LES SUITES ARITHMÉTIQUES

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \dots \quad \dots \; u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

(u_n) est suite arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en rajoutant toujours le même nombre.
Ce nombre est appelé la raison de la suite et est noté r

$$u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

$$u_n + r = u_{n+1}$$

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Formule par récurrence

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \dots \quad \dots \; u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

$$\mathbf{u_0 + nr = u_n}$$

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \dots \quad \dots \; u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

$$u_2 + r(n-2) = \mathbf{u_n}$$

Somme des termes consécutif d'une suite arithmétique.
Ex suite constante $u_0=1$

$$\boxed{u_0} \overset{2}{+} \boxed{u_1} \overset{2}{+} \boxed{u_2} \overset{2}{+} \boxed{u_3} \overset{2}{+} \boxed{u_4}$$

$S=9$

Attention :
Le nombre n de termes additionner dans cette somme pour u_0 comme premier terme n'est pas l'indice du dernier terme.
En conséquence afin de comptabiliser le terme u_0 , il convient d'ajouter +1 à l'indice n

$$S=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$$

$S=5.\frac{(1+9)}{2}=25$ $\quad$ $S=1+3+5+7+9=25$

S=nombre de termes.(Premier terme + Dernier terme)/2

Complément

https://www.youtube.com/watch?v=PAXyarVBd9E

Montrer qu'une suite est arithmétique

Méthode 1 : Formule explicite

u_n est de la forme $u_n=f(n)$ et $f(n)$ est une fonction affine
où
le terme initiale est l'ordonnée à l'origine
la raison est le coefficient directeur
l'indice est la variable
u_n est l'image de n par la fonction explicite comme y est l'image de x par la fonction de la droite.

$y=ax+b$

$u_n=u_i+rn$ ▸ Permet de visualiser *le sens de variation*

$u_n=rn+u_i$ de la droite et le signe du coefficient directeur.

Méthode 2 : Formule par récurrence
(u_n) est de la forme $u_{n+1}=f(u_n)$
$u_{n+1}=u_n+r$
$u_{n+1}-u_n=r$

le sens de variation
Le sens de variation dépend du signe de r
$r>0$ alors (u_n) est strictement croissante
$r=0$ alors (u_n) est constante
$r<0$ alors (u_n) est décroissante

les limites

Pour (u_n) de la forme $u_n=f(n)$ avec $r>0$

$$\lim_{n\to\infty} u_n=+\infty$$

Pour (u_n) de la forme $u_n=f(n)$ avec $r<0$

$$\lim_{n\to\infty} u_n=-\infty$$

1

Préciser si les suites suivantes, définie sur N, sont arithmétiques.
Dans ce cas indiquer alors la raison et le premier terme.

a) $a_n=3_n-2$ b) $b_n=(2_n+3)/4$ c) $c_n= (n+1)^2-n^2$
d) $d_n=n^2+n$

a) la suite (a_n) est de la forme $a_n=f(n)$ et f est une fonction affine donc (a_n) est une suite arithmétique.
$u_0=-2$ et $r=3$
Le premier terme vaut -2 et la raison de (a_n) est 3.

b) $b_n=(1/2)n+3/4$
la suite (b_n) est de la forme $b_n=f(n)$ et f est une fonction affine donc (b_n) est une suite arithmétique.
$u_0=3/4$ et $r=1/2$
Le premier terme vaut 3/4 et la raison de (b_n) est 1/2.

c) $c_n=n^2+2n+1-n^2$
$c_n=2n+1$
la suite (c_n) est de la forme $c_n=f(n)$ et f est une fonction affine donc (c_n) est une suite arithmétique.
$u_0=1$ et $r=2$
Le premier terme vaut 1 et la raison de (c_n) est 2.

d) d_n est un polynôme du second degrés, la suite n'est pas arithmétique.
$d_0=0$ $d_1=2$ $d_2=6$

$\left.\begin{array}{l} d_1-d_0=2 \\ d_2-d_1=4 \end{array}\right\}$ Donc d_n n'est pas arithmétique.

