DÉNOMBREMENT

Définition :

1) Ensemble : Un ensemble est un regroupement d'objet distinct.
(par exemple sous forme de schéma.)

2) Accolades : {...} elles indiquent que l'on a faire à un ensemble.
{a ;b ;c} désigne l'ensemble formé par les lettres a,b et c.

3) Ordre : Il n'y a pas d'ordre dans un ensemble {a;b;c}={c;a;b}

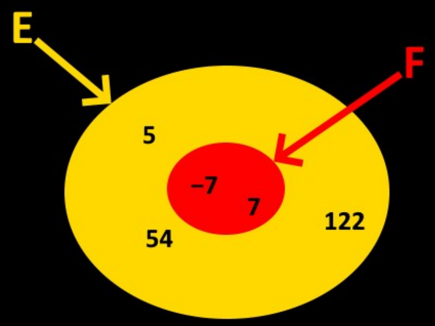
4) Répétition : Il n'y a pas de répétition dans un ensemble. {a;a;b}={a;b}

5) Ensemble fini: Il contient un nombre fini d'éléments.

- {5 ;3 ;8 ;−37} est un ensemble fini car il contient 4 éléments.
- L'ensemble ℕ des entiers naturel n'est pas un ensemble fini car il contient une infinité d'éléments.

6) Ensemble vide : $\emptyset$ il ne contient aucun élément.

7) Partie : On appel partie d'un ensemble E, un sous−ensemble de E.
Dire que F est une partie de E signifie que F est un sous−ensemble de E c'est à dire que tout les éléments de F appartiennent aussi à E
On écrit alors F⊂E
Exemple:E={5 ;−7;7;122;54} et F={−7;7}



8) ⊂ : Ce symbole s'utilise pour dire qu'un ensemble est inclus dans un ensemble. Dire que F⊂E signifie que l'ensemble F est inclus dans E.
C'est à dire que tout les éléments de F sont dans E.
Exemple: E={2;4;6;8;10} et F={4:6}
Tout les éléments de F appartiennent à E. Donc F est une partie de E. Donc on peut écrire F⊂E

Méthode très classique : Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on montre que A⊂B puis que B⊂A
On procède ainsi :
1) On se donne un élément quelconque de A. Soit x∈A. On montre alors que x∈B ce qui prouve que A⊂B.

2) On se donne un élément quelconque de B. Soit x∈B. On montre que x∈A ce qui prouve que B⊂A.
3) On conclut comme A⊂B et B⊂A donc on a A=B

9) $\wp$(E) : Soit E un ensemble. $\wp$(E) désigne l'ensemble des parties de E
Exemple E={a;b;c} donner les parties de E.

1) Partie de E à 0 élément : $\emptyset$
2) Partie de E à 1 élément:{a}, {b} et {c}
3) Partie de E à 2 éléments {a;b}, {a,c} et {b,c}
4) Partie de E à 3 éléments {a;b;c}

Finalement, $\wp$(E)={$\emptyset$; {a} ; {b} ; {c} ; {a;b} ; {a,c} ; {b,c} ; {a;b;c}}
Donc E à 8 parties.
Si E contient n éléments alors le nombre de parties E est 2^n.

10) Dénombrer : C'est comter le nombre d'élément d'un ensemble.
Soit A={2;5;9} A contient 3 éléments.

11) Cardinal d'un ensemble : Soit A un ensemble fini. Le cardinal de A noté Card(A) désigne le nombre d'éléments de A.
Card(A) se note parfois aussi $|A|$ ou encore #A.

Exemple soit A={2;3;8} A contient 3 éléments. Donc le cardinal de A vaut 3 et on note Card(A)=3.
a) Card{$\emptyset$}=0
b) A∩B L'intersection des éléments A et B noté A∩B désigne l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et B.
c) A∪B La rréunion des ensembles A et B noté A∪B désigne l'ensemble des éléments qui sont dans A ou B
d) Le complémentaire $\bar{A}$ Soit A une partie d'un ensemble E. Le complémentaire de A dans E noté $\bar{A}$ désigne l'ensemble des éléments dans E qui ne sont pas dans A.
e) Propriété du $\text{Card}(\bar{A})=\text{Card}(E)-\text{Card}(A)$ A désigne uyn ensemble inclus dans un ensemble fini.
Exemple soit A={1;2;8} et E={1;2;3;8;15}. Déterminer le Card(A).
$\text{Card}(\bar{A})=\text{Card}(E)-\text{Card}(A)=5-3=2$ en effet $\bar{A}$ ={3;15}

12) Disjoint : Deux ensembles sont disjoint lorsque leur intersection est vide, autrement dit, lorsqu'ils n'ont aucun éléments en commun. A∩B=$\emptyset$

Principe additif :

- Card(A∪B)

Propriété :
Soit A et B deux ensembles finis. Card(A∪B)=Card(A)+Card(B)−Card(A∩B).
Dans le cas ou A et B sont disjoints:Card(A∪B)=Card(A) + Card(B).
Cette propriété s'appelle le principe additif.

Produit cartésien & principe multiplicatif

- Produite cartésien

Définition : Soient E et F, 2 ensembles. Le produit cartésien de E et F noté E x F est l'ensemble des couples (x;y) ou x appartient à F
E x F se lit « E croix F »
Écrit mathématiquement : E x F = { (x;y) | $x \in$ E, y $\in$ F }

E x E se note E^2.

Plus généralement $\underbrace{E\times\ldots\times E}_{n}$ se note E^n.

Exemple :

Soit E={a;b} et F{1;2;3} Déterminer E x F

E x F = {(a;1);(a;2);(a;3);(b;1);(b;2);(b;3)}

Exemple :

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x;y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ C'est l'ensemble des coordonnées du plan.

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{x ;y ;z\} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ c'est l'ensemble des coordonnés de l'espace.

Principe multiplicatif

Propriété :

Soient E et F deux ensembles finis. Card(E) x Card(F)

Exemple :

Soit E={a;b} et F={1;2;3}. Déterminer Card(E x F) = Card(E) x Card(F)

E x F={(a;1);(a;2);(a;3) ; (b;1);(b;2);(b;3)}

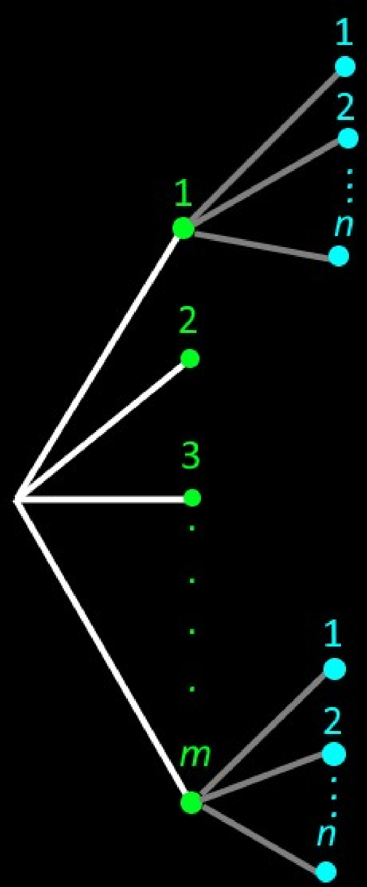
Il y a donc 6 éléments dans E x F. Autrement dit Card(ExF)=Card(E) x Card(F)=2.3=6

Principe :

La propriété Card(ExF)=Card(E) x Card(F) s'appelle principe multiplicatif

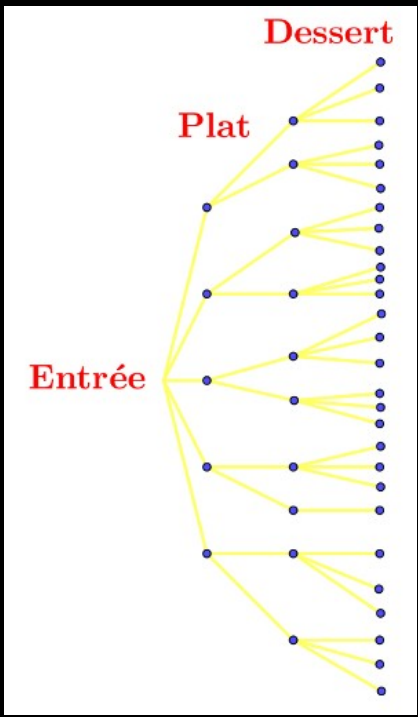
Se principe peut s'énoncer ainsi :

Lorsque l'on a m possibilités puis n possibilités, au final on a m x n possibilités.



Dans l'arbre on a m branches qui chacune se divise en n branches. On a donc $m \times n$ branches dans l'arbre ce qui correspond aux $m \times n$ possibilités.

Exemple :
Dans un restaurant un menu est composé d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. Ce restaurant propose 5 entrées, 2 plats et 3 desserts. Combien y–a–t–il de menus différents ?
Il y a donc 5.2.3=30 menus différents.



Nombre de partie d'un ensemble Card($\wp$(E))

Card($\wp$(E))
Propriété :
Soit E un ensemble à n éléments E possède 2^n parties.
Autrement dit le cardinal Card($\wp$(E))=2^n.
Exemple :
E={a;b;c}. Déterminer le nombre de partie E

Card($\wp$(E))=2^3=8.

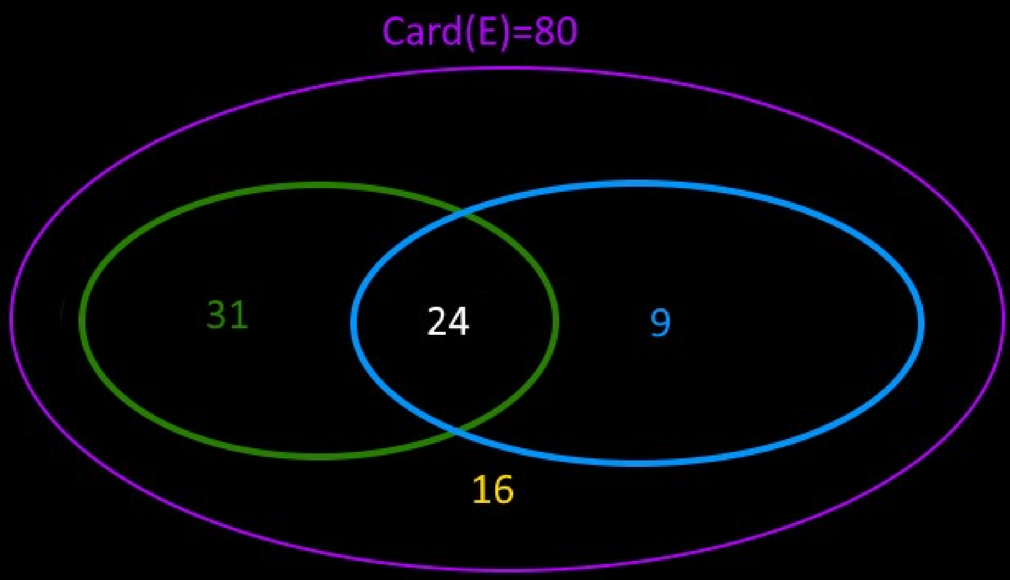
Exercice 1: Diagramme de Venn - Principe additif

Un centre sportif compte 80 adhérents, 55 pratiquent la course à pied, 33 la natation et 16 ne pratiquent aucun de ces deux sports.
À l'aide d'un diagramme de Venn, déterminer le nombre d'adhérents pratiquant la natation mais pas la course à pied.

