G. S. Almoustakbal II		Première BIOF SM
Année scolaire : 2021/2022	**Contrôle 2 en mathématique**	Durée : 1^h : 50^{mins}

Nom et prénom : ....

Exercice 01 (4 points)

1 f définie par $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^3 + 2x & , x \geq 1 \\ 4x^2 - 1 & , x < 2 \end{cases} \end{aligned}$ est une application. 1 pt

❑ Vrai ❑ Faux.

2 L'image directe de $[0, 4]$ par l'application $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \dfrac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} \end{aligned}$, est égale à: 1 pt

❑ $[1, +\infty[$ ❑ $[-2, \dfrac{4}{3}[$ ❑ $[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}]$.

3 L'image réciproque de $[-1, 3]$ par l'application $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2 - x \end{aligned}$ est égale à: 1 pt

❑ $[-1, 3]$ ❑ $[-3, 1]$ ❑ $[-1, +\infty[$.

4 L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \dfrac{x}{2021 + |x|}$ est 1 pt

❑ injective ❑ surjective ❑ ni surjective ni injective.

Exercice 02 (4 points)

1 La proposition : $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ est : ❑ Vraie ❑ Fausse. 1 pt

2 Si A et B sont deux parties de deux ensembles E et F respectivement, le complémentaire de $A \times B$ dans $E \times F$ est : ❑ $\overline{A} \times B$. ❑ $A \times \overline{B}$. ❑ $(\overline{A} \times F) \cup (E \times \overline{B})$. 1 pt

3 On considère les ensembles suivants: $A = \{3\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \left\{\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

On a alors : ❑ $A \subset B$. ❑ $B \subset A$. ❑ $A \cap B = \varnothing$. ❑ $A = B$. 1 pt

4 On considère les ensembles : 1 pt

$$A = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 3x - 4y\right\} \text{ et } B = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 2xy = 4x + 3y\right\}.$$

On pose $C = \left\{x^2 + y^2 / (x; y) \in A \cap B\right\}$. On a alors :

❑ $C = \{0; 16\}$ ❑ $C = \{0; 1; 9; 16\}$ ❑ $C = \{1; 4; 25\}$ ❑ $C = \{0; 25\}$

Exercice 03 (2 points)

On considère les ensembles $A = \{12k-1 / k \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{3k+2 / k \in \mathbb{Z}\}$ et $C = \{5k+8 / k \in \mathbb{Z}\}$.

1 (a) Vérifier que $38 \in B \cap C$. — 0,5 pt

(b) Déterminer en extension : $[20, 50] \cap C$. — 0,5 pt

2 Montrer que : $A \subset B$ et que $A \not\subset C$. — 1 pt

Exercice 04 (5,5 points)

On considère l'application : $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 - x \end{array}$

1 (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \geq -\frac{1}{4}$. — 1 pt

(b) f est-elle surjective? justifier votre réponse. — 1 pt

2 (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(1-x) = f(x)$. — 1 pt

(b) f est-elle injective? justifier votre réponse. — 1 pt

3 Donner deux intervalles I et J tels que l'application $g : \begin{array}{ll} I & \longrightarrow J \\ x & \mapsto x^2 - x \end{array}$ soit bijective puis Préciser g^{-1}. — 1,5 pt

Exercice 05 (4,5 points)

On considère la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$.

1 (a) Montrer que f est bornée par 0 et 1 — 1 pt

(b) Le nombre 1, est il extremum de la fonction f ? justifier votre réponse. — 1 pt

2 Montrer que f est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$. — 1 pt

3 En utilisant la composée de deux fonctions, déterminer la monotonie de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x+3}-1}{x+4}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$. — 1,5 pt

---

Exercices Bonus (Hors barème).

Exercice 06 (plus deux points) ☆

Calculer en fonction de l'entier naturel non nul n la somme : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2}{2k + \sqrt{4k^2-1}}}$.

Exercice 07 (plus deux points) ☆☆

A est une partie d'un ensemble E. L'application $\mathbb{1}_A$ de E vers $\{0, 1\}$ est définie par:

$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A; \\ 0 \text{ si } x \notin A. \end{cases}$ Montrer que $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\{0, 1\}^E$.

Bonne chance

NB : Vous pouvez scanner le code QR du premier contrôle après 19h pour la correction.