2

1) La suite (u_n) est arithmétique. $u_0=-2$ et $r=5$. Déterminer u_{15}
2) La suite (v_n) est arithmétique. $v_6=4$ et $r=-3$. Déterminer u_{15}
3) La suite (w_n) est arithmétique. $w_4=2$ et $w_{10}=14$. Déterminer la raison r et w_0
4) La suite (t_n) est arithmétique. $t_2+t_3+t_4=12$ déterminer t_3

1) (u_n) est de la forme $u_n=5n-2$

$u_{15}=(5.15)-2$ $\quad$ $u_{15}=75-2$ $\quad$ $u_{15}=73$

2) (u_n) est de la forme $u_n=-3(n-6)+4$

$u_{15}=-3(15-6)+4$ $\quad$ $u_{15}=(-3.9)+4$ $\quad$ $u_{15}=-23$

3)

$w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad w_6 \quad w_7 \quad w_8 \quad w_9 \quad w_{10} \quad w_{11} \quad w_{12}$

(w_n) est de la forme $w_{n+1}=r(n-4)+w_4$

$w_{n+1}=r(n-4)+2$

$w_{10}=r(10-4)+2$

$14=6r+2$

$6r=12$

$r=2$

$w_n=2n+w_0$

$w_{10}=2.10+w_0$

$14=20+w_0$

$w_0=-6$

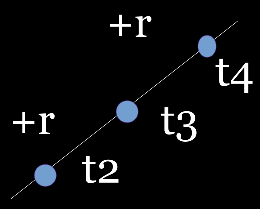
La formule explicite de (w_n) est $w_n=2n-6$

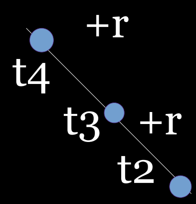
4)

$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5$

1^{er} remarque graphiquement t_3 est la moyenne entre t_2 et t_4

$t_3=(t_2+t_3+t_4)/3=4$





3

On a obtenu avec un tableur les termes consécutifs d'une suite (u_n)

	A
22	85
23	89
24	93
25	97
26	101
27	105
28	109
29	113

1) Que peut-on conjecturer concernant cette suite?
2) Quelle est la valeur de la cellule A1 et A100?

1) Il semble (u_n) soit arithmétique de raison 4
(u_n) est de la forme $u_n=rn+u_0$

2)
$u_{22}=4.22+u_0$
$85=88+u_0$
$u_0=-3$

La formule explicite de (u_n) est $u_n=4n-3$
Pour la cellule A1, n=1
$u_n=(4.1)-3$
$u_n=1$
La valeur de la cellule A1 vaut 1

Pour la cellule A100, n=100
$u_n=(4.100)-3$
$u_n=397$

4

On considère l'intervalle I=[17;154].
1) Combien I contient-il de nombres entiers?
2) Combien I contient-il de nombres pairs?
3) Combien I contient-il de multiples de 4?

1) La suite (e_n) est de la forme $e_n=n$
(e_n) est comprise entre
$17\leqslant n\leqslant 154$
Le nombre d'entier contenu dans l'intervalle I est :
$154-14+1=138$

2) La suite (P_n) est de la forme $P_n=2n$
(P_n) est comprise entre
$17\leqslant 2n\leqslant 154$
$8,5\leqslant n\leqslant 77$
n étant un entier naturel,
$8<8,5<9\leqslant n$
n doit être supérieur ou égale à 9 pour être supérieur à 8,5
$9\leqslant n\leqslant 77$
Le nombre de pair contenu dans l'intervalle I est
$77-9+1=69$

3) La suite (M_n) est de la forme $M_n=4n$
(M_n) est compris entre
$17\leqslant 4n\leqslant 154$
$4,25\leqslant 4n\leqslant 38,5$

n étant un entier naturel il doit être supérieur à 4,25 soit 5
et inférieur à 38,5 soit 38
$5\leqslant 4n\leqslant 38$
Le nombre de multiple de 4 contenu dans l'intervalle I est :
$38-5+1=34$

5

On considère la suite (u_n) définie par $u_o=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{(3+u_n^2)}$

On admet que la suite (u_n) à tout ses termes positifs

1) Démontrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique

2) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=u_n^2$

Démontrer qu v_n est arithmétique. Préciser le 1er terme et la raison.