Soit E l'ensemble des adhérents.
Soit A le groupe qui pratique de la course à pied.
Soit B le groupe qui pratique la natation.
Soit C le groupe qui ne pratique aucun de ces deux sports.

$\text{Card}(A\cup B)=\text{Car}(E)-\text{Card}(C)=80-16=64$

$\text{Card}(A\cup B)=\text{Card}(A)+\text{Card}(B)-\text{Card}(A\cap B)$
$64=55+33-\text{Card}(A\cap B)$
$\text{Card}(A\cap B)=24$



Il y a 9 adhérents qui pratique la natation mais pas la course à pied

Exercice 2 diagramme de Venn pour dénombrer

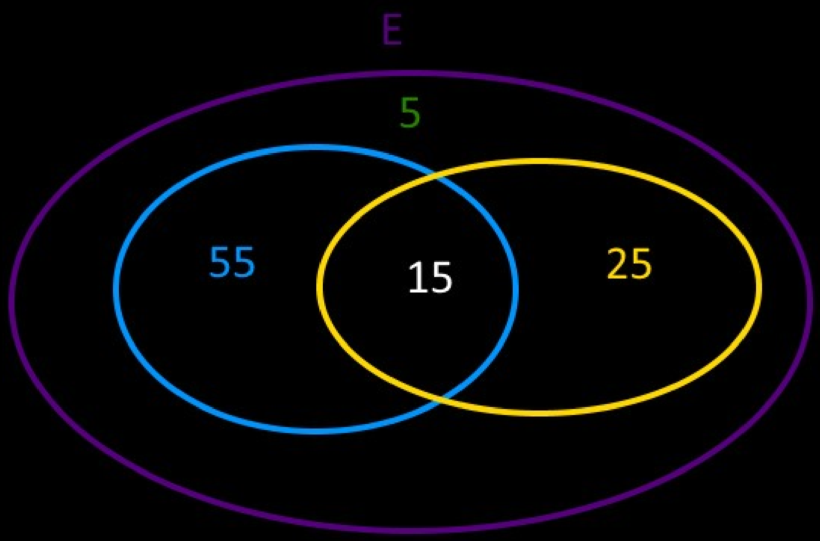
Un sac de contient 100 jetons. Il y a 70 jetons bleus et 40 jetons ronds et 15 jetons bleus et ronds.

1. Combien y-a-t-il de jetons bleus mais pas ronds?
2. Combien y-a-t-il de jetons ronds mais pas bleus?
3. Combien y-a-t-il de jetons ni rond ni bleu?

Erreur sur 5
Soit le Card(E)=100 l'ensemble des jetons, Card(B)=70 celui des jetons bleus, Card(R)=40 celui des jetons ronds et le Card(B∩R)=15.

$Card(B \cup R)=Card(B)+Card(R)-Card(B \cap R)=70+40-15=95$

$$Card(\bar{B} \cap \bar{R})=Card(E)-Card(B \cup R)=100-95=5$$



1)

$$Card(B)-Card(B \cap R)=70-15=55$$

Il y a 55 jetons bleus mais pas ronds.

2)

$$Card(R)-Card(B \cap R)=40-15=25$$

Il y a 25 jetons ronds mais pas bleus

3)

Il y a 5 jeton ni ronds ni bleues.

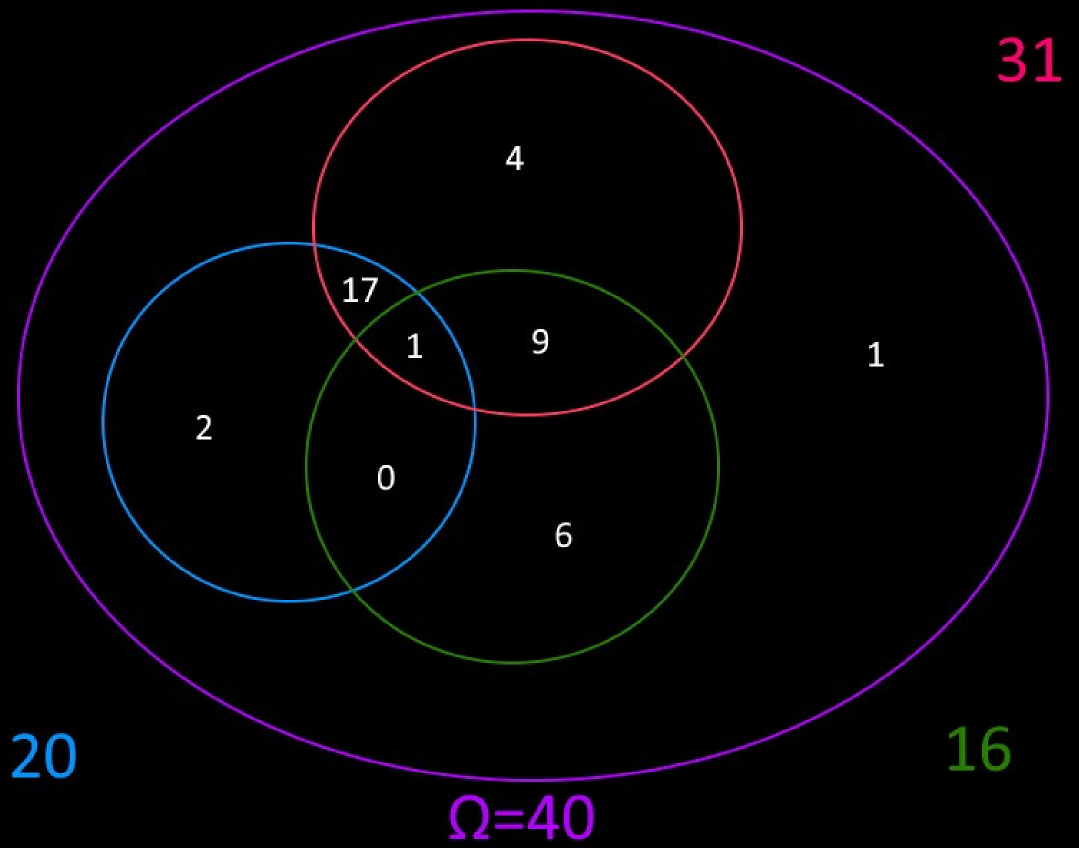
Exercice 3: Dénombrement - diagramme de Venn avec 3 ensembles

Dans une classe de 40 élèves, 20 étudient l'allemand, 31 l'anglais et 16 l'espagnol. 18 étudient l'anglais et l'allemand et parmi eux, 1 élève étudie aussi l'espagnol. Aucun n'élève n'étudie l'allemand et l'espagnol sans étudier l'anglais et seulement 6 élèves n'étudient que l'espagnol.

1. Représenter ces données à l'aide d'un diagramme.
2. On croise un élève au hasard:
   a. Quelle est la probabilité qu'il étudie exactement 2 langues parmi allemand, anglais et espagnol?
   b. Quelle est la probabilité qu'il n'étudie ni allemand ni anglais ni espagnol?

1) Soit A l'ensemble des élèves étudiant l'Allemand,
B l'ensemble des élèves étudiant l'Anglais et
C l'ensemble des élèves étudiant l'Espagnol.

2a)



L'univers est composé de 40 issues possibles soit Ω=40.
Les issues sont équiprobables.

$$\frac{\text{étudie exactement 2 langues}}{\Omega}=\frac{P(A\cap B)+(P\,A\cap C)+(P\,B\cap C)}{\Omega}=$$

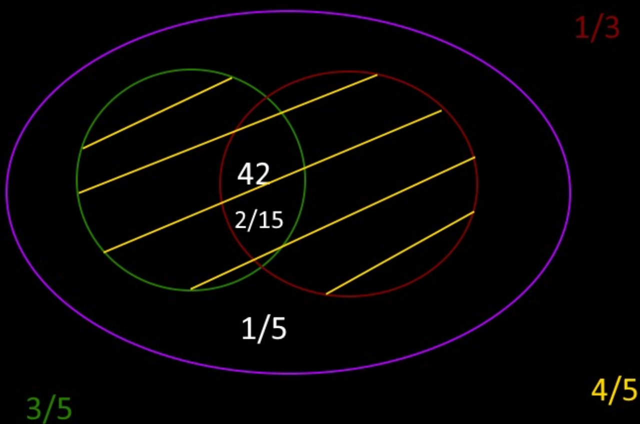
$$\frac{17+0+9}{40}=\frac{26}{40}=\frac{13}{20}=0{,}65\ soit\ 65\,\%$$

2b)= 1/40
la probabilité qu'il n'étudie ni allemand ni anglais ni espagnol est de 2;5 %

Exercice 4: Ensemble

Dans un collège, les trois cinquièmes des élèves font de la natation, un tiers fait du tennis et 42 font les deux. Enfin un cinquième ne fait ni tennis ni natation. Combien y-a-t-il d'élèves dans ce collège?

Soit A le groupe des élèves faisant de la natation.
Soit B le groupe des élèves faisant du tennis.
Soit E l'ensemble des élèves.



$$\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}(E)-\mathrm{Card}(\bar{A}\cap\bar{B})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

$$\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(A\cap B)=\frac{4}{5}=\frac{1}{3}+\frac{3}{5}-\mathrm{Card}(A\cap B)$$

$\mathrm{Card}(A\cap B)=2/15$

Calcul des élèves pratiquant uniquement la tennis
$1/3-2/15=1/5$
Calcul des élèves pratiquant uniquement le natation
$3/5-2/15=7/15$

Calcul du nombre d'élèves pratiquant uniquement le tennis
$\left.\begin{array}{l}2/15\to 42\\ 1/5\to x\end{array}\right\}\quad x=63$

Calcul du nombre d'élèves pratiquant uniquement la natation
$\left.\begin{array}{l}2/15\to 42\\ 7/15\to x\end{array}\right\}\quad x=147$

Calcul du nombre d'élève pratiquant de la natation et du tennis.
$\mathrm{Card}(A\cup B)=105+189-42$
$\boxed{\mathrm{Card}(A\cup B)=252}$

Calcul du nombre d'élève ne pratiquant aucun sport
$\left.\begin{array}{l}4/5\to 252\\ 1/5\to x\end{array}\right\}\quad x=63$

$$\boxed{\mathrm{Card}(\bar{A}\cap\bar{B})=63}$$

Calcul du nombre total dans le collège
$$\mathrm{Card}(E)=\mathrm{Card}(A\cup B)+\mathrm{Card}(\bar{A}\cap\bar{B})=252+63$$

Card(E)=315

Exercice 5: Dénombrement - Principe additif ou multiplicatif

Un restaurant propose quatre entrées, trois plats et cinq desserts.

