RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

C.U Relizane . Ahmed Zabana

Institut des Sciences et Technologies

1^{er} Année ST

Travaux Dirigés Maths 1

Dr Djebbar Samir

ssamirdjebbar@yahoo.fr

Année Universitaire 2019/2020

Centre universitaire de Relizane Ahmed Zabana 2019-2020

1^{er} **année ST Maths 01**

Fiche de TD 1

Exercice 1 : Soient p et q, r trois assertions
Montrer en utilisant la table de vérité que les propositions suivantes sont vraies

1· $p \Longleftrightarrow \overline{\overline{p}}$ 2· $\overline{(p \wedge q)} \Longleftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
3· $\overline{(p \vee q)} \Longleftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ 4· $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$
5· $[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.

Exercice 2 : -Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1· $\cos \frac{\pi}{2}$ est positif et $\ln e = 1$.
2· Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = \sin x$ ou $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.
3· $\sin(-\pi) = \sin \pi \Longrightarrow \ln \frac{1}{\pi} > 0$.
4· $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 > 0$.
5· $\exists\, x \in \mathbb{N}, \quad x^2 \leq 0$.
6· $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad x + y + 1 = 0$.
Trouver les négations de les propositions précédentes.

Exercice 3 : Comparer les propositions suivantes et dire si elles sont vraies ou fausses
1· $\forall\, m \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N}$, ($n + m$ est un nombre pair).
2· $\exists\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, m \in \mathbb{N}$, ($n + m$ est un nombre pair).

Exercice 4 :(Raisonnement direct)
Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$

Exercice 5 :($\Rightarrow$ Raisonnement direct, $\Leftarrow$ Raisonnement par contraposition)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : n pair $\Longleftrightarrow n^2$ pair.

Exercice 6 :(Raisonnement par contre-exemple)
Montrer que l'implication suivante est fausse

$$\forall\, x \in \mathbb{Z}, \quad x < 5 \Longrightarrow x^2 < 25.$$

Exercice 7 :(Raisonnement par récurrence)
Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

Exercice 8 :(Raisonnement par l'absurde)
Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ Montrer que si $a = b \Longrightarrow \dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$.

Centre universitaire de Relizane Ahmed Zabana 2019-2020

1^{er} **année ST Maths 01**

Fiche de TD 2

Exercice 1 : Soit E un ensemble

Montrer que pour toutes parties A, B de E

1· $\complement_E (A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$ 2· $\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$

3· $\complement_E \left(\complement_E A\right) = A$ 4· $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$

Exercice 2 : A, B et C trois sous-ensembles de ensemble E . Montrer que

1· $B \subset C \Longrightarrow (A \cap B) \subset (A \cap C)$

2· $[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longleftrightarrow [(A \cup B) \subset C]$

Exercice 3 : I· On définit sur $\mathbb{R}^*$ la relation R par

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^* \qquad xRy \Longleftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

1· Montrer que R est une relation d'équivalence.

2· Déterminer la classe d'équivalence pour tout a de $\mathbb{R}^*$.

3· En déduire la classe d'équivalence de 2.

II· Soit Φ la Relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $a\Phi b \Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = b$

- Montrer que Φ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$. -L'ordre il est total ?

Exercice 4 : Soit $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - 2x^2$

$\star$Déterminer l'image directe de $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ par l'application f

$\star$Déterminer l'image réciproque de $[-1, 1]$ par l'application f

Exercice 5 : Soit $g : E \to F$ une application. $A, B \subset E$ et $M, N \subset F$ montrer que

$\star$ $M \subset N \Longrightarrow g^{-1}(M) \subset g^{-1}(N)$ $\star$ $g^{-1}(M \cap N) = g^{-1}(M) \cap g^{-1}(N)$

$\star$ $g^{-1}(M \cup N) = g^{-1}(M) \cup g^{-1}(N)$ $\star$ $g\left(A \cap g^{-1}(N)\right) = g(A) \cap N$

$\star$ $A \subset B \Longrightarrow g(A) \subset g(B)$ $\star$ $g^{-1}\left(\complement_F M\right) = \complement_E\, g^{-1}(M)$

Exercice 6: Soit $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$\star$ f est-elle injective ?

$\star$ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) = 2$. f est-elle surjective ?

$\star$ Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Exercice 7: Soient $f\ : E \to F$ et $g\ : F \to G$ deux applications. Montrer que :

$\star$ $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective. $\star$ f injective et g injective $\Longrightarrow g \circ f$ injective

$\star$ $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective. $\star$ f surjective et g surjective $\Longrightarrow g \circ f$ surjective

$\star$ f bijective et g bijective $\Longrightarrow g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Centre universitaire de Relizane Ahmed Zabana 2019-2020

1^{er} **année ST Maths 01**

Fiche de TD 3

Exercice 1 : $\star$ Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x)=\sqrt{3x-x^3},\ g(x)=\ln(x-2)+\ln(x+2),\ h(x)=\sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}},\ d(x)=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$$

$\star$ Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

$*$ Soient $m,n\in\mathbb{N}^*$. Étudier $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$

$*$ En utilisant la définition de la limite, montrer que $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}(3x+1)=7$.

Exercice 2 : Étudier les limites quand x tend vers $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\qquad \text{et}\qquad g(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln x$$

Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$

$*$ Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}f(x)$ $*$ f est-elle continue en 0 ? est-elle dérivable en 0 ? justifier.

Exercice 4 : Soient a,b deux nombres réels, on définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & si\ x\leq 0,\\ \dfrac{1}{1+x} & si\ x>0\end{cases}$$

1. Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer a et b tel que f soit dérivable de sur $\mathbb{R}$, et dans ce cas calculer $f'(0)$.

Exercice 5 : Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x)=\begin{cases} x^3\cos\frac{1}{x} & si\ x>0,\\ 0 & si\ x=0,\\ x^3\sin\frac{1}{x} & si\ x<0.\end{cases}$

$\star$ f est-elle continue en $x=0$?

$\star$ Calculer $f'(x)$ pour $x\neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x=\frac{1}{\pi}$.

$\star$ f est-elle dérivable en $x=0$? $\star$ f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$?