3) Exprimer v_n en fonction de n

4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

1) $u_o=1$ et $n=0$

$u_{0+1}=\sqrt{(u_0^2+3)}$	$u_1=2$
$u_{1+1}=\sqrt{(u_1^2+3)}$	$u_2=\sqrt{7}$
$u_{2+1}=\sqrt{(u_2^2+3)}$	$u_3=\sqrt{10}$
$u_{3+1}=\sqrt{(u_3^2+3)}$	$u_4=\sqrt{13}$

De u_o à u_1 on ajoute 1 ou on multiplie par 2

Ce qui n'est pas le cas pour le terme suivant u_2

2) $v_{0+1}=u_{0+1}^2$ avec $u_o=1$

$v_1=u_1^2$

$u_{0+1}^2=(\sqrt{(u_0^2+3)})^2$

$u_1^2=u_0^2+3$

$u_1^2=4$

$v_1=4$

$u_1=2$

$u_{1+1}^2=u_1^2+3$	$u_2^2=2^2+3$	$u_2^2=7$	$v_2=7$	$u_2=\sqrt{7}$
$u_{2+1}^2=u_2^2+3$	$u_3^2=7+3$	$u_3^2=10$	$v_3=10$	$u_3=\sqrt{10}$
$u_{3+1}^2=u_3^2+3$	$u_4^2=10+3$	$u_3^2=13$	$v_4=13$	$u_4=\sqrt{13}$

$$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+3} 10 \xrightarrow{+3} 13$$

Le 1er terme est $v_o=1$ et la raison de la suite est 3

Méthode plus rapide :
Pour une suite arithmétique :
$v_{n+1}-v_n=r$
$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}^2-u_n^2$
$v_{n+1}-v_n= 3+u_n^2-u_n^2$
$r=3$

3) Exprimer v_n en fonction de n
Pour tout entier naturel n,
$v_n=3n+1$

4) $v_n=u_n^2$
$u_n=\sqrt{v_n}$
$-\sqrt{v_n}$ ne peut pas être solution car comme indiqué dans l'énoncé (u_n) à tout ses termes positifs.

On en déduit que la formule explicite de (u_n) se note :
$u_n=\sqrt{(3n+1)}$

6

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1}= u_n/(1+2u_n)$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3

2) On admet que pour tout entier naturel n, v_n est $\neq 0$

On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel n, $v_n=1/u_n$

Calculer v_0, v_1 et v_2.

Démontrer que la suite v_n est arithmétique.

En déduire l'expression de v_n en fonction de n, pour tout entier naturel puis celle de u_n

1) $u_0=1$

$u_{0+1}=u_0/(2u_0+1)$ $u_1=1/(2+1)$ $\boxed{u_1=1/3}$

$u_{1+1}=u_1/(2u_1+1)$ $u_2=(1/3).(1/(2.1/3+1))$ $u_2=1/3.3/5$

$u_2=3/15$ $\boxed{u_2=1/5}$

$u_{2+1}=u_2/(2u_2+1)$ $u_3=(1/5).(1/(2.1/5+1))$ $u_3=1/5.5/7$

$u_3=5/35$ $\boxed{u_3=1/7}$

2)

$v_0=1/u_0$ $v_0=1/1$ $v_0=1$

$v_1=1/u_1$ $v_1=1/(1/3)$ $v_1=3$

$v_2=1/u_2$ $v_2=1/(1/5)$ $v_2=5$

Si (v_n) est arithmétique alors

$v_{n+1}-v_n=r$

$v_{n+1}-v_n=1/u_{n+1}-1/u_n$

$v_{n+1}-v_n=1/(u_n/(2u_n+1))-1/u_n$

$v_{n+1}-v_n=[(2u_n+1)/ u_n]-1/u_n$

$v_{n+1}-v_n=2u_n+1-1/u_n$

$v_{n+1}-v_n=2$

$r=2$

Pour tout entier naturel n, la formule explicite de la suite (v_n) est

$v_n=2n+1$

On remarque que cette suite est la suite des nombres impairs.

$v_n=1/u_n$ $u_n=1/v_n$ $u_n=1/(2n+1)$

On remarque que cette suite est l'inverse de la suite des nombres impairs.