1. Alban n'a pas très faim et hésite entre une entrée et un plat. Combien a-t-il de choix possibles?
2. Rose décide de prendre une entrée, un plat et un dessert. Combien a-t-elle de choix possibles?

1) Soit E l'ensemble des entrées. Card(E)=4
Soit P l'ensemble des plats. Car(P)=3
Soit D l'ensemble des dessert. Card(D)=5

Calcul du Card(ExF)

Card(ExF)=Card(E) x Card(F)=4x3=12

Alban a 12 choix possibles de repas différents.

2) Calcul du Card(ExFxD)

Card(ExFxD)=Card(E) x Card(F) x Card(D)=4x3x5=60

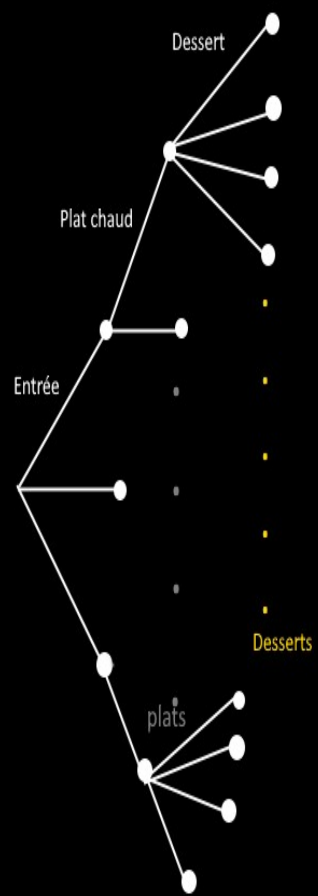
Rose a 60 choix possibles de repas différents du coup rose prends du temps et ne sait plus trop quoi choisir mais c'est pas grave parce que Paul, qui est le serveur, bien sûr l'aide en lui proposant le Menu du jour.

Exercice 6: Dénombrement - Principe multiplicatif et menu

Une cantine propose en self-service un choix de trois entrées, de deux plats chauds et de quatre desserts. Deux plateaux repas sont dits identiques lorsqu'ils sont composés de la même entrée, du même plat chaud et du même dessert.

1. Combien de plateaux repas différents peut-on constituer dans cette cantine ?
2. Un camarade compose au hasard un plateau repas pour vous, un jour où un seul plateau vous fait envie. Quelle est la probabilité que ce choix vous convienne?
3. Même question un jour où vous aimez tout sauf un des desserts.
4. À la demande des élèves, il est décidé qu'un plat supplémentaire sera préparé. Ce plat doit-il être une entrée, un plat chaud ou un dessert pour que les élèves aient le maximum de choix pour leur plateau repas?

Soit E l'ensemble des entrées. Card(E)=3
Soit P l'ensemble des plats chauds. Card(P)=2
Soit D l'ensemble des desserts. Card(D)=4



1) Calcul du Card(ExPxD)
Card(E) x Card(P) x Card(D) = 3x2x4= 24

2) L'univers est composé de 24 issues possibles soit Ω=24.
Les issues sont équiprobables.

$$\text{La probabilité} = \frac{\text{Plateau qui fait envie}}{\text{Cas possibles}} = \frac{1}{24} = 0{,}04166... = 4{,}166...\%$$

3) Dénombrement du nombre de plateaux possibles avec 1 type de dessert sur les 4 proposés. On appel ce sous–ensemble F. Card(F)=1
Card(ExPxF)=Card(E) x Card(P) x Card(F)= 3x2x1 = 6
Il y a 6 plateaux possibles pas aimés.

$$\text{La probabilité} = \frac{\text{Plateau qui fait envie}}{\text{Cas possibles}} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$$

4) Calcul pour une entrée supplémentaire :4.2.4=32
Calcul pour une plat chaud supplémentaire:3.3.4=36
Calcul pour une plat chaud supplémentaire:3.2.5=30

Il faut ajouter un plat chaud pour que les élèves aient un maximum de choix.

Exercice 7: Dénombrement - Plaque d'immatriculation - Principe multiplicatif

La plaque d'immatriculation d'une voiture comporte deux lettres, distinctes de O, I et U pour éviter la confusion avec 0, 1 et V. Puis trois chiffres entre 0 et 9 inclus puis encore deux lettres distinctes de O, I et U. Déterminer le nombre de plaques d'immatriculation différentes possibles.

Soit L l'ensemble des lettres possible. Card(L)=23
Soit C l'ensemble des chiffres possible. Card(E)=10

Calcul du nombre de plaque possibles.
Card(LxLxCxCxCxLxL)=23^4x10^3=279 841 000

Il y a 279 millions, 841 milles plaques d'immatriculation différentes possibles.

Exercice 8: Dénombrement - digicode - principe multiplicatif

Un digicode à l'entrée d'un immeuble est constitué d'un clavier avec 13 touches marquées des trois lettres U, V et X et des 10 chiffres de 0 à 9. Un code est formé d'une lettre suivie d'une liste de 3 chiffres non nécessairement distincts. Rose a oublié le code.

1. Parmi combien de code différents Rose doit faire son choix?
2. Rose se souvient de la lettre du code. Parmi combien de code différents Rose fait-elle son choix?
3. Rose maintenant se souvient en plus de la lettre que les trois chiffres du code sont 6, 2 et 9, mais ne se souvient plus de l'ordre. Quelle est la probabilité que Rose trouve le bon code dès le premier essai?

Soit L l'ensemble des lettres possibles. Card(L)=3
Soit C l'ensemble des chiffres possibles. Card(C)=10

1) Calcul du nombre de codes possibles.
Card(LxCxCxC)=$3x10^3$=3000
Rose doit faire son choix parmi 3000 codes différents.

2) Calcul du nombre de codes possibles sachant 1 lettre.
Card(LxCxCxC)=1.10^3=1000
Rose doit faire son choix parmi 1000 codes différents.

3) L'univers est composé de 3.2 issues possibles soit Ω=6
Les issues sont équiprobables.

Soit A la probabilité du bon code.
P(A)=1/6=0,166…=16,66.. %
Rose a 1 chance sur 6 de trouver le bon code.

DÉNOMBREMENT
ARRANGEMENT & COMBINAISON

Factorielle

Soit n un entier naturel non nul. On appelle factorielle n le nombre noté $n!$ Et qui vaut
$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$
Le symbole ! Est placé après n mais on lit « factorielle n »

Par convention $0!=1$
On verra avec les combinaisons pourquoi on choisi cette convention.

Exemple :
Déterminer la valeur de 5!
$5!=5.4.3.2.1=120$

k–uplet

Un k–uplet d'élément de E est une liste ordonnée de k élément de E distinct ou pas.

- Mathématiquement, un k–uplet élément de E est un élément de $\underbrace{E \times \ldots \times E}_{k}$
- Un k–uplet s'appelle aussi une k–liste.
- Les **parenthèses** (… ;… ;…) indique que l'on affaire à un k–uplet alors que les accolades indiquent que l'on a affaire à un ensemble. On le verra avec les combinaison.
- L'ordre compte dans un k–uplet (a;b;c) ≠ (b;c;a)
- Il peut y a avoir des répétitions dans un k–uplet
  (p;a;p;i) est un 4–uplet de l'ensemble des lettres de l'alphabet E={a;b ;…;z} et il y a répétition de la lettre *P*.
- Un k–uplet correspond à un **tirage successif** de ***k*** boules (l'une après l'autre donc avec ordre) et **avec remise** (on remet la boule après chaque tirage) dans une urne contenant n boule discernable.

Exemple: Les mots
Un mot de 5 lettres peut être vu comme un 5–uplet de l'ensemble {a;b ;…;z} où E est l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet.
Le mot babar peut être vu comme un 5–uplet (b;a;b;a;r)

Propriété :
Le **nombre** de ***k*–uplets** d'un ensemble de n éléments est de $\boldsymbol{n^k}$
On a ***n* choix** pour le **premier** élément, puis encore ***n*** pour le **second**, car le tirage est avec remise **et ainsi de suite**, ce qui donne $\underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{k} = n^k$

Exemple :
Déterminer le nombre de mot de 3 lettres (on ne compte pas les accents)
$26^3=17\,576$
Dit mathématiquement avec les k–uplets, on note E l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet {a;b;c ;…;z}. Soit n le nombre d'éléments de E on a donc $n=26$ et comme on veut des mots de 3 lettres on cherche le nombre de 3–uplet de E. Or on a vue que le nombre de k–uplets

d'un ensemble à n éléments est égal à n^k. Donc pour avoir le nombre de mots de 3 lettres, o,n applique cette formule avec n=26, k=3 et on trouve donc que le nombre de mot de 3 lettres est égal à 26^3.

Arrangement

Soit E un ensemble fini non vide à n éléments. Un arrangement de E est un k−uplet d'éléments distincts de E

- Autrement dit dans un arrangement, l'ordre compte car c'est un k−uplet mais il n'y a pas de répétition car les éléments doivent être distincts.
- Un arrangement correspond à un tirage successif de k boules (c'est à dire l'une après l'autre donc l'ordre compte) et sans remise (on ne remet pas la boule après le tirage) dans une urne contenant n boules discernables.
- $k \leqslant n$

Exemple :
(s;o;p ;h;i;e) et (g;a;s;p,a,r,d) sont−ils des arrangements ?
Oui et Non

Propriété :
Le nombre d'arrangement de k éléments d'un ensemble ayant n éléments est égal à :
$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)$

- On a n choix pour le premier élément puis $n-1$ pour le second car les éléments doivent être distincts, puis $n-2$ pour le troisième et ainsi de suite et $n-k+1$ pour le k−ième c'est à dire le dernier. Donc au final.
- $k \leqslant n$
- Avec la notion de factorielle : $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$

Exemple une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. On tire 4 boules une par une et sans remise. Déterminer le nombre de tirage possibles

$\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{10\,!}{(10-4)\,!}=5040$ ou 10.9.8.7=5040

Permutation

Soit E un ensemble fini non vide à n éléments. Une permutation de E est un n−uplet d'éléments distincts de E.