Exercice 6 : Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$\text{a) } f(x)=\sin x\sin\left(\frac{1}{x}\right),\ \text{b) } f(x)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right),\ \text{c) } f(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}.$$

Exercice 7 : Calculer en utilisant la règle de l'hôpital les limites suivantes:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{2x}-1}{x},\ \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1},\ \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$$

Centre universitaire de Relizane Ahmed Zabana 2019-2020

1^{er} **année ST Maths 01**

Fiche de TD 4

Exercice 1 :
1) Résoudre l'équation $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$ pour $0 \leq x \leq 2\pi$

2) Montrer que l'équation $2\cos^2 x + 7\sin x = 5$ peut s'écrire sous forme d'une équation du seconde degré en $\sin x$.

3) Résoudre cette équation pour $0 \leq x \leq \pi$.

Exercice 2 : Calculer les nombres suivants :

$a)$ $\arcsin\left(\sin\dfrac{18\pi}{5}\right)$ $b)$ $\arccos\left(\sin\dfrac{18\pi}{5}\right)$ $c)$ $\arcsin\left(\sin\dfrac{15\pi}{7}\right)$ $d)$ $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$ $e)$ $\tan\left(\arctan\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 3 : 1) Montrer que $\forall\, x \in [-1, 1]$ on a :

$a)$ $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ $b)$ $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

$c)$ $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$ $d)$ $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.

2) Simplifier les expressions suivantes :

$a)$ $\cos(2\arccos x)$ $b)$ $\cos(2\arcsin x)$ $c)$ $\sin(2\arccos x)$

Exercice 4 : Montrer que $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & si\ x > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & si\ x < 0 \end{cases}$

Exercice 5 : Résoudre les équations suivantes :

$a)$ $\arcsin x = \arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13}$ $b)$ $(\arcsin x - 5)\arcsin x = -4$ $c)$ $5\cosh x - 4\sinh x = 3$.

Exercice 6 :

$*$Calculer les limites suivantes :

$a)$ $2\cosh^2 x - \sinh 2x$ $(x \to +\infty)$ $b)$ $e^{2x}\left(2\cosh^2 x - \sinh 2x\right)$ $(x \to -\infty)$.

$*$Etudier le domaine de définition de la fonction f définie par: $f(x) = \text{argch}\left[\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\right]$

et simplifier son expression lorsqu'elle a un sens.

Fiche de TD 1

Solution de L'exercice 1:

I) En utilisant la table de vérité

p	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$	$p \Longleftrightarrow \overline{\overline{p}}$
V	F	V	V
F	V	F	V

De la même manière, on prouve (2) et (3) :

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$(\overline{p \wedge q}) \Longleftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$(\overline{p \vee q}) \Longleftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

on prouve (4) comme suit:

La définition mathématique est la suivante : L'assertion $(\overline{p} \vee q)$ est notée $(p \Longrightarrow q)$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Longrightarrow q$	$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$	$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

on prouve (6)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

Solution de L'exercice 2:

1· $\cos\frac{\pi}{2}$ est positif et $\ln e = 1$ est une assertion vraie car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$ et $\ln e = 1$

$$[(V \wedge V) \Longleftrightarrow V]$$

2· Pour tout $x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = \sin x$ ou $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ est une assertion vraie car $\sin(-x) = -\sin x$ fonction impaire (Pour tout $x \in \mathbb{R}\ \ \sin(-x) = \sin x$ fausse, la fonction sin est impaire), $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ est toujours vraie pour $x \in \mathbb{R}$

$$[(F \vee V) \Longleftrightarrow V]$$

3· $\sin(-\pi) = \sin\pi \Longrightarrow \ln\left(\frac{1}{\pi}\right) > 0$ est une assertion fausse car $(\sin(-\pi) = \sin\pi = 0)$ est vraie par contre $\ln\left(\frac{1}{\pi}\right)$ est négative

$$[(V \Longrightarrow F) \Longleftrightarrow F]$$

4· $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 > 0$ est une assertion fausse car $\exists\, x = 0,\ x^2 = 0^2 = 0 > 0$ est fausse
5· $\exists\, x \in \mathbb{N}, \quad x^2 \leq 0$ est une assertion vraie car $\exists\, x = 0,\ x^2 = 0^2 = 0 \leq 0$
6· $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad x + y + 1 = 0$ est une assertion vraie
pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut prendre $y = -x - 1$ (existe) . On a $x + y + 1 = x - x - 1 + 1 = 0$

Solution de L'exercice 3:

1· $\forall\ m \in \mathbb{N},\ \exists\ n \in \mathbb{N},\ (n + m$ est un nombre pair) est une proposition vraie (car on peut garantir pour tout m l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que $m + n$ est pair, par exemple : On peut prendre $n = m$).
2· $\exists\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ (n + m$ est un nombre pair) est une proposition fausse (ce n'est pas évident que la somme entre un entier naturel ($n \in \mathbb{N}$) fixé au départ et tout entier naturel ($m \in \mathbb{N}$) donne toujours un nombre paire).
Conclusion :
L'ordre des quantificateurs est important (à respecter)

Solution de L'exercice 4:
Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\dfrac{m}{n}$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
On suppose $a, b \in \mathbb{Q}$ et on montre $a + b \in \mathbb{Q}$
$a \in \mathbb{Q}$ alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = \dfrac{m}{n}$
$b \in \mathbb{Q}$ alors il existe $m' \in \mathbb{Z}$ et $n' \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = \dfrac{m'}{n'}$
Alors

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + nm'}{nn'}.$$

Or le numérateur $mn' + nm'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$, le dénominateur nn' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b = \dfrac{m''}{n''}$ avec $m'' \in \mathbb{Z}$ et $n'' \in \mathbb{N}^*$.
Donc $a+b \in \mathbb{Q}$

Solution de L'exercice 5:

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n$ pair $\Longleftrightarrow n^2$ pair

$$(n \text{ pair} \Longleftrightarrow n^2 \text{ pair}) \Longleftrightarrow [(\ n \text{ pair} \Longrightarrow n^2 \text{ pair}) \wedge (n^2 \text{ pair} \Longrightarrow n \text{ pair})]$$

$\Longrightarrow$ (Le raisonnement direct)

$$\begin{aligned} n\ pair &\Longrightarrow \exists\ k \in \mathbb{N},\ n = 2k \\ &\Longrightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'. \quad (k' \in \mathbb{N}) \\ &\Longrightarrow n^2\ pair \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ (Le raisonnement par contraposée)