7

On considère la suite (u_n) $n \in N$ définie par $u_{n+1}=u_n+2n-1$ et $u_0=3$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3

2) On pose pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-n^2$

a) Calculer v_0,v_1,v_2 et v_3

b) Montrer que la suite (v_n) $n \in N$ est arithmétique.

c) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

d) En déduire u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

1) $u_0=3$ et $n=0$ $n \in N$

$u_{0+1}=u_0+2n-1$	$u_1=3-1$	$u_1=2$
$u_{1+1}= u_1+2n-1$	$u_2=2+2-1$	$u_2=3$
$u_{2+1}=u_2+2n-1$	$u_3=3+4-1$	$u_3=6$

2a) $n \in N$, $v_n=u_n-n^2$

$v_0=u_0-n^2$	$v_0=3$	
$v_1=u_1-n^2$	$v_1=2-1$	$v_1=1$
$v_2=u_2-n^2$	$v_2=3-4$	$v_2=-1$
$v_3=u_3-n^2$	$v_3=6-9$	$v_3=-3$

2b) La suite (v_n) est arithmétique si $v_{n+1}-v_n=r$

$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-(n+1)^2-u_n+n^2$

$v_{n+1}-v_n=\cancel{u_n}+2n-1-(n^2+2n+1)-\cancel{u_n}+n^2$

$v_{n+1}-v_n=\cancel{2n}-1-\cancel{n^2}-\cancel{2n}-1+\cancel{n^2}$

$v_{n+1}-v_n=-2$

$r=-2$

2c) Pour tout entier naturel n, (v_n) s’exprime par:

$v_n=-2n+3$

3) Pour tout entier naturel n, (u_n) s’exprime par:

$v_n=u_n-n^2$ $\quad$ $u_n=v_n+n^2$

$u_n=-2n+3+n^2$

8

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison négative.
On sait que la somme des deux premiers termes vaut 5/6.
Le produit des deux premiers termes vaut 1/16.
Déterminer pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

D'après l'énoncé on sait que
$u_n=-r+u_0$ et que $u_0+u_1=5/6$

$$\left.\begin{aligned} &u_0+u_1=5/6 \\ &u_0.u_1=1/16 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} &u_1=5/6-u_0 \\ &u_0(5/6-u_0)=1/16 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} &u_1=5/6-u_0 \\ &(5\ u_0-6u_0^{\ 2})/6=1/16 \end{aligned}\right\}$$

$5\ u_0-6u_0^{\ 2}=3/8$ $\qquad -6u_0^{\ 2}+5\ u_0-3/8=0$

Cette formule est de la forme d'un polynôme du second degrés.
$\Delta=b^2-4ac=25-(4.-6.-3/8)=16$
Ce polynôme admet deux racines car $\Delta>0$
$x_1=(-b+\sqrt{\Delta})/2a=(-5+4)/-12=1/12$
$x_{=}(-5-4)/-12=3/4$

$\boxed{u_0=1/12 \text{ ou } 3/4}$

$u_1=5/6-u_0$	$u_1=5/6-u_0$
$u_1=5/6-1/12$	$u_1=5/6-3/4$
$u_1=3/4$	$u_1=1/12$
$u_1=0{,}75$	$u_1=0{,}083$
$u_0=0{,}083$	$u_0=0{,}75$

Comme la raison est négative $u_0>u_1$ donc
$\boxed{u_0=3/4 \text{ et } u_1=1/12}$

Pour tout entier naturel n, (u_n) étant arithmétique sa raison vaut:
$r=u_1-u_0$
$r=1/12-3/4$
$r=-2/3$

On déduite que la formule explicite de (u_n) se note:
$\boxed{u_n=-2/3n+3/4}$

9

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison négative. On sait que la somme des trois premiers termes vaut 81 et que leur produit vaut 18 360.

1) On note r la raison de cette suite. Exprimer u_0 et u_2 en fonction de u_1 et r.

2) Montrer que l'on a : $\begin{cases} 3u_1 = 81 \\ u_1^3 - r^2 u_1 = 18360 \end{cases}$

3) En déduire la valeur de u_1 et de r

4) Calculer u_{40}

1)

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2$$

$u_0 = u_1 - r$ et $u_2 = u_1 + r$

2) Pour tout entier naturel n,

$u_0 + u_1 + u_2 = 81$

$u_1 - \cancel{r} + u_1 + u_1 + \cancel{r} = 81$

$\boxed{3u_1 = 81}$

$u_0 . u_1 . u_2 = 18\ 360$

$(u_1 - r) . u_1 . (u_1 + r) = 18\ 360$

$(u_1 - r) . (u_1^2 + r u_1) = 18\ 360$

$u_1^3 + \cancel{r u_1^2} - \cancel{r u_1^2} - r^2 u_1 = 18\ 360$

$\boxed{u_1^3 - r^2 u_1 = 18\ 360}$

3)

