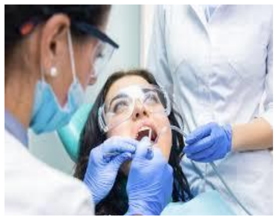
Corrigé du concours national commun d’accès aux facultés de medecine et de pharmacie et aux facultés de medecine dentaire Juillet 2021





Fait par

Mr.EL ABBASSI Mohammed

Professeur de Mathématiques

Au lycée Ibn Abdoun- Khouribga

Epreuve de Maths

15 juillet 2021

Introduction

Chers élèves, le message est clair et net : « On a renoué avec le passé, il n y a plus question de mathématiques faciles et superficielles ». Les mathématiques étaient toujours un moyen de sélection d'élite. C'est une matière exigeante, très exigeante même .J'avoue que l'épreuve, de cette année, était très difficile et très longue, il demande une profonde compréhension du programme et beaucoup d'entrainement. Aux promotions suivantes, je dis, haut et fort, essayez de revoir vos manières avec lesquelles vous vous travaillez les maths.
Enfin, je tiens à vous dire que dans un concours de courte durée c'est très rare de tout traiter, l'important c'est de traiter le maximum possible et de se distinguer par rapport aux autres...Et n'oubliez pas qu'il y a les trois autres matières : Physique – Chimie et Svt.
Il ne reste plus qu'à vous souhaiter bonne chance et bon courage.

NB : J'étais, parfois, obligé de détailler pour être très bien compris, mais dans un concours j'aurais beaucoup économiser le temps et l'effort (astuces et méthodes), puisqu' enfin de compte on ne laisse qu'une crois comme trace.

Mr.EL ABBASSI

Q61

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1}\Rightarrow l=?$$

Méthode 1 : *Avec les techniques habituelles du lycée :*

On a : $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\cancel{\ln e}+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)-\cancel{1}}{\sqrt{\ln(e+x)}+1}}{\dfrac{x+\cancel{1}-\cancel{1}}{\sqrt{x+1}+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e}\dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}{\frac{x}{e}}\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{\ln(e+x)}+1}=\dfrac{1}{e}\times\dfrac{2}{2}=\dfrac{1}{e}$.

Méthode 2 : *En utilisant la notion de fonctions équivalentes :*

On a : $\sqrt{\ln(e+x)}=\sqrt{1+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}\underset{0}{\sim}\left(1+\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{2}}\underset{0}{\sim}1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{e}$ *et* $\sqrt{1+x}\underset{0}{\sim}(1+x)^{\frac{1}{2}}\underset{0}{\sim}1+\frac{1}{2}x$

Donc $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{e}\frac{\cancel{x}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{x}}{\cancel{2}}}=\dfrac{1}{e}$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{B}$.

Q62

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\Rightarrow f'(x)=?$$

On a :

$$f'(x)=\left(\frac{1}{1-x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{1-x}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x(1-x^2)}$$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{B}$.

Q63

$$Si\ z=\left(\frac{7-15i}{15+7i}\right)^{2021}\ alors\ z=?$$

En remarquant que $7-15i=-i(15+7i)$ *on obtient :* $z=(-i)^{2021}=\left((-i)^2\right)^{1010}(-i)=-i$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{D}$.

Q64

$$Si\ x\in\left]0,1\right[\ alors\ \lim_{x\to+\infty}\left(1-x+x^2-x^3+\ldots+\left(-1\right)^n x^n\right)=?$$

On a : $1-x+x^2+\ldots+\left(-1\right)^n x^n=\sum_{k=0}^{n}\left(-x\right)^k=\dfrac{1-\left(-x\right)^{n+1}}{1-\left(-x\right)}$. $\left(q=-x\right)$

Comme $x\in\left]0,1\right[$ *alors* $-x\in\left]-1,0\right[$, *donc* $\lim_{n\to+\infty}\left(-x\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(-x\right)^n\left(-x\right)=0$

D'où $\lim_{n\to+\infty}1-x+x^2+\ldots+\left(-1\right)^n x^n=\dfrac{1}{1+x}$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{E}$.