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$$

Alors : (n^2 pair $\Longrightarrow n$ pair) $\Longleftrightarrow$ (n impair $\Longrightarrow n^2$ impair)

$$\begin{aligned} n\ impair &\Longrightarrow \exists\ k \in \mathbb{N},\ n = 2k+1 \\ &\Longrightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &\Longrightarrow n^2 = 2k'' + 1,\ avec\ k'' = 2k^2 + 2k. \quad (k'' \in \mathbb{N}) \\ &\Longrightarrow n^2\ impair \end{aligned}$$

Solution de L'exercice 6:

Méthode 1:
Si $x = -6 \in \mathbb{Z}$

$$-6 < 5 \Longrightarrow 36 < 25 \text{ est une proposition fausse}$$

car

$$(V \Longrightarrow F) \Longleftrightarrow F$$

Méthode 2:
Si $x = -6$, alors $(-6 < 5) \wedge ((-6)^2 = 36 \geq 25)$
$\exists\ x \in \mathbb{Z},\ x < 5 \wedge x^2 \geq 25$ est une proposition vraie et elle représente la négation de :
$\forall\ x \in \mathbb{Z},\quad x < 5 \Longrightarrow x^2 < 25$ qui est alors une proposition fausse
$x = -6$ est un contre-exemple.

Solution de L'exercice 7:

Montrons que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.
Soit $p(n)$ l'assertion $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ 3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7
Etapes du raisonnement par récurrence :
1$\cdot$ Pour $n = 0 \qquad 3^{2\times 0} - 2^0 = 1 - 1 = 0 = 0 \times 7,\ \ p(0)$ est vraie
2$\cdot$ On suppose $p(n)$ est vraie c'est à dire

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}\ \text{ tel que } 3^{2n} - 2^n = 7k$$

3$\cdot$ On démontre que $p(n+1)$ est vraie

$$\exists\, L \in \mathbb{Z}\ \text{ tel que } 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 7L\ ?$$

On a :

$$\begin{aligned}
3^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 3^{2n+2} - 2^{n+1} \\
&= 3^{2n} \times 3^2 - 2^n \times 2 \\
&= 3^{2n}(7+2) - 2^n \times 2 \\
&= 3^{2n} \times 7 + 3^{2n} \times 2 - 2^n \times 2 \\
&= 3^{2n} \times 7 + 2(3^{2n} - 2^n) \\
&= 3^{2n} \times 7 + 2 \times 7k \\
&= 7(3^{2n} + 2k) = 7L \quad \textit{avec } L = 3^{2n} + 2k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 3^{2n} - 2^n \text{ est un multiple de 7.}$$

Solution de L'exercice 8:
Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $a = b$ et $\dfrac{a}{1+b} \neq \dfrac{b}{1+a}$

$$\begin{aligned}
&\textit{donc } a = b \textit{ et } a(1+a) \neq b(1+b) \\
&\textit{donc } a = b \textit{ et } a - b + a^2 - b^2 \neq 0 \\
&\textit{donc } a = b \textit{ et } (a-b)(1+a+b) \neq 0
\end{aligned}$$

est une contradiction car $a = b \Longrightarrow (a-b) = 0 \Longrightarrow (a-b)(1+a+b) = 0.$
Conclusion : Si $a = b$ alors $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$

Fiche de TD 2

Solution de L'exercice 1:

$$
\begin{aligned}
1\cdot\ \ Soit\ x \in \complement_E (A\cup B) &\Longleftrightarrow x \notin (A\cup B) \Longleftrightarrow \overline{x \in (A\cup B)}\\
&\Longleftrightarrow \overline{x\in A\ ou\ x \in B}\\
&\Longleftrightarrow x\notin A\ et\ x\notin B\\
&\Longleftrightarrow x\in \complement_E A\ et\ x\in \complement_E B\\
&\Longleftrightarrow x\in \complement_E A \cap \complement_E B.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\cdot\ \ Soit\ x \in \complement_E (A\cap B) &\Longleftrightarrow x \notin (A\cap B) \Longleftrightarrow \overline{x \in (A\cap B)}\\
&\Longleftrightarrow \overline{x\in A\ et\ x \in B}\\
&\Longleftrightarrow x\notin A\ ou\ x\notin B\\
&\Longleftrightarrow x\in \complement_E A\ ou\ x\in \complement_E B\\
&\Longleftrightarrow x\in \complement_E A \cup \complement_E B.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3\cdot\ \ Soit\ x \in \complement_E \Big(\complement_E A\Big) &\Longleftrightarrow x \notin \complement_E A\\
&\Longleftrightarrow x\in A.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4\cdot\ \ Soit\ x \in A\setminus B &\Longleftrightarrow x \in A\ et\ x\notin B \Longleftrightarrow x\in A\ et\ x\in \complement_E B\\
&\Longleftrightarrow x\in \Big(A\cap \complement_E B\Big)\\
&\Longleftrightarrow x\in \Big(A\cap \complement_E B\Big)\cup \varnothing\\
&\Longleftrightarrow x\in \Big(A\cap \complement_E B\Big)\cup \Big(B\cap \complement_E B\Big)\\
&\Longleftrightarrow x\in (A\cup B)\cap \complement_E B\\
&\Longleftrightarrow x\in (A\cup B)\setminus B.
\end{aligned}
$$

Solution de L'exercice 2:

1· $B\subset C \Longrightarrow (A\cap B)\subset (A\cap C)$?

Hypothèse : $B\subset C$
But : $(A\cap B)\subset(A\cap C)$
$\forall\, x\in (A\cap B)\Longrightarrow x\in A\ \wedge\ x\in B$

$$
\begin{aligned}
Comme\ B\subset C &\Longrightarrow x\in A\ \wedge\ x\in C\\
&\Longrightarrow x\in (A\cap C)
\end{aligned}
$$

Donc : $B\subset C\Longrightarrow (A\cap B)\subset(A\cap C)$.

2· $[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longleftrightarrow [(A \cup B) \subset C]$?

a. $[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longrightarrow [(A \cup B) \subset C]$?

Hypothèse : $(A \subset C) \wedge (B \subset C)$
But : $(A \cup B) \subset C$
$\forall\, x \in (A \cup B) \Longrightarrow x \in A \;\vee\; x \in B$

$$\begin{aligned} Comme\ (A \subset C) \wedge (B \subset C) &\Longrightarrow x \in C \vee x \in C \\ &\Longrightarrow x \in C \end{aligned}$$

Donc : $[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longrightarrow [(A \cup B) \subset C]$

b. $[(A \cup B) \subset C] \Longrightarrow [(A \subset C) \wedge (B \subset C)]$?