$\begin{cases} u_1 = 81/3 = 27 \\ 27^3 - r^2 . 27 = 18\ 360 \end{cases}$ $\begin{cases} u_1 = 81/3 = 27 \\ -27 r^2 = -1323 \end{cases}$ $\begin{cases} u_1 = 81/3 = 27 \\ r^2 = 49 \end{cases}$

Selon l'énoncé on sait que $r < 0$ donc $r = -7$ et $u_1 = 27$

4) La formule explicite de (u_n) se note à partir de u_1

$u_n=r(n-1)+u_1$

$u_{40}=-7(39)+27$

$u_{40}=-246$

La formule explicite de (u_n) se note

$u_0=u_1-r$

$u_0=27-(-7)$

$u_0=34$

$\boxed{u_n=-7n+34}$

10

La suite (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_4=1$ et $1/(u_1u_2)+1/(u_2u_3)=2$

Déterminer u_0 et la raison r

1)

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4$$

$u_1=1-3r \quad u_2=1-2r \quad u_3=1-r \quad u_4=1$

$u_1.u_2=$

$(1-3r)(\ 1-2r)=1-2r-3r+6r^2=6r^2-5r+1$

$u_1.u_2\,u_3=$

$(6r^2-5r+1)(1-r)=6r^2-5r+1-6r^3+5r^2-r=-6r^3+11r^2-6r+1$

$2u_1.u_2\,u_3=$

$2.(6r^3-r^2-6r+1)= -12r^3+22r^2-12r+2$

$1/(u_1u_2)+1/(u_2u_3)=2$

$1/(u_1u_2)+1/(u_2u_3)-2=0$

On multiplie par $u_1u_2u_3$

$(u_1u_2u_3)/(u_1u_2)+(u_1u_2u_3)/(u_2u_3)-2u_1u_2u_3=0$

$u_3+u_1-2u_1u_2u_3=0$

$1-r+1-3r+12r^3-22r^2+12r-2=0$

$12r^3-22r^2+8r=0$

Cas particulié d'un polynôme du $3^{ème}$ degrés ou c=0

$r(12r^2-22r+8)=0$

$r_1=0 \qquad r_2=4/3 \qquad r_3=1/2$

Pour tout entier naturel n,

$u_n=nr+u_0$

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4=1$$

r=0 u_n est une suite arithmétique constante

$r=1/2$	$u_0=-1$	$u_1=-1/2$	$\boxed{u_2=0}$	$u_3=1/2$	$u_4=1$
$r=4/3$	$u_0=-13/3$	$u_1=-3$	$u_2=-5/3$	$u_3=-1/3$	$u_4=1$

r ne peut pas valoir 1/2 car les dénominateurs de peuvent pas s'annuler d'après l'énoncé où $1/(u_1u_2)+1/(u_2u_3)=2$

r peut valoir 0 ou 4/3 et vérifie $1/(u_1u_2)+1/(u_2u_3)=2$

Soit r=0 et $u_0=1$ et (u_n) pour tout entier naturel n, vaut $u_n=1$

Soit r=4/3n-13/3

Δ

11

Soit n un entier naturel non nul.
Démontrer que la somme des n premiers entiers naturels impairs est un carré parfait.

$\forall$ $n\in\mathbb{N}^*$, On note Se_n la somme des n premiers entiers naturels impairs tel que $1+3+5+...+n=n^2$
et (u_n) la suite des n premiers entiers naturels impairs.
$\forall$ $n\in\mathbb{N}^*$, $n>0$ $u_n=2n-1$ à la différence $\forall$ $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 0$ $u_n=2n+1$

	+2	+2		
	U_0	U_1	U_2...	...U_n
Termes	1+	3+	5+...	...2n-1
Se_n	1	4	9	
Se_n	1^0	2^2	3^2	n^2
	1er terme	2ème terme	3ème terme	énième terme

La suite (u_n) est arithmétique de raison $r=2$ et de 1^{er} terme $u_0=1$

$\forall$ $n\in\mathbb{N}^*$, la somme des termes consécutifs de (u_n) se note :
$1+3+5+...+n=$nombre de termes.(1^{er} terme + dernier terme)/2

$Se_n=n.(1+2n-1)/2$
$Se_n=2n^2/2$
$\boxed{Se_n=n^2}$

$\neq \Delta \surd \forall \in \infty \leqslant \geqslant \pi$

$\leqslant \geqslant \surd \neq \in$