- Une permutation correspond à l'idée de rangement ou mélange de tous les éléments de E.
- Une permutation correspond à un arrangement « complet » c'est à dire de tous les éléments. Autrement dit une permutation est un arrangement avec $k=n$.
- Une permutation correspond à un tirage successif de n boules (c'est à dire l'une après l'autre donc l'ordre compte) et sans remise (on ne remet pas la boule après le tirage) des n boules de l'urne.

Exemple : Soit l'ensemble E={a;b;c}. (b;a;c) est une permutation de E
car (b;a;c) est un n−uplet d'éléments distincts de E : tous les éléments de E sont présents et il n'y a pas de répétition.

Propriété :
Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est n!

- Comme une permutation est un arrangement complet, pour trouver $n!$ Il suffit d'appliquer la formule des arrangements avec $k=n$ ce qui donne n x $(n-1)$ x ... x $1=n$!
- Une autre façon de voir les choses : on a n choix pour le 1er élément, puis $n-1$ pour le second puis $n-2$ pour le troisième, ... , 1 pour le n–ième c'est à dire le dernier. Au final on a donc n x $(n-1)$ x ... x1 = $n!$ Permutation.

Exemple un professeur doit interroger 4 élèves à l'oral. Déterminer dans combien d'ordre différent le professeur peut le faire.
Il y a 4 possibilités pour le premier élève, puis 3 pour le second, puis 2 pour le troisième, puis une seule pour le dernier. Il y a donc 4 x 3 x 2 x 1=4!=24 ordres différents possibles.

Dit mathématiquement il sagit d'un tirage avec ordre (l'ordre compte) et sans répétition de 4 éléments dans l'ensemble des 4 élèves. On note l'ensemble des 4 élèves : E={eleve1; eleve2 ; eleve3 ; eleve4}. Chaque tirage correspond à une permutation des éléments de E. Donc le nombre de tirage possible est égal au nombre de permutation de E c'est à dire à 4!

Combinaison

Soit E un ensemble fini à n élément et k un entier naturel avec $k \leqslant n$. Une combinaison de k éléments de E est une partie (c'est à dire un sous–ensemble) de E à k éléments

- Le nombre de combinaison de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n. »
- $\binom{n}{k}$ est appelé aussi coefficient binomial.
- Ne pas confondre {a;b;c} et (a;b;c)
  Dans (a;b;c) l'ordre compte, dans {a;b;c} l'ordre ne compte pas.

Propriété 1:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple :

- Dans une classe de 35 élèves, les élèves décident d'envoyer une délégation de 4 élèves voir le proviseur. Déterminer le nombre de délégations que l'on peut faire. Choisir une délégations c'est choisir 4 élèves parmi 35. Dans une délégation l'ordre ne compte pas. Une délégation est un sous ensemble de la classe. Si l'on numérote les élèves de 1 à 35, une délégation possible est {4:10;5;23} Une délégation est donc une combinaison de 4 éléments. Donc le nombre de délégation est égale au nombre de combinaison de 4 éléments parmi 35, c'est à dire $\binom{35}{4}=\frac{35!}{4!(35-4)!}$

Propriété 2 :

$$\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-\mathrm{k}}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(\mathrm{n}-k))!}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!(\mathrm{k})!}$$

Exemple 2

- Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire les 4 délégués. Dans cet exercice, on ne distingue pas les délégués et les délégués–adjoints.
  a) Combien existe t–il de possibilité pour cette élection ?

b) Emma dit qu'elle ne souhaite pas être élue si Bastien est élu. Dans ces conditions combien existe–t–il de possibilités ?

a)
$$\binom{34}{4}=\frac{34!}{4!30!}=\frac{34\times33\times32\times31}{4\times3\times2}=46376$$

b) Si Emma et Bastien sont élus il reste à choisir 2 élèves parmi 32 élèves.
$$\binom{32}{2}=\frac{32!}{2!30!}=\frac{32\times31}{2}=496$$

Ou si Emma et Bastien ne sont pas élus il reste à choisir parmi 32 élèves.
$$\binom{32}{30}=\frac{32!}{30!2!}=\frac{32\times31}{2}=496$$

Il y a donc 46 376 – 496 = 45 880 possibilités pour que Emma soit élu sans que Bastien le soit également et que Bastien soit élu sans qu'Emma le soit aussi.

Propriété 3 :
$$\binom{n}{0}=1$$

Note personnelle :
« 0 » désigne le sous ensemble vide d'un Ensemble à n éléments, hors quelque soit l'ensemble noté E, il lui appartient un unique sous–ensemble vide

$\binom{n}{0}$ désigne le nombre de partie de E à 0 élément. Or il n'y a qu'une partie à 0 élément : L'ensemble vide $\emptyset$ donc $\binom{n}{0}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\frac{\cancel{n!}}{0!\cancel{n!}}=1.\frac{1}{0!}$

$$\frac{1}{0!}=1\Leftrightarrow 0!=1$$

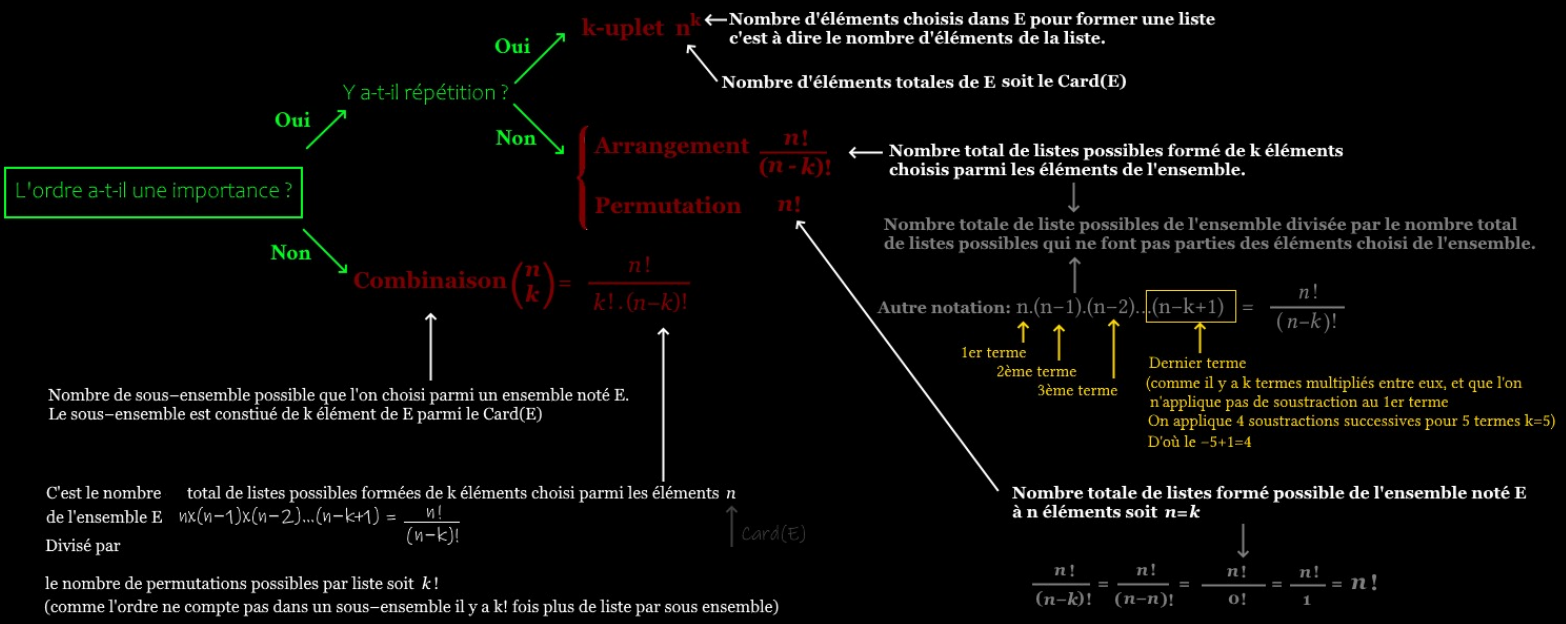
Propriété 4 :
$$\binom{n}{1}=n$$

Note personnelle :
1 désigne le sous–ensemble à 1 élément d'un ensemble noté E à n élément.
Il y a donc n éléments à 1 éléments (pas de répétition dans un ensemble).

$\binom{n}{1}$ n désigne le nombre de partie de E à 1 élément. Or il y a n partie à 1 élément dans un ensemble à n éléments. Donc $\binom{n}{1}=n$ Exemple : E={a;b;c}. L'ensemble E à 3 partie à 1 élément {a}, {b} et {c}. Cette relation a un sens sous réserve que $n\geqslant1$

Méthode

1) Comment écrire le résultat : Coder un résultat au hasard.
2) Choisir k éléments parmi n



Exemple 1
Combien de mot composé de 3 lettres
de l'alphabet peut−on formé ?
L'ordre compte – Il y a répétition – 3-uplet

Exemple 2
On dispose de 26 jetons marqués de 26 lettres de l'alphabet.
On tire successivement et sans remise 3 jetons.
Combien de mot de 3 lettres peut−on former.
L'ordre compte – il n'y a pas répétition – arrangement (k=3)

Exemple 3
Quel est le nombre d'anagrammes du mot « MDR » ?
L'ordre compte – Il n'y a pas de répétition possible (puisque c'est un anagramme) – permutation (k=n=3)

Exercice 4
On dispose de 6 jetons marqués des 6 couleurs différentes.
On tire simultanément 3 jetons.
Combien de possibilités existe−t−il ?
L'ordre ne compte pas – combinaison

Soit un ensemble fini E à n éléments. $\mathrm{Card}(E^k)=n^k$ (nombre de K–uplet)

Relation de Pascal

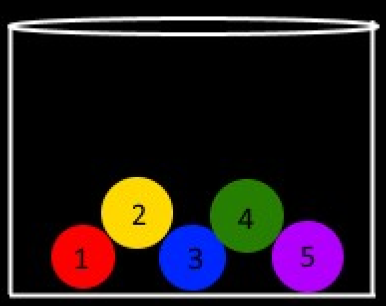
$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

<u>Conjoncture et démonstration de la relation de Pascal :</u>

On pose $n\in\mathbb{N}^*$, $k\in\mathbb{N}$ avec $1\leq k\leq n-1$

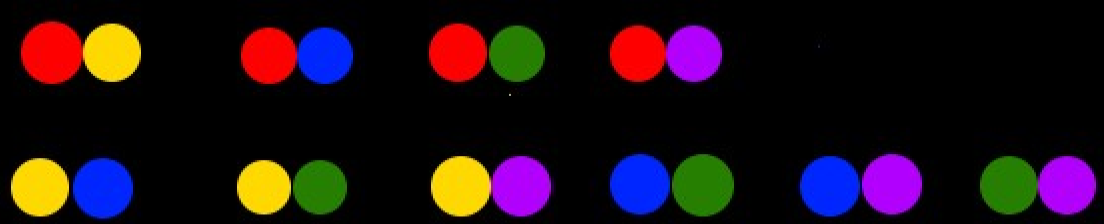
Lorsque $k=n$ $\binom{n}{n}=1$



<u>Conjoncture</u> :
Le but est de dénombrer tout les combinaisons de 2 parmi 5 avec comme méthode de compter les sous–ensembles avec la boule rouge et ceux sans.