Hypothèse : $(A \cup B) \subset C$
But : $(A \subset C) \wedge (B \subset C)$
$\forall\, x \in A \Longrightarrow x \in (A \cup B) \Longrightarrow x \in C$, ceci implique que $A \subset C$
$\forall\, x \in B \Longrightarrow x \in (A \cup B) \Longrightarrow x \in C$, ceci implique que $B \subset C$
Donc : $[(A \cup B) \subset C] \Longrightarrow [(A \subset C) \wedge (B \subset C)]$
Conclusion :
$[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longleftrightarrow [(A \cup B) \subset C]$

Solution de L'exercice 3:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^* \qquad xRy \Longleftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

1) R est une relation d'équivalence :
a) R est réflexive $\forall\, x \in \mathbb{R}^* \qquad xRx$?

$$\begin{aligned} xRx &\Longleftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} \\ &\Longleftrightarrow 0 = 0. \end{aligned}$$

Alors R est réflexive.
b)R est symétrique : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^* \qquad xRy \Longrightarrow yRx$?

$$\begin{aligned} xRy &\Longleftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2} \\ &\Longleftrightarrow y^2 + \frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} \\ &\Longrightarrow yRx \end{aligned}$$

Alors R est symétrique.
c)R est transitive : $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^*\qquad xRy \wedge yRz \Longrightarrow xRz$?

$$\begin{cases} xRy \\ \wedge \\ yRz \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2+\dfrac{1}{y^2} \\ \wedge \\ y^2+\dfrac{1}{y^2}=z^2+\dfrac{1}{z^2} \end{cases} \Longrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=z^2+\frac{1}{z^2} \Longrightarrow xRz$$

Alors R est transitive.
Conclusion : R est une relation d'équivalence.
2) Classe d'équivalence :
Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Cherchons les éléments y de $\mathbb{R}^*$ tels que aRy .
$\dot{a} = \{y \in \mathbb{R}^* \;/\; aRy\}$

$$\begin{aligned} aRy &\Longleftrightarrow a^2+\frac{1}{a^2}=y^2+\frac{1}{y^2} \\ &\Longleftrightarrow y^2+\frac{1}{y^2}-\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=0 \\ &\Longleftrightarrow (y^2-a^2)+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{a^2}=0 \\ &\Longleftrightarrow (y^2-a^2)+\frac{a^2-y^2}{y^2a^2}=0 \\ &\Longleftrightarrow (y^2-a^2)\left(1-\frac{1}{y^2a^2}\right)=0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y^2-a^2=0 \\ 1-\dfrac{1}{y^2a^2}=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y^2=a^2 \\ y^2a^2=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=\pm a \\ y=\pm\dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Donc $\dot{a} = \left\{a, -a, \dfrac{1}{a}, -\dfrac{1}{a}\right\}$

2) $\dot{2} = \left\{2, -2, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right\}$

II $a\Phi b \Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = b$
(1) Montrer que Φ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$
a) Φ est-elle réflexive ?
Φ est réflexive $\Longleftrightarrow \forall\, a \in \mathbb{N}^*,\ a\Phi a$?
$\forall\, a \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \exists\, n = 1 \in \mathbb{N}$ tel que : $a^1 = a \Longrightarrow a\Phi a \Longrightarrow \Phi$ est réflexive

b) Φ est-elle antisymétrique ?

Φ est antisymétrique $\iff \forall\, a, b \in \mathbb{N}^*, \qquad a\Phi b \; et \; b\Phi a \Longrightarrow a = b$?

$$\begin{aligned} soient\ a, b \in \mathbb{N}^*, \quad si\ a\Phi b\ et\ b\Phi a &\Longrightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N}\ tel\,que\ :\ a^{n_1} = b \\ et\ \exists\, n_2 \in \mathbb{N}\ tel\,que\ :\ b^{n_2} = a &\Longrightarrow (b^{n_2})^{n_1} = a^{n_1} = b \\ &\Longrightarrow n_1 n_2 = 1 \Longrightarrow n_1 = n_2 = 1 \\ &\Longrightarrow a = b \Longrightarrow \Phi\ est\ antisymtrique. \end{aligned}$$

c) Φ est-elle transitive?

Φ est transitive $\iff \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}^*,\ a\Phi b\ et\ b\Phi c \Longrightarrow a\Phi c$

$$\begin{aligned} &soient\ a, b, c \in \mathbb{N}^*, \\ &a\Phi b\ et\ b\Phi c \Longrightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N}\ tel\,que\ :\ a^{n_1} = b \\ &\quad et\ \exists\, n_2 \in \mathbb{N}\ tel\,que\ :\ b^{n_2} = c \Longrightarrow (a^{n_1})^{n_2} = c \\ &\quad \exists\, n = n_1 n_2 \in \mathbb{N}\ tel\,que\ :\ a^n = c \\ &\quad \Longrightarrow a\Phi c \\ &\quad \Longrightarrow \Phi\ est\ transitive \end{aligned}$$

(2) Cet ordre est-il total ?

L'ordre n'est pas total car pour les deux entiers $\{2, 3\}$ on a ni $2\Phi 3$ ni $3\Phi 2$.

Solution de L'exercice 4:

Rappel :

Im. Directe $\qquad\qquad$ Im. Réciproque

$$f\ :\ E \longrightarrow F$$

$$D \subset E \qquad x \longrightarrow y = f(x) \qquad R \subset F$$

$$f(D) = \{ f(x) / x \in D \} \quad \vdots \quad f^{-1}(R) = \{ x \in E / f(x) \in R \}$$

Soit

$$\begin{aligned} f\ :\ E &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow 1 - 2x^2 \end{aligned}$$

1) L'image directe de $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ par f :

$$\begin{aligned} f\left(\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) &= \left\{f(x) \ / \ x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right\} \\ &= \left\{f(x) \ / \ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \\ &= [0,1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2] &\Longleftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 2/4 \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq 2x^2 \leq 1 \\ &\Longleftrightarrow -1 \leq -2x^2 \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq 1 - 2x^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Ainsi $f\left([-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]\right) = [0,1]$.

2) L'image réciproque de $[-1,1]$ par f :

$$\begin{aligned} f^{-1}([-1,1]) &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \in [-1,1]\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ (1-2x^2) \in [-1,1]\right\} \\ &= [-1,1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) \in [-1,1] &\Longleftrightarrow -1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1 \\ &\Longleftrightarrow -2 \leq -2x^2 \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq 2x^2 \leq 2 \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \\ &\Longleftrightarrow -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}([-1,1]) = [-1,1]$.