Q65

$$Dans\ \mathbf{R},\ le\ nombre\ de\ solutions\ de\ l'équation\ x^5+x-1=0\ est:?$$

Considérons la fonction f *définie sur* $\mathbf{R}$ *par* $f\left(x\right)=x^5+x+1.$

On a f *dérivable (donc continue) sur* $\mathbf{R}$ *et on a :* $\left(\forall x\in\mathbf{R}\right)\ f'\left(x\right)=5x^4+1\rangle 0.$

Donc f *est strictement croissante sur* $\mathbf{R}$ *, donc elle réalise une bijection de* $\mathbf{R}$ *vers* $f\left(\mathbf{R}\right)=\mathbf{R}$ *et comme* $0\in f\left(\mathbf{R}\right)$ *alors l'équation* $f\left(x\right)=0$ *admet 1 solution dans* $\mathbf{R}$.

D'où il fallait cocher la case $\boxed{B}$.

Q66

$$Dans\ \mathbf{C},\ Si\ \left|z\right|\overline{z}=15-20i\ alors\ \left|\left(1+i\right)z\right|\ est\ égal\ à:?$$

On a :

$$\begin{aligned}\left|z\right|\overline{z}=15-20i &\Leftrightarrow \left|z\right|\mathrm{Re}\left(z\right)-i\left|z\right|\mathrm{Im}\left(z\right)=15-20i\\ &\Leftrightarrow \left|z\right|\mathrm{Re}\left(z\right)=15\ \boxed{1}\ et\ \left|z\right|\mathrm{Im}\left(z\right)=20\ \boxed{2}\\ &\Rightarrow \left|z\right|^2\left[\left(\mathrm{Re}\left(z\right)\right)^2+\left(\mathrm{Im}\left(z\right)\right)^2\right]=625=25^2\quad \boxed{1}^2+\boxed{2}^2\\ &\Rightarrow \left|z\right|^2.\left|z\right|^2=5^4\\ &\Rightarrow \left|z\right|=5\\ &\Rightarrow \left|\left(1+i\right)z\right|=5\sqrt{2}\ \left(\ car\ \left|1+i\right|=\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{E}$.

Q67

Si la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ *par alors* $f(x)=\frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}$ *alors* $\lim_{x\to 0} f(x)$?

On a : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}=1$

Et on a : $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}=\lim_{x\to 0^+}-\sqrt{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}=-1$

Comme les deux limites sont différentes alors la fonction f *n'admet pas de limite en 0.*

D'où il fallait cocher la case $\boxed{E}$.

Q68

Si (u_n) *est une suite définie par :* $u_0=1$ *et* $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}=u_n^2+u_n$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n=?$

Remarquons qu'on peut démontrer aisément par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\geq 1$.

Comme $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}-u_n=u_n^2\rangle 0$ *alors la suite* (u_n) *est strictement croissante.*

Donc (u_n) *converge vers un réel* l *ou diverge vers* $+\infty$.

Si on suppose que (u_n) *est Cv alors d'après la relation :* $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}=u_n^2+u_n$,

on en déduit que $l=l^2+l$, *et on aura* $l=0$, *ce qui contredit le fait que* $l\geq 1$,

puisque $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\geq 1$. *Donc on a nécessairement :* $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

D'où il fallait cocher la case $\boxed{B}$.

Q69

L'intégrale $\int_0^1\frac{x}{1+e^{-x^2}}$ *est égale à ?*

$$\int_0^1\frac{x}{1+e^{-x^2}}dx=\int_0^1\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(e^{x^2}+1\right)'}{e^{x^2}+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(e^{x^2}+1\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)=\ln\sqrt{\left(\frac{e+1}{2}\right)}$$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{D}$

Q70

Si $f(1)=4$ et $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)$ $f'(x)=2x+\ln x$ alors $f(e)=?$

Comme $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)$ $f'(x)=2x+\ln x$ alors $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)$ $f(x)=x^2+x\ln x-x+cste$

Et comme $f(1)=4$ alors $cste=4$ et par suite $f(e)=e^2+4$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{C}$.