Une fois la boule rouge en main toutes les parties à 2 éléments qui contiennent la boule rouge si on essai de les dénombrer revient à dénombrer toutes les partie à 1 élément parmi les 4 boules restantes.

Et pour les parties sans la boule rouge il s'agit de dénombrer toutes les parties à 2 éléments parmi les 4 boules restantes.



$\binom{4}{1}=4$

$\binom{4}{2}=6$

$\binom{4}{1}+\binom{4}{2}=10$

Démonstration :

$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!.(n-k)!}$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!.(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!.(n-1-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!.(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!.(n-1-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!.k}{(k)!.(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!.(n-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!.(k+(n-k))}{(k)!.(n-k)!} = \frac{(n-1)!.n}{(k)!.(n-k)!} = \frac{n!}{(k)!.(n-k)!}$$

Nombre total de partie d'un ensemble à n éléments.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

Conjoncture :

Ensemble à 1 éléments E={1}

Partie de E vide :{$\emptyset$} → $\binom{1}{0}=1$

Partie de E à 1 élément:{1} → $\binom{1}{1}=1$

$\wp$(E)=2=2^1

Ensemble à 2 éléments E={1;2}

Partie de E vide:{$\emptyset$} → $\binom{2}{0}=1$

Partie de E à 1 élément{1},{2} → $\binom{2}{1}=2$

Partie de E à 2 éléments {1,2} → $\binom{2}{2}=1$

$\wp$(E)=4=2^2

Ensemble à 3 éléments E={1;2;3}

Partie de E vide :{$\emptyset$} → $\binom{3}{0}=1$

Partie de E à 1 élément :{1},{2} ,{3} → $\binom{3}{1}=3$

Partie de E à 2 éléments :{1;2},{1;3},{2;3} → $\binom{3}{2}=3$

Partie de E à 3 éléments:{1;2;3} → $\binom{3}{3}=1$

$\wp$(E)=8=2^3

Ensemble à 4 éléments. E={1;2;3;4}

Partie de E vide :{$\emptyset$} → $\binom{4}{0}=1$

Partie de E à 1 élément :{1},{2} ,{3} ,{4} → $\binom{4}{1}=4$

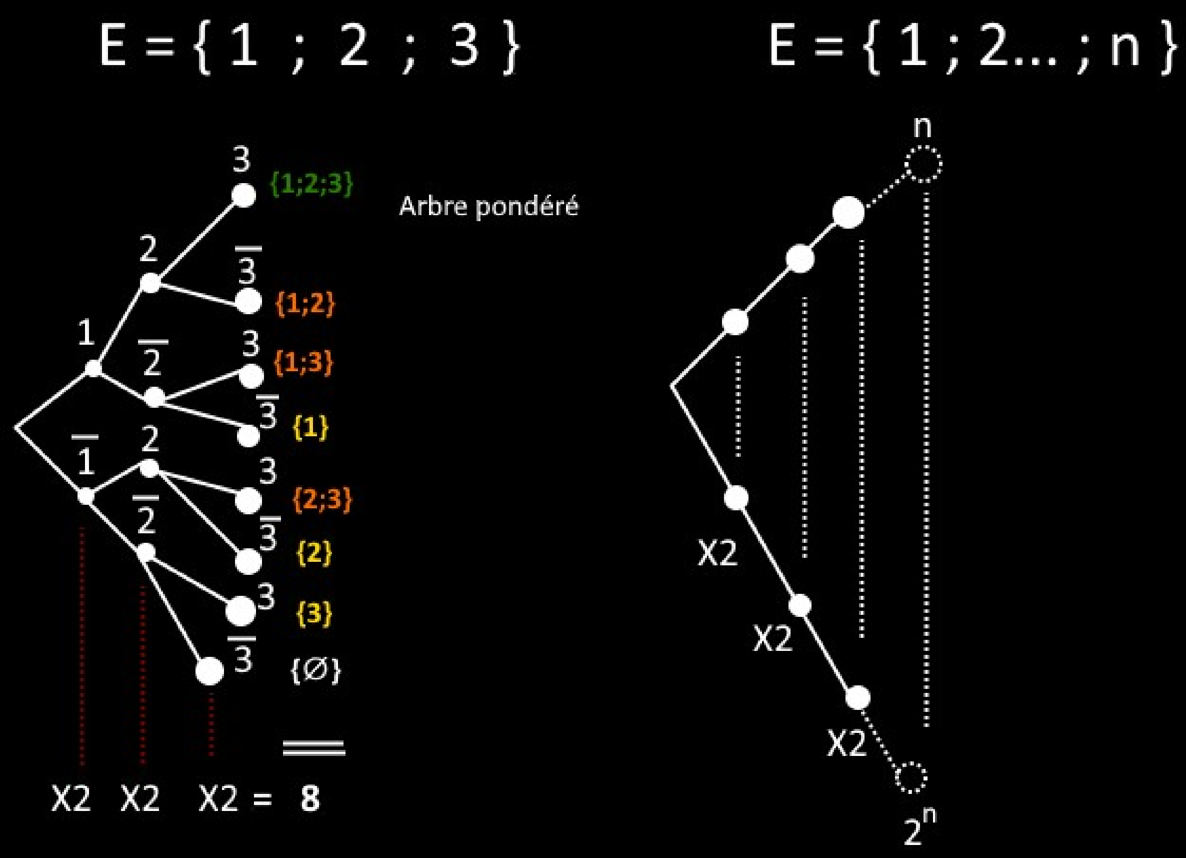
Partie de E à 2 éléments :{1;2},{1;3},{1;4},{2 ;3},{2;4},{3;4}→ $\binom{4}{2}=6$

Partie de E à 3 éléments:{1;2;3},{1 ;2 ;4},{1;3;4},{2;3;4} → $\binom{4}{3}=3$

Partie de E à 4 éléments:{1;2;3;4] → $\binom{4}{4}=1$

$\wp$(E)=16=2^4

Démonstration



Exercice 1: Dénombrement - tiercé - Mot - Arrangement Combinaison

1. Déterminer le nombre de tiercés possibles dans une course avec 15 chevaux et pas d'ex-aequo.
2. Déterminer le nombre de mots de quatre lettres, formés avec les 26 lettres de l'alphabet.
3. De combien de façons peut-on garer 4 voitures distinctes dans un parking à 6 places?
4. On place 10 points distincts sur un cercle. Dénombrer le nombre de droites passant par deux de ces points.

1) L'ordre compte et il n'y a pas de répétitions possibles.
Card(E)=15. Il s'agit d'un arrangement car seul les 3 premier arrivé compte.

$$A_{15}^{3}=\frac{15!}{12!}=2730$$

Il y a 2730 tiercés possibles.

2) L'ordre compte et il y a des répétition de lettres possibles.
Le nombre de 4–uplets possible est de 26^4=456 976.
Il y 456 976 mots formables.

3) L'ordre compte il n'y a pas de répétition possibles
Comme il y a 6 places et 4 voitures

$$A_{6}^{4}=\frac{6!}{2!}=360$$

4) L'ordre ne compte pas. Il s'agit d'une combinaison.

$$\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!.8!}=45$$

Il y a 45 droites possibles

Exercice 2: Dénombrement - Arrangement – Combinaison

1. On dispose de 8 souris, quatre mâles et quatre femelles. Combien de couples peut-on former afin qu'ils se reproduisent?
2. On choisit deux villes parmi 7 pour une course cycliste entre ces 2 villes. Combien y-a-t-il de choix si on ne distingue pas ville de départ et d'arrivée?
3. Même question mais en distinguant ville de départ et d'arrivée?
4. Dix nageurs participent à une course. Combien y-a-t-il de podiums possibles? Il n'y a pas d'ex-æquo. .

1) Il s'agit d'un dénombrement d'ensemble de produit.
Soit E l'ensemble des homme Card(E)=4 et F l'ensemble des femmes Card(F)=4
Card(ExF)=Card(E) x Card(F)=4 x 4=16

On peut former 16 couples possibles afin d'agrandir la colonies.

2) L'ordre ne compte pas il s'agit d'une combinaison.
Calcule du coefficient binomial :

$$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!.5!}=21$$

Il y a 21 choix possibles pour ces 2 villes dans l'organisation de cette course de cycliste.

3) L'ordre compte et il n'y a pas de répétitions possibles de villes.

$$A_7^2=\frac{7!}{5!}=42$$

Il y a 42 choix possibles pour ces 2 villes dans l'organisation de cette course de cycliste.

4) L'ordre compte et il n'y a pas de répétition possibles.

$$A_{10}^3=\frac{10!}{7!}=720$$

Il y a 720 podiums possibles.

Exercice 3: Dénombrement - Tirage avec et sans remise et simultané

On tire 4 boules dans une urne contenant 10 boules de couleurs différentes. Déterminer le nombre de tirages possibles lorsque:

a. on tire les 4 boules successivement et avec remise.
b. on tire les 4 boules successivement et sans remise.
c. on tire les 4 boules simultanément.

a) L'ordre à de l'importance et la répétition de boules de couleurs est possible
Il s'agit d'un 4–uplet d'un ensemble à n=10 éléments soit :
$10^4=10000$
Il y a 10 000 tirages possibles.

b) L'ordre à de l'importance et il n'y a pas de répétions de bouless de couleurs possible.
Il s'agit d'un arrangement

$$A_{10}^{4}=\frac{10!}{6!}=5040$$

Il y a 5 040 tirages possibles.

c) L'ordre n'a pas d'importance car les boules sont tirées simultanément.

$$\binom{10}{4}=\frac{10!}{4!.6!}=210$$

Il y a 210 tirages possibles.

Exercice 4 Dénombrement - Arrangement Combinaison

Huit nageurs dont un français participent à une compétition. Un podium est constitué du premier, du deuxième et du troisième. Il n'y a pas d'ex-æquo.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles?
2. Déterminer le nombre de podiums possibles avec le nageur français de deux façons différentes.

1) L'ordre a de l'importance et il n'y a pas de répétitions possibles.

$$A_8^3=\frac{8!}{5!}=336$$

Il y a 336 podium possibles.

2)

1er Façon

L'ordre à une importance et il n'y a pas de répétition possible.