Remarque. On obtiendrait $0 \leq \sqrt{x^2} = |x| \leq 1$ (ne pas faire l'erreur d'écrire $\sqrt{x^2} = x$!!! car x n'est pas nécessairement positif !).

Solution de L'exercice 5:

$M, N \subset F$
1· $M \subset N \Longrightarrow g^{-1}(M) \subset g^{-1}(N)$?
Hypothèse : $M \subset N$
But : $g^{-1}(M) \subset g^{-1}(N)$

$$\begin{aligned}\forall\, x \in g^{-1}(M) &\Longrightarrow g(x) \in M\\ comme\ M \subset N &\Longrightarrow g(x) \in N\\ &\Longrightarrow x \in g^{-1}(N)\end{aligned}$$

Donc : $M \subset N \Longrightarrow g^{-1}(M) \subset g^{-1}(N)$

2) $g^{-1}(M \cap N) = g^{-1}(M) \cap g^{-1}(N)$?

$$\begin{aligned}x \in g^{-1}(M \cap N) &\Longleftrightarrow g(x) \in M \cap N\\ &\Longleftrightarrow g(x) \in M \ \wedge\ g(x) \in N\\ &\Longleftrightarrow x \in g^{-1}(M) \ \wedge\ x \in g^{-1}(N)\\ &\Longleftrightarrow x \in g^{-1}(M) \cap g^{-1}(N)\end{aligned}$$

Donc : $g^{-1}(M \cap N) = g^{-1}(M) \cap g^{-1}(N)$

3) $g^{-1}(MA \cup N) = g^{-1}(M) \cup g^{-1}(N)$?

$$\begin{aligned}x \in g^{-1}(M \cup N) &\Longleftrightarrow g(x) \in M \cup N\\ &\Longleftrightarrow g(x) \in M \ \vee\ g(x) \in N\\ &\Longleftrightarrow x \in g^{-1}(M) \ \vee\ x \in g^{-1}(N)\\ &\Longleftrightarrow x \in g^{-1}(M) \cup g^{-1}(N)\end{aligned}$$

Donc : $g^{-1}(M \cup N) = g^{-1}(M) \cup g^{-1}(N)$
4) $g\left(A \cap g^{-1}(N)\right) = g(A) \cap N$?

$$\begin{aligned}Soit\ y \in g\left(A \cap g^{-1}(N)\right) &\Longleftrightarrow \exists\, x \in A \cap g^{-1}(N) \ /\ y = g(x)\\ &\Longleftrightarrow \left(\exists\ x \in A \ \wedge\ x \in g^{-1}(N)\right) \ /\ y = g(x)\\ &\Longleftrightarrow (\exists\ x \in A \ \wedge\ g(x) \in N) \ /\ y = g(x)\\ &\Longleftrightarrow (\exists\, x \in A \ /\ y = g(x)) \ \ et\ \ (g(x) \in N \ /\ y = g(x))\\ &\Longleftrightarrow y \in g(A)\ et\ y \in N\\ &\Longleftrightarrow y \in g(A) \cap N\end{aligned}$$

Donc : $g\left(A \cap g^{-1}(N)\right) = g(A) \cap N$

5) $g^{-1}\left(\complement_F M\right) = \complement_E \, g^{-1}(M)$?
Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in g^{-1}\left(\complement_F M\right) &\Longleftrightarrow g(x) \in \complement_F M \\ &\Longleftrightarrow (g(x) \in F) \ \wedge \ (g(x) \notin M) \\ &\Longleftrightarrow (x \in E) \ \wedge \ \left(x \notin g^{-1}(M)\right) \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_E \, g^{-1}(M) \end{aligned}$$

ce qui montre que $g^{-1}\left(\complement_F M\right) = \complement_E \, g^{-1}(M)$.

6) $A \subset B \Longrightarrow g(A) \subset g(B)$?
Hypothèse : $A \subset B$
But : $g\,(A) \subset g\,(B)$

$$\begin{aligned} y \in g(A) &\Longrightarrow \exists \, x \in A \ / \ y = g(x) \\ &\Longrightarrow \exists \, x \in A \subset B \ / \ y = g(x) \\ &\Longrightarrow \exists \, x \in B \ / \ y = g(x) \\ &\Longrightarrow y \in g(B) \end{aligned}$$

Donc : $A \subset B \Longrightarrow g(A) \subset g(B)$

Solution de L'exercice 6:
Rappel :
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

$$\boxed{f \text{ injective } \Longleftrightarrow \forall \ x, \ x' \in E, \ (f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x')}$$

$$\boxed{f \text{ surjective } \Longleftrightarrow \forall \ y \in F, \ \exists x \in E, \ f(x) = y}$$

$$\boxed{f \text{ bijective } \Longleftrightarrow \forall \ y \in F, \ \exists! \ x \in F; \ f(x) = y.}$$

▷ f est bijective si elle est injective et surjective

✳ ✳

1) Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ si

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow \frac{2x_1}{x_1^2+1} = \frac{2x_2}{x_2^2+1} \\
&\Longrightarrow 2x_2(x_1^2+1) = 2x_1(x_2^2+1) \\
&\Longrightarrow 2x_2x_1^2 + 2x_2 - 2x_1x_2^2 - 2x_1 = 0 \\
&\Longrightarrow 2x_2x_1(x_1-x_2) + 2(x_2-x_1) = 0 \\
&\Longrightarrow (x_1-x_2)(x_1x_2-1) = 0 \\
&\Longrightarrow x_1 = x_2 \ \vee \ \underbrace{x_2x_1 = 1}
\end{aligned}$$

f n'est pas injective car (parmi plusieurs choix !)

$$\exists\, 2, \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \ : \ f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) = \frac{4}{5} \ et \ 2 \neq \frac{1}{2}.$$

▷ $f(x) = 2$ devient $2x = 2(x^2+1)$ soit $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solutions réelles.
▷ f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent.
▷Pour montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :
$*$ on étudie la fonction et on note que le maximum absolu est 1 et que le minimum absolu est -1

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

D'où $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
$*$ $y = f(x)$ est équivalente à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $4 - 4y^2 \geq 0$ ssi $y \in [-1, 1]$. On a alors prouvé que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Solution de L'exercice 7:
Rappelons que $g \circ f : E \longrightarrow G$.
(1) On suppose que $g \circ f$ est injective et montrons que f est injective
Soient $x_1, x_2 \in E$, alors

