EXERCICE CORRIGÉ

On considère les deux fonctions f et h définies sur $\mathbb{R}+$ par :

$f(x) = (4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + \dfrac{1}{2}$

$h(x) = 3x - 4x\sqrt{x} - \dfrac{1}{4}$

(C_f) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer $h'(x)$ puis dresser le tableau de variations de h.

b) Déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}+)$, $h(x) \leq 0$.

2) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat géométriquement.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis déduire la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

4) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}+^*)$, $h'(x) = \dfrac{2h(x)}{\sqrt{x}}$ et déduire le tableau de variations de f.

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0;+\infty[$ et vérifier que $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right[$.

6) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle à déterminé.

7) Construire (C_f) la courbe de f et (C_f^{-1}) la courbe de f^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On admet que (C_f) admet un unique point d'inflexion $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

Correction Proppsée

1) a) Calculer $h'(x)$ puis donner le tableau de variations de h.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(3x - 4x\sqrt{x} - \frac{1}{4}\right)' \\ &= 3 - (4\sqrt{x} + 4x.\frac{1}{2\sqrt{x}}) \\ &= 3 - 4\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 3 - 6\sqrt{x} \end{aligned}$$

Tableau de variations de h :

$$\begin{aligned} h'(x) = 0 &\iff 3 - 6\sqrt{x} = 0 \\ &\iff \sqrt{x} = \frac{1}{2} \\ &\iff x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
Signe $h'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
Variations h	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$h\left(\frac{1}{4}\right) = 0$	$\searrow$	$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x - 4x\sqrt{x} - \frac{1}{4} = \lim_{x\to+\infty} x\left(3 - 4\sqrt{x}\right) - \frac{1}{4} = -\infty$$

b) Déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}+)\ :\ h(x) \leq 0$

0 est la valeur maximale absolue de h.

Par suite : $\forall x \in [0; +\infty[:\quad h(x) \leq 0$

2) Étudier la dérivabilité de f à droite en : $x_0 = 0$ puis donner une interprétation du résultat.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(4x-1)\sqrt{x}-4x^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x-1}{\sqrt{x}}-4x=-\infty$$

$$\left(\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{\sqrt{x}}=-\infty\right)$$

Puisque $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en 0.

(C_f) admet une demi tangente verticale dirigée vers le bas au point $(0;f(0))$

3) Calculer $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, déduire la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x) &= \lim_{x\to+\infty}(4x-1)\sqrt{x}-4x^2+\frac{1}{2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{(4x-1)\sqrt{x}}{x^2}-4\right)+\frac{1}{2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}x^2\left(\left(\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}-4\right)+\frac{1}{2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}-4\right)+\frac{1}{2}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

Pour déduire la branche infinie au voisinage de $+\infty$ on calcule $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}-4\right)+\frac{1}{2}}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}-4\right)+\frac{1}{2x}\\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées $+\infty$ dirigée vers le bas (car : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$) .

4) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*+)\ ;\ f'(x)=\frac{2h(x)}{\sqrt{x}}$ Donner le tableau de variations de f .

$(\forall x \in \mathbb{R}^*+)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left((4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + \frac{1}{2}\right)' \\
&= (4x-1)'.\sqrt{x} + (4x-1).(\sqrt{x})' - 8x \\
&= 4.\sqrt{x} + (4x-1).\frac{1}{2\sqrt{x}} - 8x \\
&= 4\sqrt{x} + (4x-1).\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}} - 8x \\
&= \frac{4x + 2x - \frac{1}{2} - 8x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{6x - 8x\sqrt{x} - \frac{1}{2}}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{2(3x - 4x\sqrt{x} - \frac{1}{4})}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{2h(x)}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Tableau de variations de f :

On a : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = \dfrac{2h(x)}{\sqrt{x}}$

pour tout x de $]0;+\infty[$ on a $\sqrt{x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $h(x)$ (et d'après 1-b $\forall x \in]0;+\infty[$: $h(x) < 0$) .

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	
f	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

5) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0;+\infty[$ puis vérifier que $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right[$

⋆ f est continue sur $\mathbb{R}+$ et notamment sur $\left]\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right[$.

⋆ f strictement monotone (strictement croissante) $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$.

⋆ $f\left([0;+\infty[\right) =]-\infty;\frac{1}{2}]$ Donc $0 \in f\left([0;+\infty[\right)$

$Vrification$:

$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} > 0$, $f(\frac{3}{4}) = \sqrt{3} - \frac{7}{4} < 0$ D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle et $\alpha \in \left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$.

6) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle à déterminé.

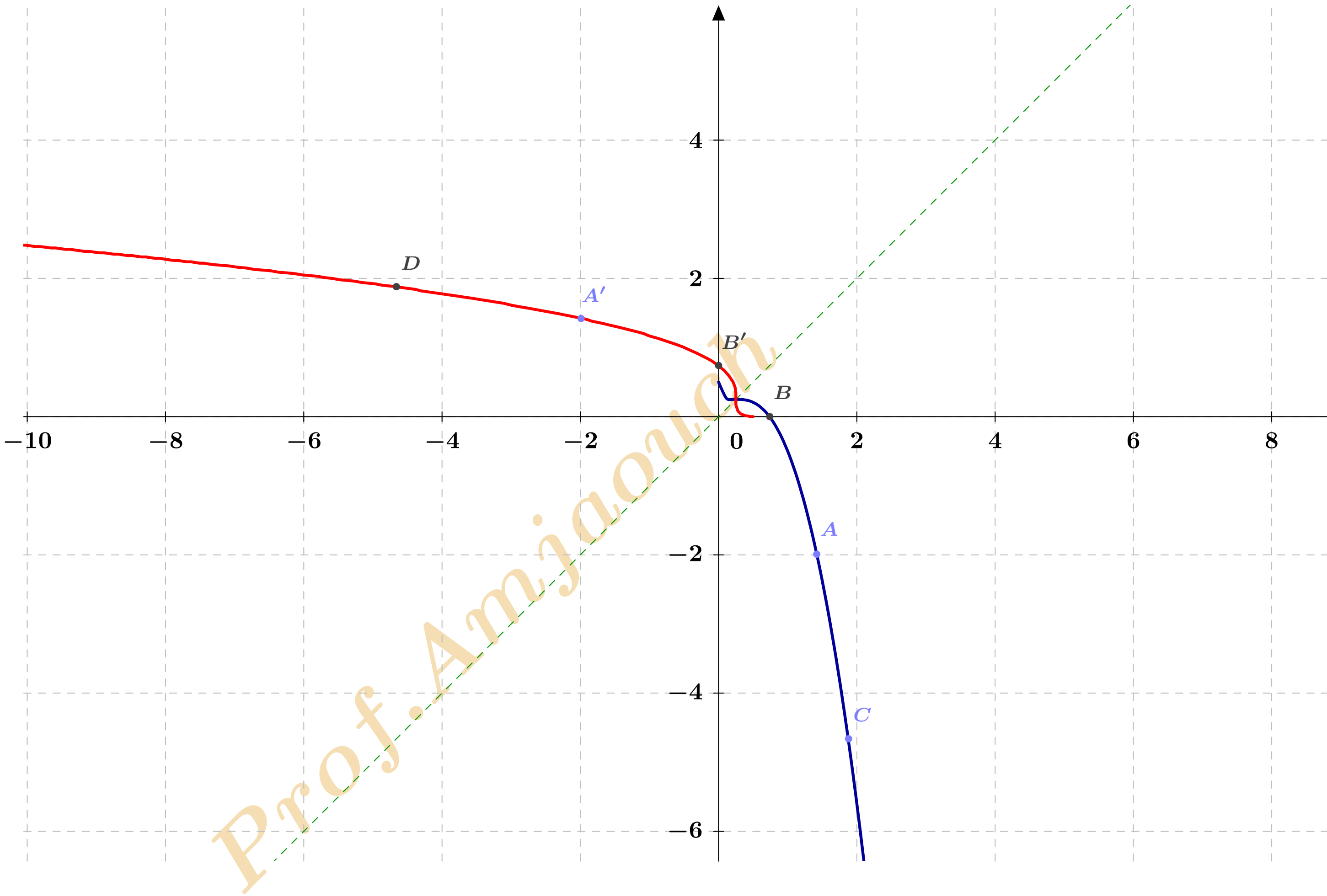
f est continue et strictement monotone sur $[0;+\infty[$ donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $f([0;+\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} f(x); f(0)] = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$.

7) Construction de (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

On admet que (C_f) admet un unique point d'inflexion $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

$(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

$(C_{f^{-1}})$ en rouge.


4
2
−2
−4
−6
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
D
A'
B'
B
A
C