Le Français peut arriver 1er ,2ème ou 3ème. Soit 3 possibilités.

Il reste donc 2 places pour 7 nageurs:

$$A_7^2=\frac{7!}{5!}=42$$

Calcul du nombre de podium possibles :

3.42=126

Il y a 126 podiums possibles.

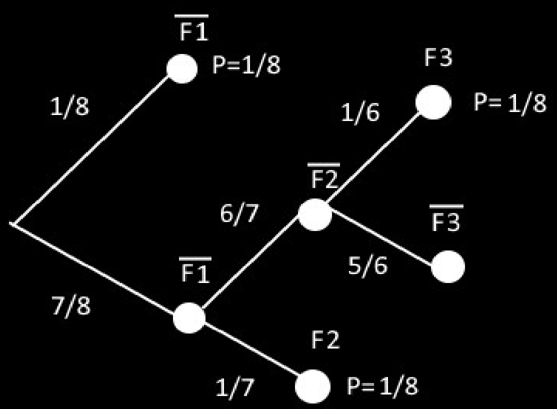
2ème façon

L'univers est composé de 8.7.6 issues possibles soit Ω=336

Les issues sont équiprobables

Soit P(F1) la probabilité que le Français arrive à la 1er place, P(F2) le Français arrive 2ème et P(F3) Le français arrive 3ème.

Les probabilités sont indépendantes : $P_{F1}(F2)=P(F2)$



D'après la loi des probabilités totales

P(F)=1/8+1/8+1/8=3/8

La probabilité que le Français arrive sur le podium est de 3/8 et comme il y a 336 podiums possibles.

Calcul du nombre de podium avec le Français

336.3/8=126

le nombre de podiums possibles avec le nageur Français est de 126.

Exercice 5: Dénombrement - digicode

Un digicode à l'entrée d'un immeuble est constitué d'un clavier avec 13 touches marquées des trois lettres U, V et X et des 10 chiffres de 0 à 9. Un code est formé d'une lettre suivie d'une liste de 3 chiffres non nécessairement distincts. Rose a oublié le code.

1. Parmi combien de code différents Rose doit faire son choix?
2. Rose se souvient de la lettre du code. Parmi combien de code différents Rose fait-elle son choix?
3. Rose maintenant se souvient en plus de la lettre que les trois chiffres du code sont 6, 2 et 9, mais ne se souvient plus de l'ordre. Quelle est la probabilité que Rose trouve le bon code dès le premier essai?

Soit A l'ensemble des lettres Card(A)=3
Soit B l'ensemble des chiffres Card(B)=10

1) $Card(AxBxBxB)=Card(A) \times Card(B^3)=3.10^3=3\ 000$
Rose doit choisir parmi 3 000 codes différents

2) $Card(B^3)=1\ 000$
Rose doit choisir parmi 1 000 codes différents.

3) Soit E l'ensembles des bon chiffres E={6;2;9} Card(E)=3
Le nombre de permutation possible est 3!=6
Soit C la bonne combinaison.
P(C)=1/6
Rose à 1 chance sur 6 de trouver le bon code dès l'essai n°1.

Exercice 6: Dénombrement - Plaque d'immatriculation

La plaque d'immatriculation d'une voiture comporte deux lettres, distinctes de O, I et U pour éviter la confusion avec 0, 1 et V. Puis trois chiffres entre 0 et 9 inclus puis encore deux lettres distinctes de O, I et U. Déterminer le nombre de plaques d'immatriculation différentes possibles.

Soit E l'ensemble des lettres de plaque. Card(E)=23
Soit F l'ensemble des chiffres de plaque. Card(F)=10

$\text{Card}(E^2 x F^3 x E^2)=23^2 x 10^3 x 23^2=279\,841\,000$
Il y a 279 millions 841 milles plaques disponibles.

Exercice 7: Dénombrement - Arrangement Combinaison

On dispose de 6 cages sans limite de capacité. 3 cochons d'Inde discernables se précipitent dans les cages. De combien de façon peuvent-ils occuper les cages?

L'ordre compte et il y a des répétitions possibles. (dans les façons possibles d'occuper les cages par les rats) Il s'agit donc d'une 3–uplet
Le nombre totale de 3–uplet d'un ensemble de 6 cages est
$6^3=216$
Il y a 216 façons possibles pour les rats d'occuper les cages.

Exercice 8: Dénombrement - Cartes

On tire au hasard et simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. On constitue ainsi une main.

1. Matthias affirme que le nombre de mains possibles est égal à 32×31×30×29×28. Qu'en pensez-vous? Corriger si nécessaire.
2. Zoé affirme que le probabilité que la main ne contienne aucun cœur est égale à 24/32. Qu'en pensez-vous? Corriger si nécessaire.

1) L'ordre ne compte pas, il s'agit donc d'une combinaisons pas d'un arrangement puisque les cartes sont tirées simultanément.

$$\binom{32}{5}=\frac{32!}{5!.27!}=201376$$

2 Il y a 8 cartes cœurs dans un jeu de 32 cartes. Le nombre de mains possibles sans cœur est de :

$$\binom{24}{5}=\frac{24!}{5!.19!}=42504$$

Soit A la probabilité que la main ne contienne pas de cœur est de
P(A)=42 504 / 201 376 ≃ 2,11 %

Exercice 9: Dénombrement - rangement

Sur une étagère se trouvent 12 livres différents : 5 de mathématiques, 4 de physique-chimie et 3 de SVT.

1. De combien de manières différentes peut-on ranger ces livres sur l'étagère.
2. De combien de manières différentes peut-on ranger ces livres sur l'étagère en ayant les livres de mathématiques côte à côte ?

1) L'ordre à une importance et il n'y a pas de répétitions possibles. Il s'agit d'une permutation.
Il y a 12! façon différentes de ranger ces livres.

2) Soit F le sous ensemble des livres hors mathématiques. Card(F)=7
Le nombre de permutations possibles est 7!
Soit G le sous ensemble des livres de mathématique. Card(G)=5
Le nombre de permutation possible est de 5!
Il y a 8 façons possibles de mètres les livres de mathématiques côte à côte
Calcul de rangements possibles
5!.7!.8=5!.8!
Il y a 4 838 400 manières différentes de ranger les livres sur l'étagère.

Exercice 10 Dénombrement - Loto Joker Quinté

Un joueur se demande ce qu'il en coûte de jouer tous les résultats possibles d'un jeu de hasard afin d'être sûr de gagner. Il s'intéresse au loto, au Joker et au Quinté.

1. Au Loto, il s'agit d'un tirage au hasard de 6 nombres parmi 49. Un même nombre ne peut être tiré plusieurs fois et l'ordre n'est pas pris en compte. Le prix d'une grille de loto est de 2 euros.
2. Au Joker, il s'agit d'un tirage successifs de 7 chiffres au hasard parmi les chiffres de 0 à 9. Un même chiffre peut être tiré plusieurs fois. Un jeu coûte 1 euro.
3. Au Quinté, on s'intéresse à l'arrivée dans l'ordre des 5 premiers chevaux d'une course comportant 18 partants. Le prix d'un pari est de 1,5 euro.

1) L'ordre n'est pas prise en compte, il s'agit d'une combinaison.

$$\binom{49}{6}=\frac{49!}{6!.43!} = 13\,983\,816$$

Calcul du coût total :

13 983 816 x 2 = 27 967 632€

2) L'ordre a de l'importance et il peut y avoir répétitions de chiffres.

Il s'agit d'un 7–uplet d'un ensemble à 10 éléments.

10^7=10 000 000

Le coût total est de 10 millions d'euros.

3) L'ordre a une importance et il n'y a pas de répétitions possibles. Il s'agit d'un arrangement.

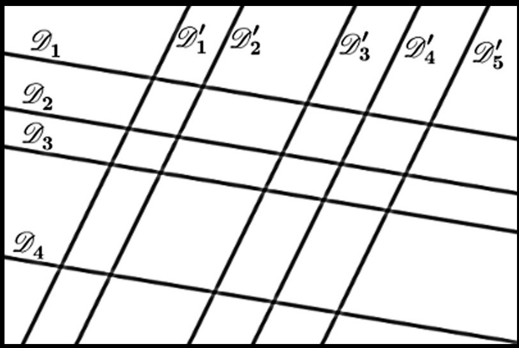
$$A_{18}^{5}=\frac{18!}{13!} =1\,028\,160$$

Calcul du coût total :

1 028 160 x 1,5= 1 542 240€

Exercice 11: Dénombrement et géométrie

Dans la figure ci-dessous, les droites D1, D2, D3 et D4 sont parallèles.
De plus, les droites D′1, D′2, D′3, D′4, et D′5 sont parallèles.



Combien cette figure contient-elle de parallélogramme non aplatis?

1) Un parallélogramme est composé de 2 lignes parmi D et 2 lignes parmi D'

