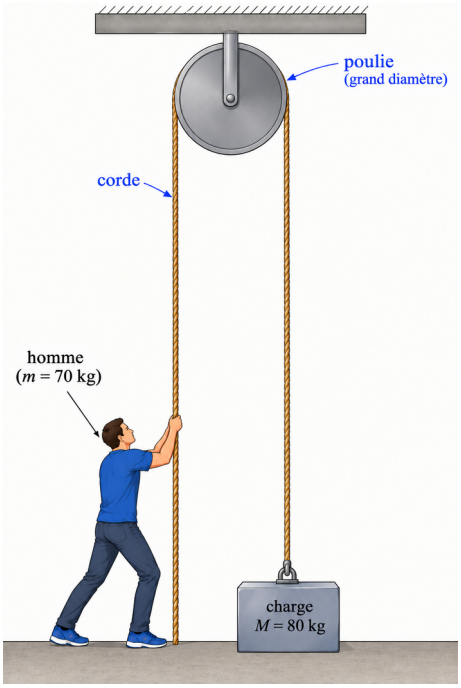
Grimper à la corde avec poulie

Présentation du problème :

Une poulie d'axe de rotation fixe, peut tourner sans frottement ; son moment d'inertie par rapport à cet axe est négligeable. Une corde de masse négligeable est fixée à une charge de masse M=80kg posée sur le sol. Un homme de masse m=70kg s'accroche à la corde.
1° : L'homme peut-il grimper le long de la corde sans que la charge se soulève ? Si oui : à quelle condition ?
2° : Peut-on envisager que la charge se soulève lorsque l'homme grimpe ? Si oui : à quelle condition ?

P.S. : la figure n'est pas à l'échelle ; il faut imaginer la distance de l'axe de la poulie au sol bien supérieure à celle que suggère le schéma. Un raisonnement purement statique ne permet pas de répondre correctement aux questions…



Question n° 1 :

Approche qualitative : imaginons la charge de masse M posée au sol et l'homme de masse m suspendue immobile à la corde. Il s'agit d'une position d'équilibre stable car m<M et la réaction $\vec{R}$ du sol compense la différence de poids. Approche quasi statique : si l'homme se met à monter sans à coup, avec une accélération « a » par rapport au sol très faible, l'équilibre n'est pratiquement pas modifié. On peut donc répondre **« OUI »** à la première partie de la question.

Approche quantitative : à quelle condition concernant la valeur de l'accélération « a » de l'homme, la charge reste-elle en contact avec le sol ? Si l'homme tire vers le bas sur la corde pour monter, la corde exerce sur lui une force verticale ascendante $\vec{T}$ (principe des actions réciproques également connu sous le nom de troisième loi de Newton). La relation fondamentale de la dynamique appliqué à l'homme dans le référentiel de la terre est ainsi :

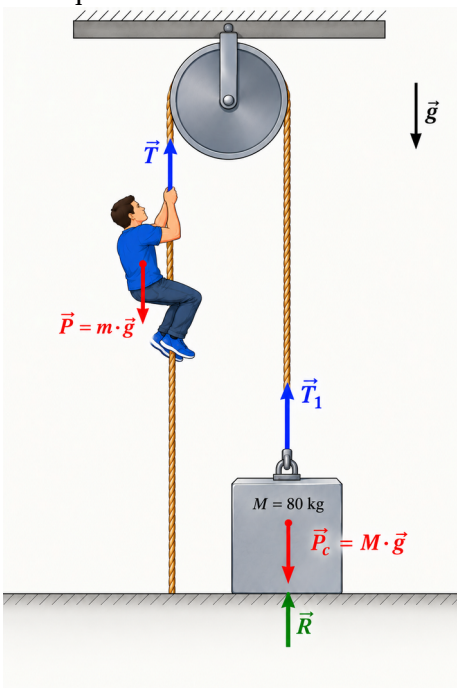
$$\vec{P}+\vec{T}=m\cdot\vec{a}$$

Soit en projetant sur un axe vertical ascendant :

$$T-m\cdot g=m\cdot a \quad ; \quad T=m\cdot(a+g)$$

La condition d'équilibre de la charge au sol s'écrit :

$$\vec{P}_c+\vec{T}_1+\vec{R}=\vec{0} \quad ; \quad -M\cdot g+T_1+R=0 \quad ; \quad T_1=M\cdot g-R$$



Pour que la charge reste au sol : $R \geq 0$, soit : $T_1 \leqslant M \cdot g$; or la poulie est idéale et ainsi se comporte en simple transmetteur d'effort : T=T_1. Cela conduit à :

$$m \cdot (a+g) \leqslant M \cdot g \quad ; \quad a \leqslant g \cdot \left(\frac{M}{m} - 1 \right)$$

Soit , avec g=9,8m/s^2 :

$$a \leqslant \frac{g}{7} \quad ; \quad a \leqslant 1{,}4\, m/s^2$$

Comme prévu qualitativement, l'accélération du grimpeur par rapport au sol doit rester faible pour que la charge reste au sol.

Question n° 2 :

Approche qualitative : Nous venons d'établir la condition sur « a » pour que la charge ne décolle pas du sol. Il est logique d'imaginer que si cette condition n'est pas vérifiée, la charge va se soulever. Autre argument : Si l'homme veut accélérer d'avantage vers le haut, il doit tirer plus fort vers le bas sur le brin gauche de corde, ce qui, compte tenu du principe des actions réciproques déjà évoqué, augmente la tension T, donc augmente la tension T_1 puisque T=T_1. On peut concevoir qu'alors : T_1>M.g : la charge se soulève.

Approche quantitative : Si la charge décolle à partir d'une position d'immobilité, elle possède nécessairement un vecteur accélération $\vec{a}_1$ vertical ascendant. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la charge juste après l'instant de décollage s'écrit :

$$\vec{P}_c + \vec{T}_1 = M \cdot \vec{a}_1 \quad ; \quad -M \cdot g + T_1 = M \cdot a_1 > 0 \quad ; \quad T_1 > M \cdot g$$

La poulie se comporte toujours en transmetteur idéal d'effort : T=T_1. L'expression de la relation fondamentale de la dynamique appliqué à l'homme reste inchangée littéralement :

$$m \cdot (a+g) > M \cdot g \quad ; \quad a > g \cdot \left(\frac{M}{m} - 1 \right)$$

Soit , avec g=9,8m/s^2 :

$$a > \frac{g}{7} \quad ; \quad a > 1{,}4\, m/s^2$$

En faisant preuve de vivacité dans son ascension, le grimpeur peut soulever une charge plus lourde que lui : ce sont les lois de la dynamique qui s'appliquent, pas celles de la statique !