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \quad car\ g\ est\ une\ application \\
&\Longrightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\
&\Longrightarrow x_1 = x_2 \quad car\ g \circ f\ est\ injective
\end{aligned}$$

$$\text{donc : } \forall\, x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

ce qui montre que f est injective.
(2) On suppose que $g \circ f$ est surjective et montrons que g est surjective
Soit $z \in G$, alors

$$\begin{aligned} g \circ f \; surjective &\Longrightarrow \exists\, x \in E, \quad (g \circ f)(x) = z \quad (z \; possde \; un \; antcdent \; x \; dans \; E \; par \; g \circ f) \\ &\Longrightarrow \exists\, x \in E, \quad g(f(x)) = z \\ &\Longrightarrow \exists\, y = f(x) \in F, \quad g(y) = z \quad (z \; possde \; un \; antcdent \; y \; dans \; F \; par \; g\;) \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \forall\, z \in G, \; \exists\, y \in F; \quad z = g(y)$$

ce qui montre que g est surjective.
(3) Supposons f et g injectives et montrons que $g \circ f$ est injective.
Soient $x_1, x_2 \in E$, alors :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_1)) \\ &\Longrightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad car \; g \; injective \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \quad car \; f \; injective \end{aligned}$$

ce qui montre que $g \circ f$ est injective.

(4) Supposons f et g surjectives et montrons que $g \circ f$ est surjective.
Soit $z \in G$, g étant surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$, comme $y \in F$ et f est surjective alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $z = g(f(x))$ et on déduit que :

$$\forall\, z \in G, \; \exists x \in E; \quad z = g \circ f(x)$$

ce qui montre que $g \circ f$ est surjective.

(5) De (4) et (3) on déduit que si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective.
Montrons que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
D'après (4), pour $z \in G$, $z = g(y)$, $y = f(x)$ et $z = g \circ f(x)$, comme f, g et $g \circ f$ sont bijectives, alors $y = g^{-1}(z)$, $x = f^{-1}(y)$ et $x = (g \circ f)^{-1}(z)$, par suite

$$\forall z \in G, \qquad (g \circ f)^{-1}(z) = x = f^{-1}(y) = f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right) = f^{-1} \circ g^{-1}(z)$$

donc : $\quad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. $\square$

Fiche de TD 3

Solution de L'exercice 1:

1) f est définie si, et seulement si,

$$\begin{aligned} 3x - x^3 \geq 0 &\Longleftrightarrow x(3-x^2) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[0, \sqrt{3}\right], \end{aligned}$$

donc

$$D_f = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[0, \sqrt{3}\right].$$

2) g est définie si, et seulement si,

$$x-2>0 \; et \; x+2>0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ \; et \\ \;\; x > -2 \end{cases} \Longleftrightarrow x > 2,$$

donc

$$D_g =]2, +\infty[.$$

3) h est définie si, et seulement si,

$$\begin{aligned} \frac{2+3x}{5-2x} \geq 0 \; et \; 5-2x \neq 0 &\Longleftrightarrow (2+3x \geq 0 \; et \; 5-2x>0) \;\; ou \;\; (2+3x \leq \; et \; 5-2x<0) \\ &\Longleftrightarrow \left(x \geq -\frac{2}{3} \; et \; x < \frac{5}{2}\right) \;\; ou \;\; \left(x \leq -\frac{2}{3} \; et \; x > \frac{5}{2}\right) \\ &\Longleftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right[\end{aligned}$$

donc

$$D_h = \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right[.$$

x	$-\infty$		-2/3		5/2		$+\infty$
$2+3x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$5-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	

4) d est définie si, et seulement si,
$\sin\sqrt{x} \geq 0$ $(x \geq 0) \Longleftrightarrow 2k\pi \leq \sqrt{x} \leq \pi + 2k\pi$ $(x \geq 0,\ k = 0, 1, 2..)$,
donc

$$4k^2\pi^2 \leq x \leq \pi^2(1+2k)^2,\ k \in \mathbb{N}$$

et

$$D_d = \{x \in \mathbb{R}\ :\ 4k^2\pi^2 \leq x \leq \pi^2(1+2k)^2,\ k \in \mathbb{N}\}.$$

• Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes racines carrées, il est utile de faire intervenir “l'expression conjuguées":

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Les racines au numérateur ont “disparu" en utilisant l'identité $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.

$*\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} = \dfrac{0}{0}$ forme indéterminée

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1+x-(1+x^2)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1-x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$*\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \dfrac{0}{0}$ forme indéterminée

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} &= \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = 4.
\end{aligned}$$

∗ On pose

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n} \\
&= \frac{(\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m})(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\
&= \frac{1+x^m-(1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\
&= \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\
&= \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}
\end{aligned}$$

Et nous avons

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}} = 1.$$

Donc l'étude de la limite de f en 0 est la même que celle de la fonction $x \mapsto x^{m-n}$.

Distinguons plusieurs pour la limite de f en 0.

- Si $m > n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ tend vers 0.
- Si $m = n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ vers 1.
- Si $m < n$ alors $x^{m-n} = \dfrac{1}{x^{n-m}} = \dfrac{1}{x^k}$ avec $k = n - m$ un exposant positif. Si k est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$. Pour k impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$. Conclusion pour $k = n - m > 0$ pair, la limite de f en 0 vaut $+\infty$ et pour $k = n - m > 0$ impair f *n'a pas de limite en* 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

∗ Démontrons par la définition de la limite : $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}(3x+1) = 7$.

D'une manière générale, on a:

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in D_f,\ \ |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Alors :

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ |x-2| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - 7| < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
|f(x)-7| < \varepsilon &\Longleftrightarrow |(3x+1)-7| < \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow |3x-6| < \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow |3(x-2)| < \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

Donc

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ |x-2| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - 7| < \varepsilon$

Tel que $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Solution de L'exercice 2:

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}\underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow+\infty}g(x)&=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln x\\&=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)\\&=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\ln\left(\frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}\right)\\&=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\ln\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)=0\end{aligned}$$

Solution de L'exercice 3:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|} & si\ x\neq 0,\\ 1 & si\ x=0.\end{cases}$$

1. On a

$$\lim_{\substack{>\\x\longrightarrow 0}}f(x)=\lim_{\substack{>\\x\longrightarrow 0}}\frac{\sin x}{x}=1\qquad(\ \textit{on a utilis une limite connue}\ )$$
$$\lim_{\substack{<\\x\longrightarrow 0}}f(x)=\lim_{\substack{<\\x\longrightarrow 0}}\left(-\frac{\sin x}{x}\right)=-1$$

Donc la limite n'existe pas .
2. On a $\lim_{x\longrightarrow 0}f(x)$ n'existe pas, ce qui signifie que la fonction n'est pas continue en 0
f n'est pas dérivable en 0, puisqu'elle n'est pas continue en ce point, car toute fonction dérivable est continue ce qui est équivalent à dire que toute fonction discontinue en un point ne peut être dérivable en ce point .

