réel x, on a :

   $h'(x) = \; -40x^4 + 12x^3 - 15x^2 + 14x - 6$..
4. $m(x) = \frac{4x-7}{3x-5}$ pour tout x réel différent de $\frac{5}{3}$.

   La fonction m est dérivable comme fonction holographique sur son domaine de définition et pour tout réel x différent de $\frac{5}{3}$, on a :

   $m'(x) = \frac{4(3x-5)-3(4x-7)}{(3x-5)^2} = \frac{12x-20-12x+21}{(3x-5)^2} = \frac{1}{(3x-5)^2}$.

Exercice 2 :

On pose $f(x) = (2x+4)(5x-1)$ pour tout x réel.

1. Calculer la dérivée de f en utilisant la formule de dérivation d'un produit.

   La fonction f est dérivable comme fonction polynôme et pour tout réel x, on a :

   $f'(x) = 2(5x-1) + 5(2x+4) = 10x - 2 + 10x + 20 = 20x + 18$.
2. Développer la fonction f puis calculer sa dérivée en utilisant cette nouvelle forme.

   Pour tout réel x, on a :

   $f(x) = 10x^2 - 2x + 20x - 4 = 10x^2 + 18x - 4$.

   La fonction f est dérivable comme fonction polynôme et pour tout réel x, on a :

   $f'(x) = 20x + 18$.

Exercice 3 :

1. Donner la formule de l'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f en son point d'abscisse a.

   La tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable f en son point d'abscisse a a pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
2. On pose $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ pour tout réel x. Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentative de la fonction f en ses points d'abscisses 1 et -2.

   La fonction f est dérivable comme fonction polynôme et pour tout x réel, on a :

   $f'(x) = 2 \times 2x - 3 = 4x - 3$.

   On a donc $f(1) = 2 - 3 + 1 = 0$ et $f'(1) = 4 - 3 = 1$.

La tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse 1 a donc pour équation :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

i.e. $y = 1 \times (x-1) + 0$

i.e. $y = x - 1$.

Par ailleurs $f(-2) = 2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15$ et $f'(-2) = 4 \times (-2) - 3 = -11$.

La tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse -2 a donc pour équation :

$y = f'(-2)(x-(-2)) + f(-2)$

i.e. $y = -11 \times (x-(-2)) + 15$

i.e. $y = -11x - 22 + 15$

i.e. $y = -11x - 7$.

<u>Exercice 4 :</u>

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 5$.

1. Calculer la dérivée de la fonction f.

   La fonction f est dérivable comme fonction polynôme.

   Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 3x^2 - 12 \times 2x + 36 = 3x^2 - 24x + 36 = 3(x^2 - 8x + 12)$.

2. Etudier le signe de f'.

   Soit Δ le discriminant de ce $x^2 - 8x + 12$.

   $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 64 - 48 = 16 > 0$.

   Ce trinôme admet donc deux racines réelles distinctes :

   $x_1 = \frac{-(-8)-4}{2\times1} = 2$ et $x_2 = \frac{-(-8)+4}{2\times1} = 6$.

   On a donc

x	$-\infty$ $+\infty$		2		6	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

   On a donc :

x	$-\infty$ $+\infty$		2		6	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
f		↗	27	↘	-5	↗

4. Déterminer $f(5)$.

   $f(5) = 5^3 - 12 \times 5^2 + 36 \times 5 - 5 = 125 - 12 \times 25 + 180 - 5 = 125 - 300 + 180 - 5 = 0.$

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [6;7].

   La fonction f est continue comme fonction dérivable.

   Par ailleurs, $f(6) = \ -5$ et $f(7) = 2$, on a donc $f(6) < 0 < f(7).$

   Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires et par stricte croissance de f,
   l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[6; 7]$.