Calcul du nombre de couple de droites D

$$\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!.2!}=6$$

Calcul du nombre de couple de droite D′

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!.3!}=10$$

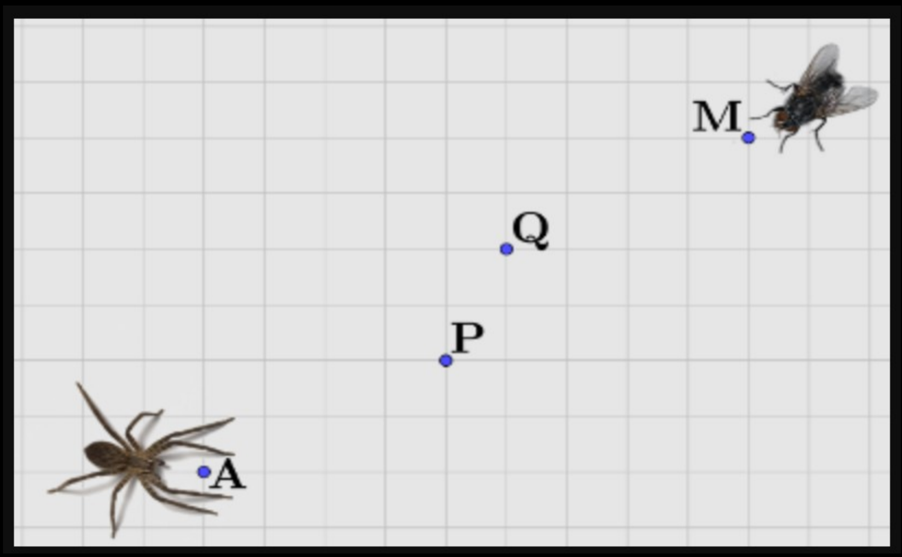
Calcul du nombre de paralélogrammes

6.10=60

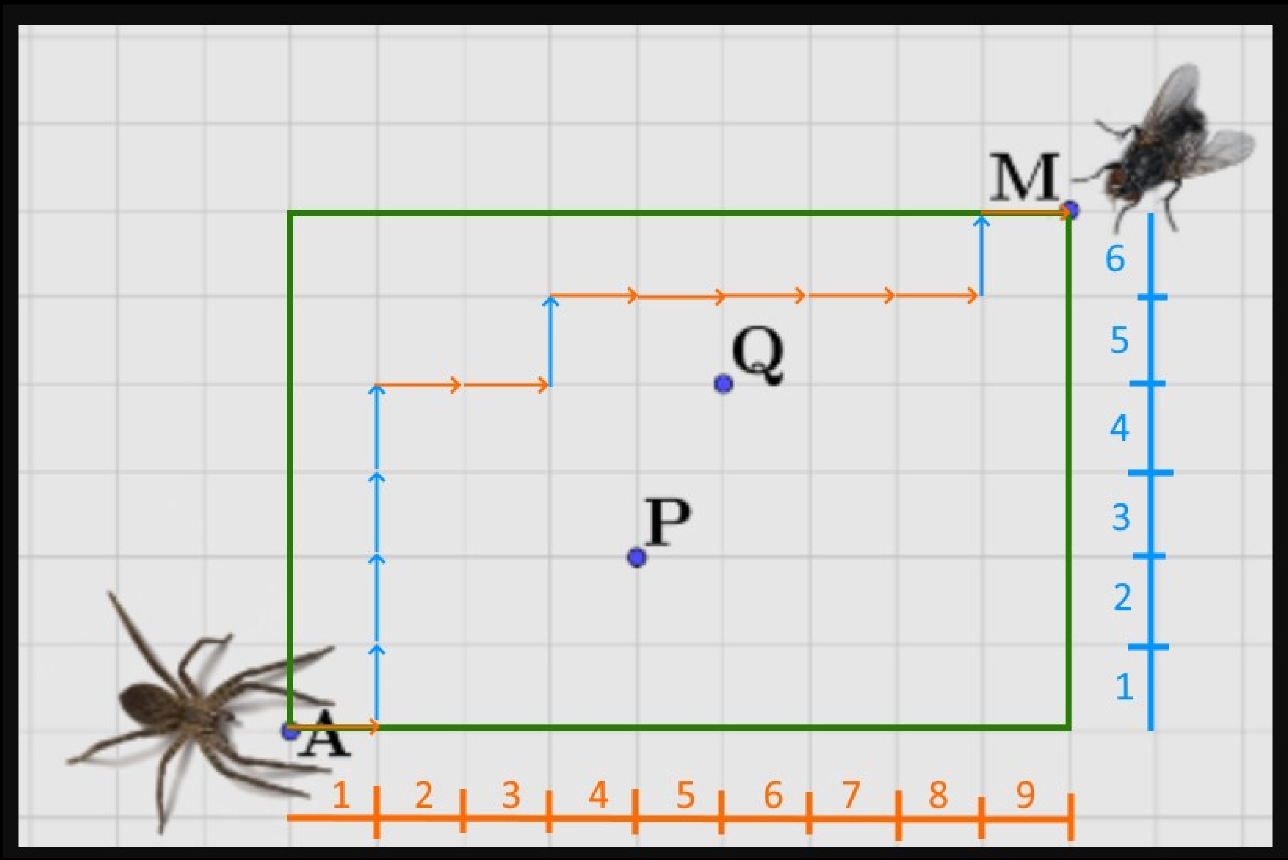
Cette figure contient 60 paralélogrammes.

Exercice 12:
Dénombrement et déplacement sur une grille

Une araignée en A se déplace sur une toile quadrillée représentée ci-dessous. Elle veut atteindre la mouche en M et se déplace uniquement de gauche à droite et de bas en haut.



1. Dénombrer tous les chemins possibles.
2. Dénombrer tous les chemins passant par P.
3. Dénombrer tous les chemins passant par P et Q.
4. Dénombrer tous les chemins passant par P ou Q.



1) Il y a 2 type de déplacement possible. Vers la droite ou vers le haut.
Il y a 9 déplacements horizontaux et 6 déplacements verticaux soit quelques soit le chemin parcouru 15 déplacements au total.

A chaque déplacement il y a 2 possibilités donc l'ordre ne compte pas. Il s'agit d'une combinaison.

$\binom{15}{9}$ ou $\binom{15}{6}$ on en déduit que $\binom{15}{9}=\binom{15}{6}$ car n−k=15−6=9 $\binom{n}{k}=\binom{n}{k-n}$

$\binom{15}{9}=\frac{15!}{9!.6!}=5005$

Il y a 5005 chemins possibles.

2) Il y a 2 parties possibles de chemins passant par P.
1^er^ partie : 4 déplacements horizontaux et 2 verticaux soit 6 déplacements possibles au total.
Puis
2^ème^ partie : 5 déplacements horizontaux et 4 verticaux soit 9 déplacements possibles au total.

$\binom{6}{2}.\binom{9}{4}=\frac{6!}{2!.4!}.\frac{9!}{4!.5!}$ = 15 . 126 = 1890

Il y a 1890 chemins possibles passant par P

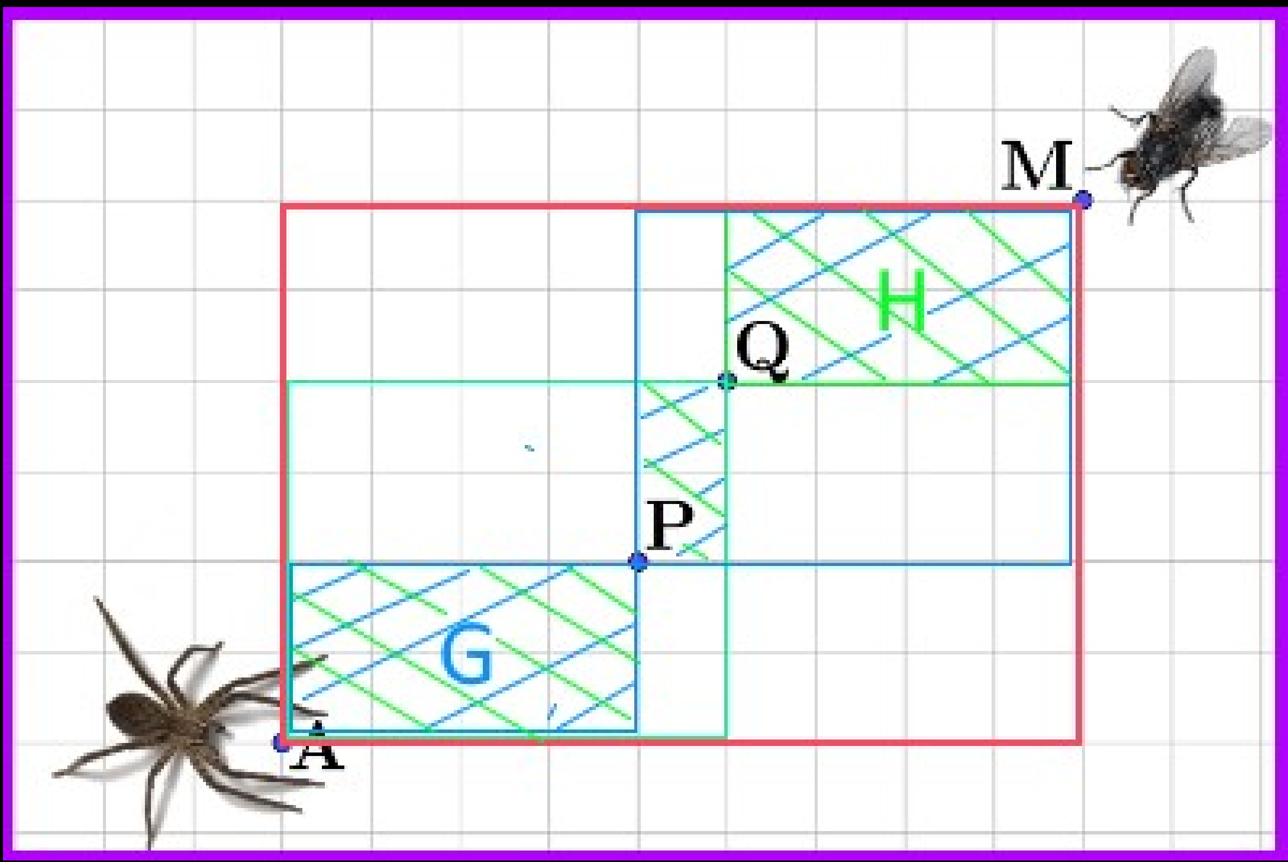
3 Il y a 3 parties possibles de chemins passant par P et Q
1^er^ Parties : Les chemins passant pat P soit 15.
2^ème^ partie : Les chemins passant par P et Q $\binom{3}{1}=3$
3^ème^ parties : Les chemin passant par Q soit 15

Il y a 15.3.15 chemins possibles soit 675
Il y a 675 chemins possibles.

4) On note :
G l'ensemble des chemins passant par P. Card(G)=1890
H l'ensemble des chemins passant par Q. Card (H)=1890

Card(G∪H)=Card(G)+Card(H)−Card(G∩H)
Card(G∪H)=1890+1890−675=3105

Il y a 3105 chemins possibles passant par P ou Q

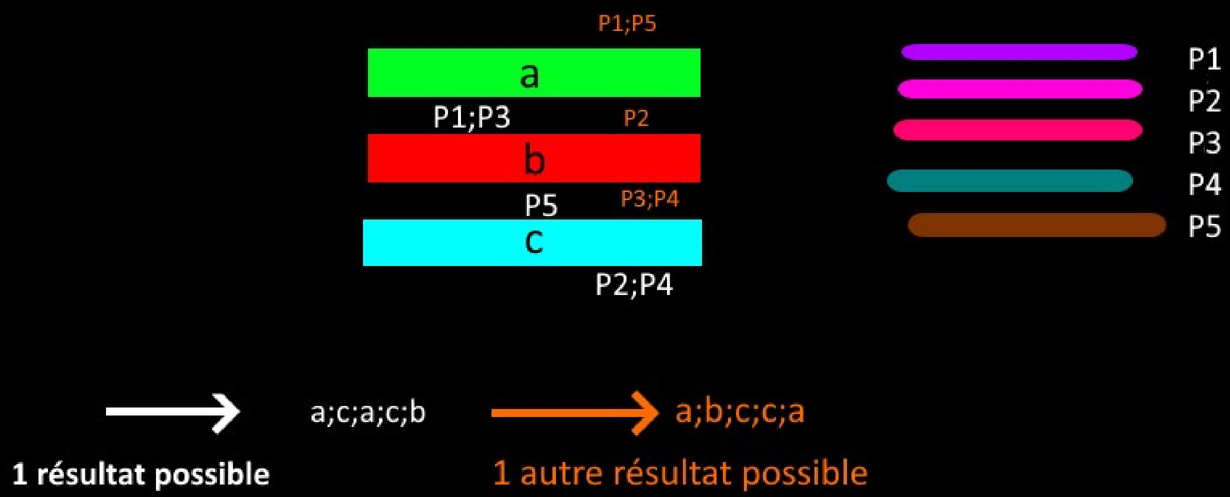


Exercice 15: Dénombrement et rangement

On dispose de trois tiroirs pour ranger cinq pulls différents. Chaque tiroir peut contenir les cinq pulls.