Solution de L'exercice 4:
1) Si $x \neq 0$ alors f est continue
$*$Etude de la continuité au point $x = 0$:
$f(0) = b$.

$$f \text{ continue au point } x = 0 \Longleftrightarrow \lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} f(x) = f(0).$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} (ax + b) = b$$
$$\lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} \left(\frac{1}{1+x}\right) = 1$$
$$f \text{ continue en } x = 0 \Longrightarrow b = 1$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ si $b = 1$
2) Si $x \neq 0$ alors f est dérivable
$*$Etude de la dérivabilité au point $x = 0$:
La fonction est dérivable en $x = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ a une limite finie.

$$f \text{ dérivable au point } x = 0 \Longleftrightarrow \lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0).$$

$$*) \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{a \cdot x + \cancel{b} - \cancel{b}}{x} = a$$

$$*) \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\frac{-1}{1+x}\right) = -1$$

f continue et dérivable en $x = 0 \Rightarrow b = 1$ et $a = -1$

Donc : f est dérivable sur R $\Rightarrow b = 1$ et $a = -1$

Dans ce cas $f'(0) = -1$.

Solution de L'exercice 5:

1. La fonction est clairement cntinue pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$

$$\lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} x^3 \cos\frac{1}{x} = 0, \quad (\ on\ a\ utilis\ le\ thorme\ d'encadrement\ )$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} x^3 \sin\frac{1}{x} = 0, \quad (\ on\ a\ utilis\ le\ thorme\ d'encadrement\ )$$

donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = f(0)$: f est continue en 0.

2. Pour $x \neq 0$ la fonction est clairement dérivable et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos\frac{1}{x} + x \sin\frac{1}{x} & si\ x > 0, \\ \\ 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} & si\ x < 0. \end{cases}$$

La droite tangente à f en $x = x_0$ a équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ donc pour $x_0 = \dfrac{1}{\pi}$ on a $y = -\dfrac{3}{\pi^2}x + \dfrac{2}{\pi^3}$.

3. La fonction est dérivable en $x = 0$ si et seulment si la limite $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ a une limite finie.

On a

$$\lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} \frac{x^3 \cos\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$$

Donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$: f est dérivable en 0 et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos\frac{1}{x} + x \sin\frac{1}{x} & si\ x > 0, \\ \\ 0, & si\ x = 0 \\ \\ 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} & si\ x < 0. \end{cases}$$

4. f' est clairement continue pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$ on a

$$\lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} f'(x) = \lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} \left(3x^2 \cos\frac{1}{x} + x \sin\frac{1}{x}\right) = 0,$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} f'(x) = \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} \left(3x^2 \sin\frac{1}{x} - x \cos\frac{1}{x}\right) = 0$$

alors $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f'(x) = f'(0)$, donc f' est continue en 0. Par conséquent f est de classe $C^1(\mathbb{R})$.

Solution de L'exercice 6:

a)$f\ :\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la situation en 0

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \sin x = 0$ et $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ (c-à-d bornée)

Donc le prolongement par continuité définie par $\tilde{f}\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

b) $f\ :\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la situation en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) &= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \ln\left(\frac{e^0 + e^{-0}}{2}\right)}{x - 0} \\ &= \left(\frac{e^0 - e^{-0}}{e^0 + e^{-0}}\right) = 0 \ car\ :\ \left(\ln\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned}$$

Donc le prolongement par continuité définie par $\tilde{f}\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

c) $f\ :\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{(1+x)}.$$

Donc f a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. En -1 la fonction f n'est pas prolongeable par continuité car $\lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^{\pm}} f(x) = \mp\infty$.

Donc f n'admet pas un prolemngement par continuité sur $\mathbb{R}$.

Solution de L'exercice 7:
Rappel :

THÉORÈME DE L'HÔPITAL

Theorem : *Soient f et g deux fonctions dérivables au voisinage de $x_0 \in]a,b[$.*

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ *et* $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ *où A, B sont tous les deux nuls ou tous les deux infinis,* $g'(x) \neq 0$ *pour x voisin de x_0, et si* $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe alors:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1) Soient $f(x) = e^{2x} - 1$ et $g(x) = x$, alors $f'(x) = 2e^{2x}$ et $g'(x) = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{0}{0}, \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$$

Donc

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2.$$

2) Soient $f(x) = 1+\cos\pi x$ et $g(x) = x^2-2x+1$, alors $f'(x) = -\pi\sin\pi x,\ f''(x) = -\pi^2\cos\pi x$ et $g'(x) = 2x-2,\ g''(x) = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1} = \frac{0}{0}, \qquad \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{-\pi\sin\pi x}{2x-2} = \frac{0}{0},$$
$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{-\pi^2\cos\pi x}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

Donc

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1} = \frac{\pi^2}{2}.$$

3) Soient $f(x) = \ln(\cos 3x)$ et $g(x) = \ln(\cos 2x)$, alors $f'(x) = -\dfrac{3\sin 3x}{\cos 3x}$ et $g'(x) = -\dfrac{2\sin 2x}{\cos 2x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)} = \frac{0}{0}, \quad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{3}{2}\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \times \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \\
&= \frac{3}{2}\left[\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\cos 3x} \times \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{3}{2}\right] \\
&= \frac{9}{4} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}
\end{aligned}$$

Fiche de TD 4

Solution de L'exercice 1:

1) $\cos(2x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi$.
En total on a quatre solutions $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{7\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{11\pi}{6}$.

2) Comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ l'équation $2\cos^2 x + 7\sin x = 5$ peut s'écrire comme $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$ qui est une équation du second degré.