Q71

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ si $z=1+i\left(1+\sqrt{2}\right)$ alors $|z|=?$ et $Arg z=?$

On a :

$$z=1+i+\sqrt{2}i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)=2\sqrt{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}{2}}=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

Et comme $2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\rangle 0$ (car $\frac{\pi}{8}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$) alors $|z|=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg z\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$.

D'où il fallait cocher la case $\boxed{A}$.

Q72

Si $\int_1^2 f'(x)\,f''(x)dx=8$ et $f'(2)-f'(1)=2$ alors $f'(2)+f'(1)=?$

On a :

$$\int_1^2 f'(x)\,f''(x)dx=8\Leftrightarrow\int_1^2\left(f'(x)\right)'\,f'(x)dx=8$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{1}{2}\left(f'(x)\right)^2\right]_1^2=8$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\left(f'(2)\right)^2-\left(f'(1)\right)^2\right)=8$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(f'(2)-f'(1)\right)\left(f'(2)+f'(1)\right)=8$$

$$\Leftrightarrow f'(2)+f'(1)=8\ \ (\text{car } f'(2)-f'(1)=2)$$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{C}$.

Q73

Soit $q \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k$

Sachant que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim_{n\to\infty} S_n = 4$, alors $q = ?$

Comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente alors nécessairement $q \neq 1$ (car si non $\sum_{k=1}^{n} q^k = n$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ serait divergente) et comme $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \sum_{k=1}^{n} q^k = q\frac{1-q^n}{1-q}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ Cv, alors nécessairement $|q| \langle 1$ et par suite $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{q}{1-q}$,

puisque $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$. D'où $\frac{q}{1-q} = 4$, et par suite $q = \frac{4}{5}$.

D'où il fallait cocher la case $\boxed{C}$.

Q74

$L'\text{intégrale } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ est égale à : ?

Considérons l'intégrale $J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$. On a :

$$I + J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1 dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad \text{et}$$

$$J - I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx = \left[\ln(\sin x + \cos x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \ln\left(\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\right) - \ln\left(\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

Et par suite $I = J = \frac{\pi}{12}$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{E}$.

Q75

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, *si* $|z_1|=|z_2|=1$ *et* $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$ *alors* $|z_1-z_2|=?$

On a : $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$ *, donc* $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=\frac{1}{2}$ *et comme*

$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$ *alors* $|z_1-z_2|^2=1+1-1=1$

D'où : $|z_1-z_2|=1$

D'où il fallait cocher la case $\boxed{A}$.

Q76

(u_n) *est la suite définie par* $u_0=0, u_1=1$ *et* $(\forall n\in\mathbf{N})\ u_n=\sqrt{\frac{u_{n+1}^2+u_{n-1}^2}{2}}$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=?$

On a : $(\forall n\in\mathbf{N})\ u_n=\sqrt{\frac{u_{n+1}^2+u_{n-1}^2}{2}} \Leftrightarrow u_n^2=\frac{u_{n+1}^2+u_{n-1}^2}{2}$

Donc la suite (u_n^2) *est arithmétique de raison* $r=u_1^2-u_0^2=1$

D'où $(\forall n\in\mathbf{N})\ u_n^2=u_0^2+nr=n$ *, donc* $(\forall n\in\mathbf{N})\ u_n=\sqrt{n}$

Et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

D'où il fallait cocher la case $\boxed{B}$.

Q77

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *et* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\begin{cases} ax+b\ ,\ si\ x\leq 0 \\ \frac{1}{x+1}\ ,\ si\ x>0 \end{cases}$

La fonction f *est dérivable en 0 si et seulement si* a *et* b *sont égals à :?*

f *dérivable en* $0 \Rightarrow f$ *continue en* $0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\Rightarrow b=1$

f *dérivable en* $0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Rightarrow a=-1$

On peut vérifier facilement que ces deux conditions sont aussi suffisantes.