1. De combien de façons peut-on réaliser le rangement?
2. Combien y-a-t-il de rangements possibles pour lesquels aucun tiroir ne reste vide?

1



L'ordre compte et il y a répétition possible des tiroirs où sont rangés les pulls.
Il s'agit 5–uplet d'un ensemble à 3 éléments.
$3^5=243$

Il y a 243 façon de ranger les pulls dans ces tiroirs.

2) On raisonne avec l'évènement contraire
Combien y a t'il de rangement possible avec au moins un tiroir vide.

Si a est vide :
$2^5=32$
Contient 2 solutions
2 tiroirs vide soit
$32-2=30$

Si b est vide :
$2^5=32$
Contient 2 solutions
2 tiroirs vide soit
$32-2=30$

Si c est vide
$2^5=32$
Contient 2 solutions
2 tiroirs vide soit
$32-2=30$

Si a et b sont vides
$1^5=1$

Si a et c sont vides
$1^5=1$

Si b et c sont vide
$1^5=1$

Il y a au moins 1 tiroir vide pour $30.3+3=93$ façon de ranger les pulls

Calcul du nombre de rangement possible pour aucun tiroir vide
$243-93=150$
Il a donc 150 rangements possibles.

Exercice 16: Dénombrement et anagramme

Lorsqu'on permute les lettres d'un mot, on obtient une anagramme de ce mot.
On s'intéresse aux anagrammes du mot DIJON sans tenir compte de la signification ou non.

1. Combien y-a-t-il de telles anagrammes ?
2. Combien de ces anagrammes commencent par la lettre D ?
3. Combien de ces anagrammes commencent par une consonne ?
4. Combien de ces anagrammes commencent par une voyelle et finissent par une consonne ?

1) Il s'agit d'un ensemble à 5 lettres.
Il y a 5x4x3x2x1 possibilités soit 5!
Il y a 120 anagrammes possibles.

2) Si la 1er lettre D est fixé il s'agit d'un ensemble à 4 lettres.
Il y a 1x4x3x2x1 possibilités soit 4!
Il y a 24 anagrammes possibles.

3) Il y a 3 consonnes dans cet ensemble de 5lettre soit
3x4!
Il y a 72 anagrammes possibles.

4) Si la 1er lettre est fixé à une consonne et la derniere lettre à une voyelle. Il s'agit d'un ensemble de 3 lettres.
Il y a (1x3x2x1x1)x2x3=3!x6=36

Exercice 17: Dénombrement et anagramme

Lorsqu'on permute les lettres d'un mot, on obtient une anagramme de ce mot.
Dénombrer les anagrammes de SOPHIE, GASPARD puis ANANAS.

L'ordre a une importance et il n'y a pas de répétition. Il s'agit d'une permutation.
Pour SOPHIE est un ensemble de 6 lettres soit 6!
Il y a 720 anagrammes possibles.

Pour GASPARD il s'agit d'un ensemble de 7 lettres différentes dont un duo de 2 lettres identiques.
Il y a donc un double à chaque combinaisons de lettres
GA_1 SPA_2RD et GA_2 SPA_1RD ; A_1GSPA_2RD et A_2GSPA_1RD;etc...

$$\frac{7!}{2}=2520$$

Il y a 2520 anagramme possibles.

Pour ANANAS il s'agit d'un ensemble de 6 lettres dont un 2 duos de 2 lettres identiques et un trio de 3 lettres identiques.
Il y a donc un double à chaque combinaison par un triplet. Et dans ce triplet il y a 3! permutation possibles.

$$\frac{6!}{2!.3!}=60$$

Il y a 60 anagrammes possibles.

Exercice 18: Dénombrement et Poker

Au poker, on utilise un jeu de 52 cartes : 13 valeurs (de l'as au 10, puis valet, dame, roi) en quatre familles (cœur, carreau, pique, trèfle). Une main est un ensemble de 5 cartes différentes.

1. Combien de mains différentes peut recevoir un joueur ?
2. Une couleur est une main constituée de 5 cartes de la même famille.
   a. Combien y a-t-il de mains de ce type en cœur ?
   b. Combien y a-t-il de mains de ce type en tout ?
3. Un carré est une main composée de 4 cartes de la même valeur et d'une cinquième carte quelconque.
   a. En considérant la cinquième carte, déterminer combien de carrés présentent le numéro 10 répété 4 fois ?
   b. Combien y a-t-il de carrés en tout ?

1) Dans une main l'ordre n'a pas d'importance. Il s'agit d'une combinaison.

$$\binom{52}{5}\frac{52!}{5!.47!}=2\,598\,960$$

2a) $\binom{13}{5}\frac{13!}{5!.8!}=1\,287$

Il y a 1287 mains de couleur à cœur.

2b) 1287 . 4 =5148

Il y a 5148 mains de ce type en tout.

3a) $52-4=48$ il reste 48 cartes sans les 4 Dix.

Il y a 48 carrés possibles.

3b) 48.13=624

Il y a 624 carrés en tout

Exercice 19: Dénombrement et Poker

Au poker, on utilise un jeu de 52 cartes : 13 valeurs (de l'as au 10, puis valet, dame, roi) en quatre familles (cœur, carreau, pique, trèfle). Une main est un ensemble de 5 cartes différentes. À l'aide de la calculatrice, retrouver les résultats présentés dans le tableau ci-contre.

Main	Combinaisons
Quinte flush	40
Carré	624
Full	3 744
Couleur	5 108
Quinte	10 200
Brelan	54 912
Deux paires	123 552
Paire	1 098 240
Carte haute	1 302 540
Total	2 598 960

Quinte flush : Il s'agit de 5 carte qui se suive de la même cœur.
Il y a 9 possibilités par couleur de quinte flush + 1 possibilité pour l'As qui est considéré comme 1 aussi. Soit 10possibilités.
$10.4=40$

Carré :
$52-4$ où les 4 cartes retirées sont un carré. Il reste 48 cartes restantes
Il y a 48 mains possibles par carrés.

Il y a 13 carrés différents soit :
$13.48=624$
Il y a 624 carrés possible

Full
Il y a pour les 3 cartes identiques $\binom{4}{3}=\frac{4!}{3!}=4$ possibilités
$13.4=52$ possibilités de 3 cartes identique dans le jeu

Il y a pour 2 cartes identiques $\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!.2!}=6$ possibilités.
$13.6=78$

Principe multiplicatif
On multiplie le nombre de mains possibles de 3 cartes identiques avec le nombre de mains possible de 2 cartes identique – 1 main qui correspond à la formation d'un carré. (12.6)
$52.72=3744$

Couleur
Le nombre de main possibles parmi 1 famille. Famille (cœur , trèfle carreau et pique)
$$\binom{13}{5}=\frac{13!}{5!.8!}=1287$$
Le nombre de couleur du jeu de carte sachant qu'il y a 4 familles.
1287.4=5148
Auquel on enlève les 40 Quinte flush soit
5148−40=5108

Quinte
Il y a 4^5 possibilités de 5 cartes qui se suivent.
Soit 1024 suites possibles.
Et il y a 10 valeur de départ possibles soit
10 240 suite possibles.
Auquel on retire les quintes flush soit
10 240 − 40 = 10 200

Brelan
Il y a 52 possibilités pour 3 cartes identiques.

Calcul des mains possibles avec 2 cartes parmi les 49 restantes.
$$\binom{49}{2}=\frac{49!}{2!.47!}=1176$$

Calcul du nombre de mains possibles avec 3 cartes identiques.
1176.52=58656

Auquel on enlève le nombre de full possibles
58 656 − 3744 = 54 912

Deux paires
Il y a pour 2 cartes identiques $\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!.2!}=6$
Comme il y a 2 pair dans une main on applique le principe multiplicatif.
6.6=36 soit 36 combinaisons possibles.

Il y a 13 valeurs possible pour 2 paires pour lequel l'ordre ne compte pas et les familles non plus soit
$$\binom{13}{2}=\frac{13!}{2!.11!}=78$$
Calcul du nombre de paires possibles dans un jeu ?
On enlève des cartes restantes les 2 autres cartes de la 1er paires et les 2 autres cartes pour la 2ème paire afin d'éliminer les fulls et carrés possible
52−8=44
36.78.44=123 552.

Paire

La valeur d'une paire est une combinaison de

$$\binom{13}{1}=13$$

La combinaison possible entre les 4 cartes est de

$$\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!.2!}=6$$

Il reste 3 cartes dans la main d'une valeur différente que la paire soit 3 parmi 12

$$\binom{13}{3}=\frac{12!}{3!.9!}=220$$

Ces 3 cartes différentes peuvent appartenir à une des 4 familles soit :
4.4.4 possibilité 4^3

Le nombre de pairs total dans le jeu est de
$13.6.220.4^3= 1\,098\,240$

Carte haute

Il faut 5 valeurs de cartes différentes

$$\binom{13}{5}=\frac{13!}{5!.8!}=1287$$

On enlève les suites possibles possibles
$1287-10=1277$

Comme il y a 4 familles il y a dans une main de 5 cartes.
$4.4.4.4.4=4^5=1024$ association de couleur possible en mains auxquelles on enlève les couleurs soit 4 configurations.

Calcul du nombre de mains dans un jeu
$1277.1020=1\,302\,540$.

Le nombre total de main est une combinaison de 5 parmi 52

$$\binom{52}{5}=\frac{52!}{5!.47!}=2\,598\,960$$

Exercice 20: Dénombrement et jeton sur une grille

Sur un damier carré de cinq cases sur cinq, on pose au hasard cinq jetons indiscernables sur cinq cases différentes. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants:

1. un jeton exactement est placé par ligne et par colonne
2. Aucun jeton n'est sur une diagonale
3. Une colonne au moins est vide

x

Ω σ

$\forall$ $\in$ e $\int$ β α $\in$ $\geqslant$ $\leqslant$ $\Leftrightarrow$ $\neq$ Δ $\surd$ ∞ π $\emptyset$ ✻ $\simeq$ $\emptyset$ $\cap$ $\subset$ $\cup$

$\mathbb{R}$ $\Re$ $\wp$