3) En factorisant l'équation $(2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$ alors $\sin x = 0.5$ et les solutions sont $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

Solution de L'exercice 2:

a) On sait que

$$\arcsin(\sin x) = x$$

si et seulement si x appartient à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. On cherche donc un x dans cet intervalle, tel que

$$\sin x = \sin \frac{18\pi}{5}.$$

Or

$$\frac{18\pi}{5} = \frac{20\pi - 2\pi}{5} = 4\pi - \frac{2\pi}{5}.$$

Comme $-\dfrac{2\pi}{5}$ appartient à $[-\pi/2, \pi/2]$, on aura donc

$$\arcsin\left(\sin \frac{18\pi}{5}\right) = -\frac{2\pi}{5}.$$

b) On peut utiliser la formule

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

On a alors

$$\arccos\left(\sin \frac{18\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sin \frac{18\pi}{5}\right)$$

et d'après a)

$$\arccos\left(\sin \frac{18\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{9\pi}{10}.$$

On constate bien que ce résultat appartient à l'intervalle $[0, \pi]$.

c) On procède comme dans a)

$$\frac{15\pi}{7} = \frac{14\pi + \pi}{7} = 2\pi + \frac{\pi}{7},$$

donc

$$\arcsin\left(\sin \frac{15\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}.$$

d) Le nombre $\frac{1}{3}$ étant compris entre -1 et 1, on a

$$\sin\left(\arcsin \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

e) le nombre $\frac{\pi}{2}$ étant réel, on a

$$\tan\left(\arctan \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Solution de L'exercice 3:

a) $\forall\, x \in [-1,1]\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$
$\forall\, x \in [-1,1]\ \sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2$ donc $\sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.
Mais comme $\arccos(x) \in [0,\pi]$ alors $\sin(\arccos x) \geq 0$ donc $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

b)$\forall\, x \in [-1,1]\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
$\forall\, x \in [-1,1]\ \cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2$ donc $\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.
Mais comme $\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ alors $\cos(\arcsin x) \geq 0$ donc $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

c) $\forall\, x \in [-1,1]$ on a : $0 \leq \arccos x \leq \pi$ donc $-\pi \leq -\arccos x \leq 0$ alors $0 \leq \pi - \arccos x \leq \pi$.
Rappelons que $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ donc $\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$.
Il résulte que $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ autrement $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$.
Rappel :

$$\boxed{\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall\, x \in\,]-1,1[.}$$

d) Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ alors $f'(x) = 0$ pour $x \in]-1,1[$ donc f est une fonction constante sur $[-1,1]$ Or $f(0) = \frac{\pi}{2}$ donc pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Rappel :

$$\boxed{\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \text{ et } \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta}$$

a) $\cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$
b) $\cos(2\arcsin x) = 1 - 2\sin^2(\arcsin x) = 1 - 2x^2.$
c) $\sin(2\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

Solution de L'exercice 4:

Soit $g(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$, la fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$.

On a $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0$ donc g est constante sur chacun des ses intervalle de définition.

$g(x) = c_1$ sur $]-\infty, 0[$ et $g(x) = c_2$ sur $]0, +\infty[$. En calculant $g(1)$ et $g(-1)$ on obtient $c_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $c_2 = +\frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{g(x) = g(1) = \frac{\pi}{2},\ \forall\, x > 0 \text{ et } g(x) = g(-1) = -\frac{\pi}{2},\ \forall\, x < 0.}$$

Solution de L'exercice 5:
a) $\arcsin x = \arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}$

$$\Longrightarrow \sin(\arcsin x) = \sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right)$$
$$\Longrightarrow x = \sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right) + \cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cdot\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$$
$$\Longrightarrow x = \frac{4}{5}\times\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)} + \frac{15}{3}\times\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)}$$
$$\Longrightarrow x = \frac{4}{5}\times\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} + \frac{15}{3}\times\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}$$
$$\Longrightarrow x = \frac{4}{5}\times\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\times\frac{3}{5} = \frac{48}{65} + \frac{3}{13} = \frac{63}{65} \in [-1, 1]$$

b) L'équation $(\arcsin x - 5)\arcsin x = -4$,
équivaut au système

$$\begin{cases} U = \arcsin x \\ \\ U^2 - 5U + 4 = 0 \end{cases}$$

L'équation du second degré a deux racines $U_1 = 1$ et $U_2 = 4$. Mais $\arcsin x$ étant compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, l'équation $\arcsin x = 4$ n'a pas de solution. Par contre l'équation $\arcsin x = 1$ a une solution $x = \sin 1$, qui est la seule solution de l'équation initiale.

c) $5\cosh x - 4\sinh x = 3$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow 5\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - 4\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = 3 \\
&\Longrightarrow \frac{5}{2}e^x + \frac{5}{2}e^{-x} - 2e^x + 2e^{-x} = 3 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{2}e^x + \frac{9}{2}e^{-x} = 3 \Longrightarrow e^x + 9e^{-x} = 6 \\
&\Longrightarrow e^{2x} + 9 = 6e^x \Longrightarrow e^{2x} - 6e^x + 9 = 0.....(*)
\end{aligned}$$

Posons $t = e^x$, $(*)$ devient : $t^2 - 6t + 9 = 0$.
$\triangle = 0$, $t = 3 \Longrightarrow x = \ln(3)$.

Solution de L'exercice 6:

a) En écrivant la fonction à l'aide des exponentielles, on obtient

$$2\cosh^2 x - \sinh 2x = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 1 + e^{-2x},$$

et ceci tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Alors

$$e^{2x}\left(2\cosh^2 x - \sinh 2x\right) = e^{2x} + 1,$$

et ceci tend vers 1 lorsque x tend vers $-\infty$.
$\star$ La fonction f est définie si

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1$$

Cette inéquation s'écrit

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

ou encore

$$\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0.$$

Le domaine de définition est donc $]0, +\infty[$. En utilisant l'expression de argch sous forme de logarithme,

$$\begin{aligned}
\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] &= \ln\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}\right] \\
&= \ln\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\right] \\
&= \ln\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\left|x-\frac{1}{x}\right|\right].
\end{aligned}$$

Si $x \geq 1$, le nombre $x - \dfrac{1}{x}$ est positif ainsi que $\ln x$, et

$$\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln x = |\ln x|.$$

Si $0 < x \leq 1$, le nombre $x - \dfrac{1}{x}$ est négatif ainsi que $\ln x$, et

$$\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln\frac{1}{x} = -\ln x = |\ln x|,$$

donc, pour tout $x > 0$

$$\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = |\ln x|.$$