D'où il fallait cocher la case $\boxed{B}$.

Q78

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x^2+2ax+b$.

Si $\int_{-1}^{1} f(x)dx\langle 2$ alors le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=0$ est ?

Le discriminant de l'équation $3x^2+2ax+b=0$ est $\Delta=4\left(a^2-3b\right)$.

On a : $\int_{-1}^{1} f(x)dx\langle 2 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} 3x^2+2ax+b\,dx\langle 2 \Leftrightarrow \left[x^3+ax^2+bx\right]_{-1}^{1}\langle 2 \Leftrightarrow 2+2b\langle 0 \Leftrightarrow b\langle -1$

D'où $\Delta\rangle 0$, et par suite l'équation $f(x)=0$ admet 2 solutions distinctes ds $\mathbb{R}$.

D'où il fallait cocher la case $\boxed{C}$.

Q79

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Soient z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation d'inconnue z : $(E)\ z^2-\sin(2\alpha)z+\sin^2(\alpha)=0$

La valeur de α pour laquelle les points O, $M(z_1)$ et $M(z_2)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral est : ?

On a :

$$z^2-\sin(2\alpha)z+\sin^2(\alpha)=0 \Leftrightarrow^2 -2\sin(\alpha)\cos(\alpha)z+\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)=\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow (z-\sin\alpha\cos\alpha)^2=-\sin^4\alpha=\left(i\sin^2\alpha\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z=\sin\alpha\left(\cos\alpha\pm i\sin\alpha\right)=\sin\alpha e^{\pm i\alpha}$$

Prenons, $z_1=\sin\alpha e^{i\alpha}$ et $z_2=\sin\alpha e^{-i\alpha}$

OM_1M_2 équilatéral $\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}=e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow e^{i(2\alpha)}=e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}$

(On a pris en compte le fait que $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$)

D'où il fallait cocher la case $\boxed{D}$.

Q80

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x, on pose: $f_n(x)=e^{-x}-nx$ *alors on a:?*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, *la fonction* f_n *est dérivable(donc continue) sur* $\mathbb{R}$ *et on a :*
$(\forall x\in\mathbb{R})\ f_n'(x)=-e^{-x}-n<0$ *, donc* f_n *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$.
Donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ *vers* $f_n(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. *(puisque* $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=-\infty$
et $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=+\infty$*). Et comme* $0\in f_n(\mathbb{R})$ *alors* $(\exists! a_n\in\mathbb{R})$: $f_n(a_n)=0$.
On a : $f_n(0)=1>0$, $f_n(a_n)=0$ *et* $f_n(1)=\frac{1-ne}{e}<0$. *Donc :* $f_n(1)<f_n(a_n)<f_n(0)$
Et comme f_n *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$ *alors* $0<a_n<1$.
On a : $f_n(a_n)-f_{n+1}(a_n)=a_n>0$*, donc* $f_{n+1}(a_n)<f_n(a_n)=0=f_{n+1}(a_{n+1})$
Et comme f_n *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$*, alors* $a_{n+1}<a_n$ *, donc*
la suite $(a_n)_{n\geq1}$ *est strictement décroissante, et comme elle est minorée (par 0) alors elle est convergente. Si on pose* $\lim_{n\to+\infty} a_n=l$ *alors on a* $l=0$ *ou* $0<l<1$
Et comme $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \frac{e^{-a_n}}{a_n}=n$ *alors nécessairement* $l=0$*, car si non , nous aurons* $\lim_{n\to+\infty} n=\frac{e^{-l}}{l}\in\mathbb{R}$ *, ce qui contredit le fait que* $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$.
Comme $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ e^{-a_n}=na_n$ *et la fonction :* $x\to e^{-x}$ *est continue en 0, alors*
$\lim_{n\to+\infty} na_n=\lim_{n\to+\infty} e^{-a_n}=e^0=1$.
D'où il fallait cocher la case $\boxed{A}$.

Toute remarque ou suggestion de votre part sera la bienvenue

Email : elabbassimed2014@gmail.com

End